Presentación

Este libro reúne la teoría completa y problemas (resueltos y propuestos). Son problemas tipo, que presentan las mismas características de los que se plantean al postulante en el concurso de admisión a la Universidad Nacional Federico Villarreal. La Plana Docente de trigonometría los expone y resuelve en 16 clases de manera ejemplar para que puedan servir como modelos en la resolución de otros problemas parecidos con los que el estudiante de CEPREVI tiene que enfrentarse en sus prácticas calificadas, exámenes parciales y finales.

La Plana Docente de trigonometría de CEPREVI es conocida por los estudiantes no sólo por sus condiciones pedagógicas sino también por el amplio conocimiento de los temas de la trigonometría, lo cual hacen de este libro una guía teórica y práctica de gran utilidad para el estudiante de CEPREVI.

Los profesores.

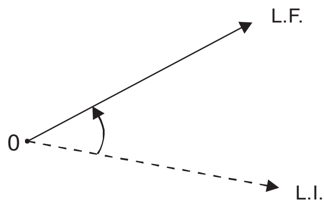
Índice

UNIDAD 1

Sistemas de Medición Angular

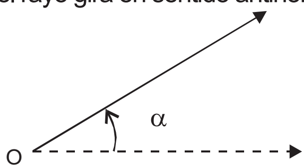
Ángulo Trigonométrico:

Es una figura generada por la rotación de un rayo, alrededor de un punto fijo llamado vértice, desde una posición inicial hasta una posición final.

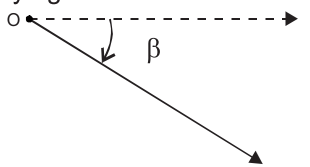


Convención

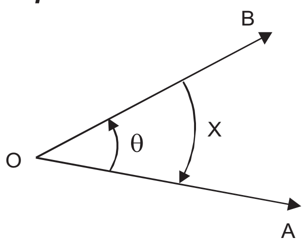
Ángulos Positivos:
Si el rayo gira en sentido antihorario.



Ángulos Negativos:
Si el rayo gira en sentido horario.



Ejemplo:



Nótese en las figuras:

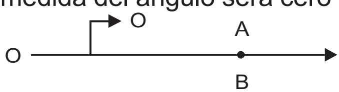
- "θ" es un ángulo trigonométrico de medida positiva.
- "x" es un ángulo trigonométrico de medida negativa.

Se cumple: $\boxed{x = -\theta}$

Notas:

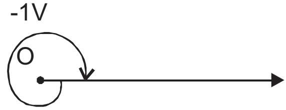
1. ÁNGULO NULO

Si el rayo no gira, la medida del ángulo sera cero



2. ÁNGULO DE UNA VUELTA

Se genera por la rotación completa del rayo, es decir su lado final coincide con su lado inicial por primera vez.



3. MAGNITUD DE UN ÁNGULO

Los ángulos trigonométricos pueden ser de cualquier magnitud, ya que su rayo puede girar infinitas vueltas, en cualquiera de los sentidos.
Así por ejemplo en la figura (1), el ángulo trigonométrico mide “3 vueltas”, en la figura (2) el ángulo trigonometrico mide “-2 vueltas”.

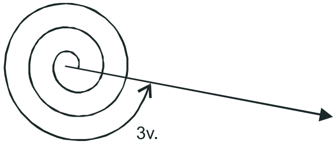


Fig. 1

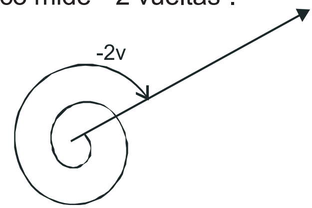


Fig 2.

Medición de ángulos

Así como para medir segmentos se requiere de una unidad de longitud determinada (metros, pulgadas, etc.), para medir ángulos se necesita de otro ángulo como unidad de medición.

Sistema Sexagesimal (Inglés)

Su unidad ángular es el “grado sexagesimal”(1º), el cual es equivalente a la 360 ava parte del ángulo de una vuelta.

$$1^\circ = \frac{1\,v}{360} \qquad \boxed{1v = 360^\circ}$$

Equivalencias

$1^\circ = 60'$	$1' = 60''$	$1^\circ = 3600''$

Sistema Centesimal (Francés)

Su unidad angular es el “grado Centesimal” (1^g), el cual es equivalente a la 400 ava parte del ángulo de una vuelta.

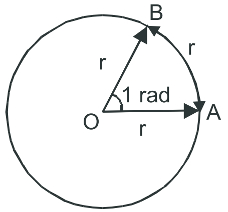
$$1^g = \frac{1\,v}{400} \quad \rightarrow \quad \boxed{1v = 400^g}$$

Equivalencias

$1^g = 100^m$	$1^m = 100^s$	$1^g = 10000^s$

Sistema Radial o Circular (Internacional)

Su unidad es el "radián", el cual es un ángulo central que subtiende un arco de longitud equivalente al radio de la circunferencia respectiva.



m AOB = 1 rad

$$1 \text{ rad} = \frac{1\text{v}}{2\pi} \qquad \boxed{1\text{v} = 2\pi \text{ rad}} \quad 6{,}2832 \text{ rad}$$

Nota:

Como: $\pi = 3{,}141592653...$

Entonces: $\boxed{\pi \cong 3{,}1416 \cong \frac{22}{7} \cong \sqrt{10} \cong \sqrt{3}+\sqrt{2}}$

Conversión de Sistemas

Factor de conversión

Es un cociente "conveniente" de dos magnitudes angulares equivalentes.

Magnitudes angulares equivalentes:

1 vuelta	:	1 v	=	360°	400^{g}	2πrad
Llano :	1/2 v	=	180°	200^{g}	πrad	
	Sólo grados:			9°	10^{g}	
Recto:	1/4 v	=	90°	100^{g}	$\pi/2$ rad	

Nótese que: "Para convertir un ángulo de un sistema otro, multiplicaremos por el factor de conversión".

Ejemplo (1)

Convertir a radianes la siguiente magnitud angular: $a = 12^{\circ}$

Resolución

Magnitud equivalente	***Factor de Conversión***
π rad $\quad 180^{\circ}$	$\dfrac{\pi \text{rad}}{180^{\circ}}$

$$a = 12^{\circ} \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^{\circ}} <> \frac{\pi}{15} \text{ rad}$$

Ejemplo (2)

Convertir a radianes la siguiente magnitud angular: $b = 15^g$

Resolución

Magnitud equivalente	***Factor de Conversión***
π rad 200^g	$\dfrac{\pi\text{rad}}{200^g}$

$$b = 15° \cdot \frac{\pi\ \text{rad}}{200^g} \langle\,\rangle \frac{3\,\pi}{40}\ \text{rad}$$

Ejemplo (3)

Convertir a grados sexagesimales la siguiente magnitud angular: $q = 24^g$

Resolución

Magnitud equivalente	***Factor de Conversión***
9° 10^g	$\dfrac{9^o}{10^g}$

$$\theta = 24^g\ .\ \frac{9^o}{10^g} \langle\,\rangle \frac{108^o}{5} \langle\,\rangle 21.6^o$$

Ejemplo (4)

Hallar: $E = \dfrac{1^o}{1'} + \dfrac{1^g}{1^m} + \dfrac{9^o}{5^g}$

Resolución

Recordando: $1^o = 60'$

$1^g = 100^m$

$9^o \quad 10^g$

Reemplazando en:

$$E = \frac{60'}{1'} + \frac{100^m}{1^m} + \frac{10^g}{5^g}$$

$$E = 60 + 100 + 2 = 162$$

Ejemplo (5)

Hallar: a+b ; sabiendo: $\dfrac{\pi}{8}\text{rad} \qquad a°b'$

Resolución

Equivalencia: π rad = 180°

$$\frac{\pi}{8}\text{rad} \bullet \underbrace{\frac{180^o}{\pi\text{rad}}}_{\text{Factor de conversión}} = \frac{180^o}{8} = \frac{45^o}{2} = \frac{44^o + 1^o}{2} = 22^o + \frac{1^o}{2} = 22^o + 30' = 22^o\,30'$$

Luego: $\frac{\pi}{8}$rad 22º30’

Comparando: a = 22
b = 30
Entonces: a + b = 52 ... Rpta.

Nótese que: “Para convertir un ángulo de un sistema a otro, multiplicaremos por el factor de conversión”.

Ejemplo (6)
Convertir a sexagesimales y radianes la siguiente magnitud angular: a = 16^g

Resolución
A) 16^g sexagesimales (°)

Factor de conversión = $\frac{9^o}{10^g}$

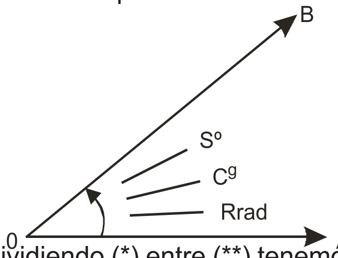
Luego: $\alpha = 16^g \bullet \frac{9^o}{10^g} = \frac{144^o}{10} = \frac{72^o}{5} = 14,4^o$

B) 16^g radianes

Factor de conversión = $\frac{\pi rad}{200^g}$

Luego: $\alpha = 16^g \bullet \frac{\pi rad}{200^g} = \frac{16 \cdot \pi rad}{200} = \frac{2\pi}{25}$rad

Fórmula general de conversión
Sean S, C y R los números que representan la medida de un ángulo en los sistemas sexagesimal, centesimal y radial respectivamente, luego hallamos la relación que existe entre dichos números.



De la fig. Sº C^g R rad ... (*)
Además 180º 200^g π rad ... (**)

Dividiendo (*) entre (**) tenemos:

$$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$$ Fórmula o Relación de Conversión

Fórmulas particulares:

$$\frac{S}{9}=\frac{C}{10} \qquad \frac{S}{180}=\frac{R}{\pi} \qquad \frac{C}{200}=\frac{R}{\pi}$$

Ejemplos

1. Convertir $\frac{\pi}{5}$rad a grados sexagesimales

Resolución

$$\frac{S}{180}=\frac{R}{\pi} \qquad \frac{S}{180}=\frac{\pi/5}{\pi} \qquad S = 36$$

$$\frac{\pi}{5}\text{rad} = 36°$$

2. Convertir 60^g a radianes

Resolución

$$\frac{C}{200}=\frac{R}{\pi} \qquad \frac{60}{200}=\frac{R}{\pi} \qquad R=\frac{3\pi}{10}$$

$\therefore \quad 60^g=\frac{3\pi}{10}$ rad

3. Convertir 27º a grados centesimales

Resolución

$$\frac{S}{9}=\frac{C}{10} \quad \rightarrow \quad \frac{27}{9}=\frac{C}{10} \quad \rightarrow \quad C = 30$$

$\therefore \quad 27^o = 30^g$

4. Seis veces el número de grados sexagesimales de un ángulo sumado a dos veces el número de sus grados centesimales es 222. Hallar el número de radianes de dicho ángulo.

Resolución

Si S, C y R son los números que representan las medidas del ángulo en grados sexagesimales, en grados centesimales y en radianes respectivamente; del enunciado afirmamos que:

$$6S + 2C = 222 \qquad ... (1)$$

Sabemos:

NOTA: Para solucionar este tipo de problemas también podríamos hacer:

$$\frac{S}{180}=\frac{C}{200}=\frac{R}{\pi}=K \quad \begin{cases} S=180K \\ C=200K \\ R=\pi K=? \end{cases}$$

Reemplazando en (1):

$$6(180K) + 2(200K) = 222$$
$$1480K = 222$$
$$K = \frac{3}{20}$$
$$\therefore \quad R = \pi K = \frac{3}{20}$$

5. Un ángulo positivo mide S° o C^g, calcular el valor simplificado de:

$$P = \sqrt[4]{\frac{C+S}{C-S} - \sqrt[3]{\frac{C+S}{C-S} + 8}}$$

Resolución

$$\frac{S}{9} = \frac{C}{10} = K \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} S = 9K \\ C = 10K \end{cases}$$

Calculamos en forma particular:

$$\frac{C+S}{C-S} = \frac{10K+9K}{10K-9K} = \frac{19K}{K} = 19$$

Reemplazamos en “P”:

$$P = \sqrt[4]{19 - \sqrt[3]{\underbrace{19+8}_{27}}}$$
$$P = \sqrt[4]{19-3}$$
$$P = \sqrt[4]{16}$$
$$P = 2$$

Problemas I

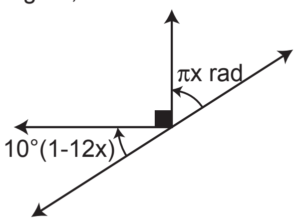
1. Simplificar:

$$K=\sqrt{\frac{70^g-18^\circ}{\frac{\pi}{4}\text{rad}-40^\circ}}$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

2. Si: $a=\dfrac{1^\circ 2'}{3''}$, hallar: $\sqrt{a-15}$
a) 30 b) 33 c) 35
d) 53 e) 32

3. En la figura, hallar "x".



a) 3 b) 1/3 c) 2
d) 1/2 e) 1

4. Si: S = # de grados sexagesimal
C = # de grados centesimal
Simplificar:

$$M=\sqrt[4]{\frac{C+S}{C-S}-\sqrt[3]{\frac{C+S}{C-S}+8}}$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

5. Calcular:

$$E=\frac{\pi C+\pi S+20R}{3\pi C-\pi S+20R}$$

a) 5/11 b) 10/11 c) 11/10
d) 1 e) 2

6. Si: $\dfrac{S}{3}+\dfrac{C}{2}=40$. Hallar "R", siendo "S", "C" y "R" los conocidos.

a) $\dfrac{\pi}{4}$ b) $\dfrac{\pi}{3}$ c) $\dfrac{\pi}{2}$
d) $\dfrac{\pi}{6}$ e) $\dfrac{\pi}{5}$

7. De la condición: $5^\circ <> \dfrac{\pi}{x}$ rad.
Hallar:

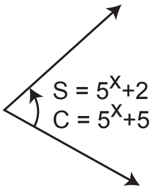
$$E=\frac{x^\circ}{10^g}$$

a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 10

8. En un triángulo se cumple que la suma del primer y segundo ángulo es igual a $(\frac{3\pi}{4})$rad, y que la suma del segundo y tercer ángulo es 150^g, según sus ángulos que tipo de triángulo es:
a) Escaleno
b) Isósceles
c) Equilátero
d) Rectángulo
e) Rectángulo isósceles

9. Se crea un nuevo sistema de medición angular denominado "x" tal que 7 unidades de este nuevo sistema equivale a 35^g. Calcular el equivalente de $(\frac{\pi}{10})$rad, en el nuevo sistema.
a) 1^x b) 2^x c) 3^x
d) 4^x e) 5^x

10. Siendo "S" y "C" lo convencional. Hallar "x".



a) 1 b) -2 c) 0
d) 4 e) 2

11. Hallar "R", en:

$$\left(\frac{\pi}{S}+\frac{\pi}{180}\right)\left(\frac{\pi}{C}+\frac{\pi}{200}\right)\left(\frac{\pi}{R}+1\right)=\frac{64\pi^3}{27SCR}$$

Siendo "S"; "C" y "R" los conocidos.

a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{2}$
d) $\frac{\pi}{6}$ e) $\frac{\pi}{5}$

12. Indicar el valor de "θ" que verifica la igualdad.

$$\theta° + (\theta+1)' + \theta'' = \frac{\pi°\pi'}{\pi} + \frac{\pi'\pi''}{\pi}$$

a) 1/2 b) 1 c) 2
d) 1/4 e) 19

13. Si "R" y "S" son los conocidos y se cumple:

$R = \frac{\pi}{20}$ y $S = \sqrt{x-1}$; hallar "x".

a) 81 b) 80 c) 82
d) 83 e) 64

14. Siendo "S", "C" y "R"; los convencionales. Además se cumple que:

$S = x^3 + x^2 + x + 2$
$C = x^3 + x^2 + x + 7$

Hallar: "R"

a) $\frac{\pi}{10}$ b) $\frac{\pi}{8}$ c) $\frac{\pi}{6}$
d) $\frac{\pi}{5}$ e) $\frac{\pi}{4}$

15. Hallar: "R"; en:

$$\frac{C+S+R}{2S+R+4}+\frac{2S+R+4}{C+S+R}=2$$

Siendo "S"; "C" y "R" los convencionales.

a) $\frac{\pi}{10}$ b) $\frac{\pi}{8}$ c) $\frac{\pi}{6}$
d) $\frac{\pi}{5}$ e) $\frac{\pi}{4}$

16. Simplificar:

$$W=\frac{C°+E°+P°+R°+E°+V°+I°}{C^g+E^g+P^g+R^g+E^g+V^g+I^g}$$

a) 9 b) 10 c) $\frac{9}{10}$
d) $\frac{10}{9}$ e) $\frac{1}{90}$

17. Un ángulo mide $\overline{1aa}°$ y también $\overline{1b0}^g$, determinar (b-a)° en radianes.

a) $\frac{\pi}{20}$ rad b) $\frac{\pi}{40}$ rad c) $\frac{\pi}{60}$ rad
d) $\frac{\pi}{80}$ rad e) $\frac{\pi}{90}$ rad

18. Hallar la medida en radianes de un ángulo, tal que:

$$\frac{C}{10} = a^k + \frac{1}{\pi} \quad \wedge \quad \frac{S}{18} = a^k - \frac{1}{\pi}$$

a) 0,1 b) 0,2 c) 0,3
d) 0,4 e) 0,5

19. Si: 22^g <> A°B'

Hallar:
$$K = \frac{B-10}{A}$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

20. Sabiendo que:

$$2S - C = \frac{a^2 + 4ab + b^2}{ab} \text{ ; a, b } \in R^+$$

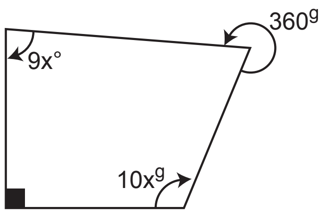
Señale el menor valor que puede tomar la medida circular del ángulo, si "S" y "C" representan los conocidos.

a) $\frac{\pi}{80}$ rad b) $\frac{\pi}{40}$ rad c) $\frac{3\pi}{80}$ rad
d) $\frac{5\pi}{4}$ rad e) $\frac{3\pi}{8}$ rad

CLAVES I				
1. c	2. c	3. b	4. b	5. b
6. a	7. b	8. e	9. d	10. e
11. b	12. b	13. c	14. e	15. d
16. d	17. e	18. b	19. b	20. c

Problemas II

1. Hallar "x" de la figura:



a) 13 b) –20 c) 20
d) –15 e) –13

2. Halle el valor de la siguiente expresión:

$$W = \frac{100^g + \frac{5\pi}{9}\text{rad} + 45°}{\frac{7\pi}{20}\text{rad} - 15°59'60''}$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

3. La diferencia de dos ángulos suplementarios es de $\left(\frac{80}{3}\right)^g$. Hallar el complemento del menor de ellos.

a) $\frac{\pi}{3}$ rad b) $\frac{\pi}{5}$ rad c) $\frac{\pi}{9}$ rad
d) $\frac{\pi}{15}$ rad e) $\frac{\pi}{29}$ rad

4. Reducir:

$$M = \sqrt{\frac{a^g}{a°} + \frac{b^m}{b'}}$$

a) 1/5 b) 2/5 c) 3/5
d) 4/5 e) 6/5

5. Si: α = 8°47" y β = 21°59'13".
Exprese "$\alpha+\beta$" en radianes.

a) $\frac{\pi}{15}$ rad b) $\frac{\pi}{12}$ rad c) $\frac{\pi}{6}$ rad
d) $\frac{\pi}{4}$ rad e) $\frac{\pi}{3}$ rad

6. En un triángulo ABC, se tiene que: A= x°; B=$10x^g$; C=$\frac{2\pi x}{45}$ rad. Calcular la medida del mayor ángulo del triángulo ABC.

a) $\frac{\pi}{4}$ rad b) $\frac{\pi}{6}$ rad c) $\frac{\pi}{3}$ rad
d) $\frac{\pi}{2}$ rad e) $\frac{2\pi}{3}$ rad

7. Se ha creado un nuevo sistema de medida angular cuya unidad es el grado "x" (1^x), tal que:

$$1^x <> \frac{\pi}{240} \text{ rad}$$

¿A cuántos grados "x" equivalen 180 minutos sexagesimales?

a) 2^x b) 3^x c) 4^x
d) 5^x e) 6^x

8. Si se cumple que:

$$\frac{x^g y^m}{y^m} - \frac{x^g y'}{y'} = \frac{y^\circ}{x^g}$$

Calcular: x/y

a) 1/6 b) 1/5 c) 1/4
d) 1/3 e) 1/2

9. Halle la medida sexagesimal del ángulo que cumple que:

$$5C + 3S - \frac{80R}{\pi} = 292 \text{ ; siendo:}$$

S, C y R, lo convencional para un ángulo.

a) 9° b) 27° c) 36°
d) 45° e) 54°

10. Si al número de grados centesimales de un ángulo, le agregamos el triple de su número de grados sexagesimales y el quíntuple de su número de radianes resulta: $444+3\pi$. Halle la medida sexagesimal de dicho ángulo.

a) 18° b) 36° c) 72°
d) 108° e) 120°

11. Halle la medida radial del ángulo que cumple que:

$$\pi(C+S) = (C-S)\left(\frac{32R^2}{\pi} + \pi\right)$$

a) $\frac{3\pi}{4}$ rad b) $\frac{\pi}{3}$ rad c) $\frac{4\pi}{3}$ rad
d) $\frac{5\pi}{4}$ rad e) $\frac{4\pi}{5}$ rad

12. Si: $S = \frac{x^2}{27}$ ^ $C = \frac{10}{\sqrt{x}}$

Hallar "x", siendo S y C lo convencional para un mismo ángulo.

a) 2 b) 3 c) 4
d) 9 e) 11

13. Para un cierto ángulo se cumple que:

$$S = m^2 - \frac{1}{38} \ \wedge \ C = m^2 + \frac{1}{38}$$

Halle la medida circular de dicho ángulo, siendo S y C lo convencional para un ángulo.

a) $\frac{\pi}{19}$ rad b) $\frac{\pi}{38}$ rad c) $\frac{\pi}{190}$ rad
d) $\frac{\pi}{380}$ rad e) $\frac{\pi}{1900}$ rad

14. Siendo S, C y R lo convencional para un ángulo de modo que:

$$\frac{\sqrt{10SC}}{4S-3C} = \frac{\pi+R}{\pi-R}$$

Hallar: "R"

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{2\pi}{3}$
d) $\frac{5\pi}{6}$ e) $\frac{3\pi}{5}$

15. Si se cumple que: $(S + C)^\circ \langle\rangle \frac{19\pi}{45}$ rad. Siendo S y C lo convencional para un ángulo. Calcule la medida radial de dicho ángulo.

a) $\frac{\pi}{10}$ rad b) $\frac{\pi}{15}$ rad c) $\frac{\pi}{12}$ rad

d) $\frac{\pi}{5}$ rad e) $\frac{\pi}{3}$ rad

16. Si se cumple que: 40<S+C<120. Calcule el mayor ángulo entero en grados sexagesimales, siendo S y C lo convencional para un ángulo.

a) 27° b) 36° c) 45°

d) 54° e) 60°

17. Si se cumple que:

$$S = (x+3)(x-2)$$
$$C = (x+2)(x-1)$$

Siendo S y C lo convencional para un ángulo. Calcular la medida radial de dicho ángulo.

a) $\frac{\pi}{5}$ rad b) $\frac{\pi}{4}$ rad c) $\frac{\pi}{3}$ rad

d) $\frac{\pi}{2}$ rad e) π rad

18. Si: 17^g < > $x°y'$.

Calcule el valor de:

$$N = \frac{y+x}{y-x}$$

a) 3 b) 7 c) 9

d) 11 e) 15

19. Si se cumple que:

$$\sqrt[S]{C-S} = \sqrt[C]{C+S}$$

Calcular: $1+\sqrt[10]{C+S}$; siendo S y C lo conocido para un ángulo.

a) 9 b) 10 c) 19

d) 20 e) 21

20. Para un ángulo se cumple que:

S–2C+3S-4C+5S-6C+...–100C=–3000

Siendo S y C lo convencional; halle la medida radial de dicho ángulo.

a) $\frac{\pi}{20}$ rad b) $\frac{\pi}{10}$ rad c) $\frac{\pi}{5}$ rad

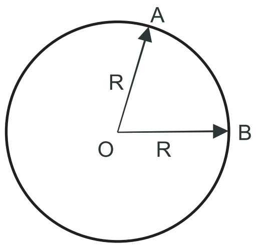
d) π rad e) 5π rad

CLAVES II				
1. e	2. e	3. d	4. e	5. c
6. d	7. c	8. a	9. c	10. d
11. a	12. d	13. d	14. c	15. d
16. d	17. a	18. d	19. d	20. a

Arco y Sector Circular

1. Arco

Una porción cualquiera de una circunferencia recibe el nombre de “Arco” de la circunferencia.



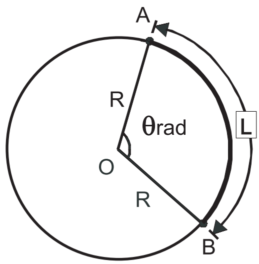
$\overset{\frown}{AB}$: Arco AB
A : Origen del Arco AB
B : Extremo del arco AB
O : Centro de la circunferencia
R : Radio de la circunferencia

a. Amplitud

Dada por la medida del ángulo central que subtiende el arco.

i. *LONGITUD DE ARCO*

En una circunferencia de radio “R” un ángulo central de “q” radianes determina una longitud de arco “L”, que se calcula multiplicando el número de radianes “q” y el radio de la circunferencia “R”.



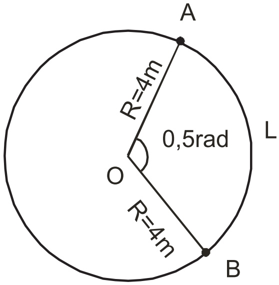
L : Longitud del Arco AB
R : Radio de la Circunferencia
q : Número de radianes del ángulo central (0<q≤2π)

$$\boxed{L = R \cdot q}$$

Ejemplos

Determine el perímetro de un sector circular AOB cuyo radio tiene por longitud 4m, y la amplitud del ángulo central es 0,5 radianes.

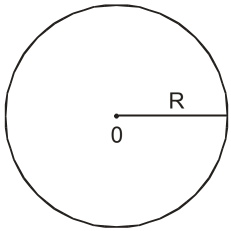
Resolución



$L = R \cdot \theta$
$L = 4 \cdot 0{,}5$
$L = 2$

El perímetro 2p del sector AOB será:
$2p = R + R + L$
$2p = 4m + 4m + 2m$
$2p = 10m$

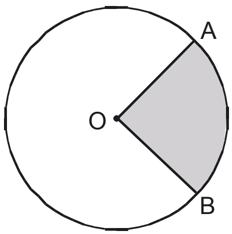
Nota
La longitud de la circunferencia se calcula multiplicando 2π por el radio "R" de la circunferencia (2πR).



$\boxed{L_C = 2pR}$

2. Sector Circular

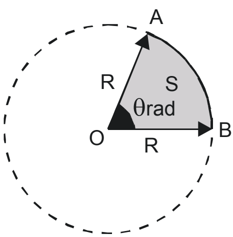
Se llama sector circular a la región circular limitada por dos radios y el arco correspondiente.



⊲ AOB: Sector Circular AOB

b. Área del sector circular

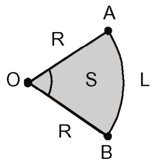
El área de un sector circular es igual al semiproducto de la longitud de su radio elevado al cuadrado y la medida de su ángulo central, en radianes; es decir:



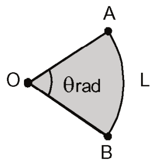
$$\boxed{S = \frac{R^2 \cdot \theta}{2}}$$

Donde:
S : Area del Sector circular AOB

Otras Fórmulas



$$S = \frac{L \cdot R}{2}$$

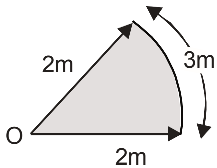


$$S = \frac{L^2}{2\theta}$$

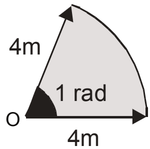
Ejemplos (1)

Calcular el valor del área de los sectores circulares mostrados en cada caso:

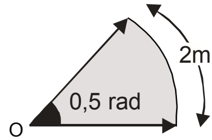
I.



II.



III.



Resolución

Caso I

$$S_I = \frac{L \cdot R}{2}$$

$$S_I = \frac{(3m) \cdot (2m)}{2}$$

$$\boxed{S_I = 3m^2}$$

Caso II

$$S_{II} = \frac{R^2\theta}{2}$$

$$S_{II} = \frac{(4m)^2 \cdot 1}{2}$$

$$\boxed{S_{II} = 8m^2}$$

Caso III

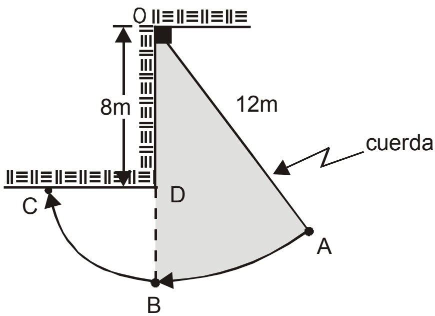
$$S_{III} = \frac{L^2}{2\theta}$$

$$S_{III} = \frac{(2\,m)^2}{2 \cdot 0,5}$$

$$\boxed{S_{III} = 4m^2}$$

Ejemplos (2)

De la figura mostrada, calcular el área de la región sombreada, si el arco $\overset{\frown}{ABC}$ tiene por longitud 4π m.

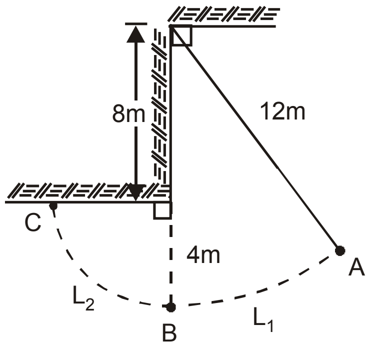


Resolución

Denotemos por:

L_1 : Longitud del arco $\overset{\frown}{AB}$, el radio $R_1 = 12$ m

L_2 : Longitud del arco $\overset{\frown}{BC}$, de radio $R_2 = 4$ m



De la figura

$$L_2 = R_2 \cdot \theta_2 = 4m \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$L_2 = 2\pi\ m$$

Según el dato:

$$\begin{aligned} L_{\overset{\frown}{AB}} + L_{\overset{\frown}{BC}} &= 4\pi m \\ L_1 + L_2 &= 4\pi m \\ L_1 + 2\pi &= 4\pi m \\ L_1 &= 2\pi m \end{aligned}$$

El área del sector AOB será

$$S_1 = \frac{L_1 \cdot R_1}{2} = \frac{2\pi m \cdot 12m}{2} = 12\pi m^2$$

Observaciones

1) El incremento de un mismo radio "R" en un sector circular inicial de área "S" (figura 1); produce un incremento de área proporcional a los números impares de "S", que el estudiante podría comprobar (figura 2).

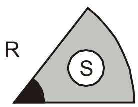


Fig. 1

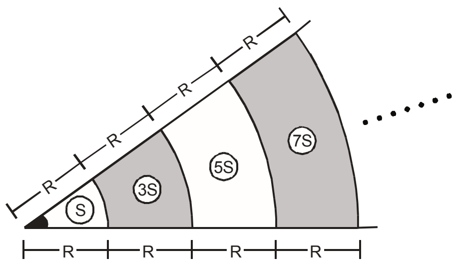
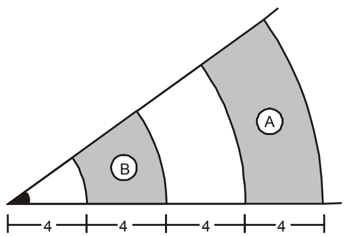


Fig. 2

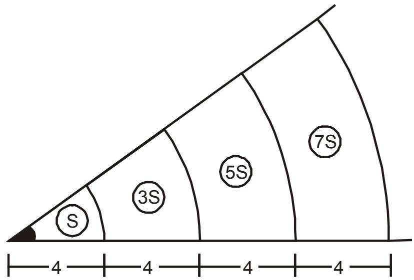
Ejemplos

Hallar el cociente de las áreas sombreadas "A" y "B" respectivamente.



Resolución

Recordando la observación:



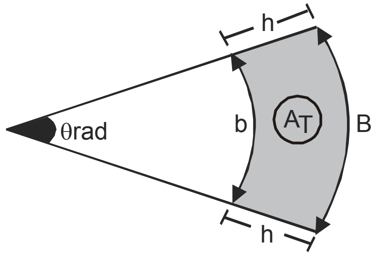
A = 7S

B = 3S

$$\frac{A}{B}=\frac{7}{3}$$

2. Área de un trapecio circular

- Se llama trapecio circular a aquella región circular formada por la diferencia de dos sectores circulares concéntricos.
- El área de un trapecio circular es igual a la semisuma de las longitudes de arcos que conforman al trapecio circular, multiplicada por su espaciamiento, es decir:



$$\boxed{A_T=\left(\frac{B+b}{2}\right)\bullet h}$$

Donde:

A_T = Área del trapecio circular

También: $\boxed{\theta=\frac{B-b}{h}}$

Ejemplos (1)

Calcular el valor del área del trapecio circular y encontrar la medida del ángulo central en la figura mostrada:

Resolución

$$A_T=\left(\frac{4+3}{2}\right)\bullet 2$$

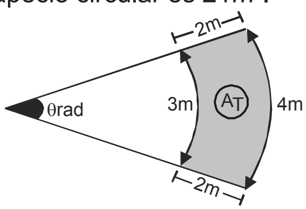
$$A_T = 7m^2$$

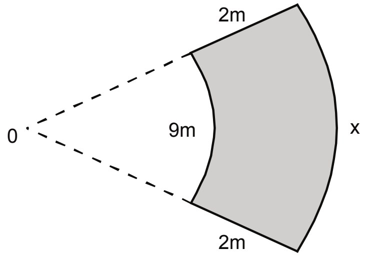
$$\theta=\frac{4-3}{2}$$

$$\theta=\frac{1}{2}=0{,}5$$

Ejemplos (2)

Hallar "x" si el área del trapecio circular es 21m².





Resolución

Por dato: $A_T = 21$

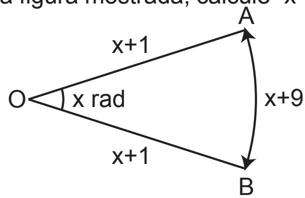
Por fórmula: $A_T = \dfrac{(x+9)}{2} \bullet 2 = x + 9$

Igualamos: $x + 9 = 21$

$x = 12$ m

Problemas I

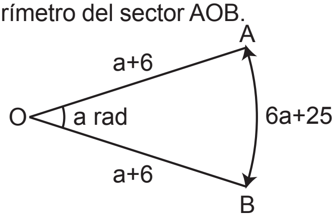
1. En la figura mostrada, calcule "x".



a) 3 b) 7 c) 9
d) 12 e) 15

2. Sí a un sector circular le duplicamos el ángulo central y a su radio le aumentamos 3m, se obtendrá un nuevo sector cuya longitud de arco es el quíntuple de la longitud del arco inicial. Determine el radio del sector inicial.
a) 1m b) 2m c) 3m
d) 4m e) 5m

3. Del gráfico mostrado, calcule el perímetro del sector AOB.

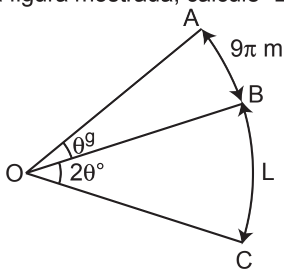


a) 22 b) 36 c) 55
d) 66 e) 77

4. Si a un sector circular le triplicamos su radio y a su ángulo central le añadimos 60°, se obtendrá un nuevo sector de longitud de arco igual al quíntuple de la longitud del arco inicial. Calcule el ángulo central del nuevo sector.

a) $\dfrac{2\pi}{3}$ rad b) $\dfrac{3\pi}{4}$ rad c) $\dfrac{4\pi}{3}$ rad
d) $\dfrac{3\pi}{2}$ rad e) $\dfrac{5\pi}{6}$ rad

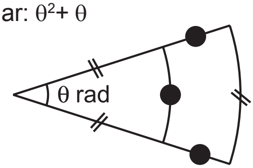
5. De la figura mostrada, calcule "L".



a) 10π m b) 15π m c) 20π m
d) 9π m e) 18π m

6. El ángulo central que subtiende un arco de radio 36 mide C rad, si se disminuye dicho ángulo hasta que mida S rad. ¿Cuánto debe aumentar el radio para que la longitud de dicho arco no varié? (S y C son lo convencional)
a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 10

7. Calcular: $\theta^2 + \theta$

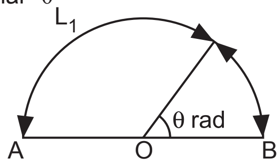


a) 1 b) 2 c) 3
d) 1/2 e) 1/3

8. Dos ángulos en el centro de una circunferencia son complementarios y las longitudes de los arcos que subtienden suman 4π m. Calcular la longitud del radio de la circunferencia.
a) 2m b) 4m c) 6m
d) 8m e) 10m

9. Se tiene un sector circular de 6 cm de radio y 12 cm de longitud de arco. Si el radio aumenta en 2 cm sin que el ángulo central varíe. ¿Cuál será la nueva longitud de arco?
a) 8 cm b) 10 cm c) 12 cm
d) 14 cm e) 16 cm

10. De la figura se cumple: $L_1 = 8L_2$; calcular "θ"

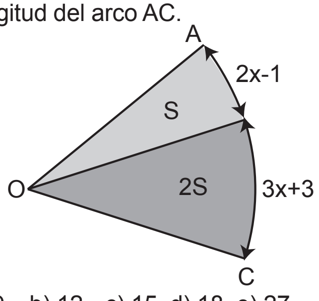


a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{8}$ d) $\frac{\pi}{7}$ e) $\frac{\pi}{9}$

11. Hallar el área de un sector circular cuyo ángulo central mide 1° y su radio mide 90 m.
a) 20π m² b) $\frac{45\pi}{2}$ m² c) 45π m²
d) 30π m² e) 15π m²

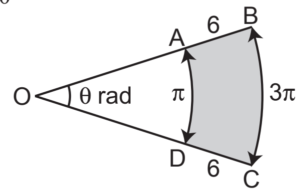
12. Si la longitud del arco de un sector circular es 15 m y la del radio es 6 m. Encontrar el área del sector
a) $40m^2$ b) $45m^2$ c) $90\ m^2$
d) $50\ m^2$ e) $55\ m^2$

13. Del gráfico mostrado, calcule la longitud del arco AC.



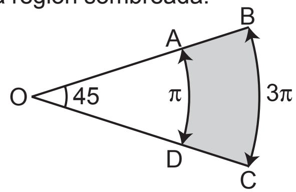
a) 9 b) 12 c) 15 d) 18 e) 27

14. Del gráfico mostrado, calcule el valor de "θ"



a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{4}$
d) $\frac{\pi}{6}$ e) $\frac{\pi}{9}$

15. Del gráfico mostrado, calcule el área de la región sombreada.

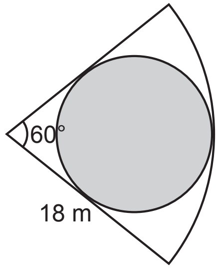


a) 4π u² b) 8π u² c) 16π u²
d) 12π u² e) 20π u²

16. El arco de un sector circular disminuye en un 20% y su radio aumenta en un 50%. ¿Cómo varía el área del sector?
a) Aumenta en un 10%
b) Disminuye 10%
c) Aumenta 20%
d) Disminuye 20%
e) Sigue igual

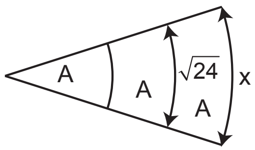
17. Se tiene un sector circular de radio R y un ángulo central de 36°. ¿Cuánto hay que aumentar al ángulo central de dicho sector para que el área no varíe, si su radio disminuye un cuarto del anterior?
a) 28° b) 26° c) 24°
d) 22° e) 20°

18. Calcular el área del círculo:



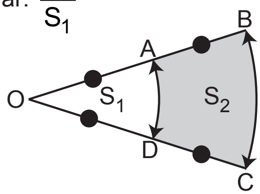
a) 36π m² b) 8π m² c) 16π m²
d) 12π m² e) 20π m²

19. A partir de la figura calcular "x". (A: Área)



a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 10

20. Calcular: $\dfrac{S_2}{S_1}$



a) 1 b) 2 c) 3
d) $\dfrac{1}{2}$ e) $\dfrac{1}{3}$

CLAVES I				
1. a	2. b	3. e	4. e	5. c
6. b	7. a	8. d	9. e	10. e
11. c	12. b	13. e	14. b	15. c
16. c	17. a	18. a	19. c	20. c

Problemas II

1. En un sector circular la longitud de su arco es 1 m. Si su ángulo central se aumenta en 10% y su radio se disminuye en 10%, se determina un nuevo sector circular cuya longitud del arco, en cms, es:
a) 0,99 b) 1 c) 10
d) 99 e) 100

2. Un péndulo oscila describiendo un ángulo cuya medida es 28° y un arco de longitud 66 cm. Encontrar la longitud del péndulo, en m.

(Considerar: $\pi = \dfrac{22}{7}$)
a) 0,135 b) 1,35 c) 13,5
d) 135 e) 1350

3. En un sector circular, el quíntuplo de la longitud de su radio es igual al cuadruplo de su longitud del arco respectiva; luego la medida de su ángulo central es:
a) 1 rad b) $0{,}40\pi$ rad
c) $1{,}25\pi$ rad d) 0,40 rad
e) 1,25 rad

4. Se tiene un sector circular de 6cm de radio y 12cm de longitud de arco. Si el radio aumenta 2cm sin que el ángulo varíe, ¿ Cuál será la nueva longitud de arco ?
a) 12 cm b) 14 cm c) 16 cm
d) 18 cm e) 20 cm

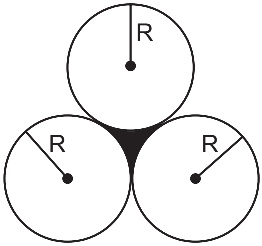
5. En un sector circular se conoce que su radio mide (x+1)cm, su longitud de arco 9(x–1)cm, y la medida de su ángulo central correspondiente (x^2-1) rad. Hallar el valor de "x".
a) 9 b) 4 c) 3
d) 2 e) 1

6. Determinar la longitud de una circunferencia, sabiendo que en ella un ángulo central que mide 20^g determina una longitud de arco igual a π u.
a) 100π u b) 100 u c) 10π u
d) 20 u e) 20π u

7. Las medidas de dos ángulos en el centro de una circunferencia son complementarias y las longitudes de los arcos que subtienden suman 4π m, luego la longitud del radio de la circunferencia es:

a) 2 m b) 4 m c) 6 m
d) 8 m e) 16 m

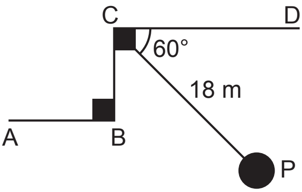
8. Calcular el perímetro de la región sombreada.



a) π R b) 2π R c) $\frac{\pi R}{2}$

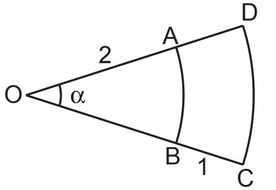
d) 3π R e) $\frac{2\pi R}{3}$

9. En el gráfico mostrado a continuación, calcula longitud total de la trayectoria descrita por una bola ubicada en "P", desde la posición mostrada hasta llegar a la pared AB. (BC=8 m)



a) 3π m b) 5π m c) 8π m
d) 11π m e) 13π m

10. En la figura, el perímetro del sector circular AOB es igual al del trapecio circular ABCD. Encontrar "α".



a) $\frac{2}{3}$ rad b) $\frac{3}{2}$ rad c) $\frac{1}{2}$ rad

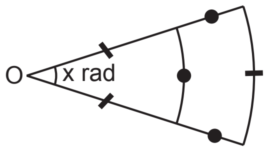
d) 1 rad e) 2 rad

11. Hallar el diámetro de la circunferencia en la cual un ángulo inscrito de 30° subtiende un arco con 11 m de longitud. (Usar π = 22/7)

a) 11 m b) 21 m c) 22 m
d) 42 m e) 44 m

12. Hallar a partir del gráfico:

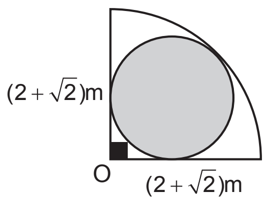
$$W = [x + 0,5]^2$$



a) 1 b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{5}{4}$

13. Calcular el área del círculo sombreado.



a) π m² b) 2π m² c) $\sqrt{2}\,\pi$ m²
d) 4π m² e) $2\pi^2$m²

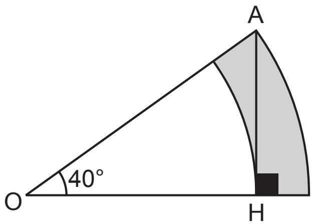
14. El área de un sector circular de radio “R” es $4\pi u^2$. ¿Cuál será el área de otro sector circular cuyo radio es "2R" y cuyo ángulo central es la mitad del anterior?

a) $\frac{\pi}{2}$ u² b) π u² c) 2π u²
d) 4π u² e) 8π u²

15. El ángulo central de un sector circular mide 36° y su radio es "R", si se disminuye en 11° el ángulo central. ¿Cuánto hay que aumentar el radio para que el área no varíe?.

a) $\frac{R}{5}$ b) $\frac{2R}{5}$ c) $\frac{3R}{5}$
d) $\frac{4R}{5}$ e) R

16. Hallar el área del trapecio circular sombreado, siendo: AH = 3u



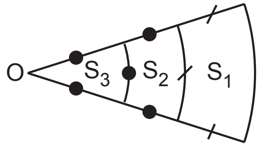
a) 1,57 u² b) 3,14 u² c) 4,71 u²
d) 6,28 u² e) 9,42 u²

17. El valor del área de un sector circular, es igual al producto del número de radianes de la medida de su ángulo central, la longitud de su radio y su longitud del arco respectiva, e igual a 9 u. Hallar su perímetro.

a) 27 u b) 24 u c) 18 u
d) 15 u e) 9 u

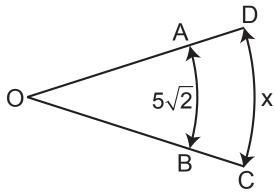
18. Hallar de la figura:

$$M = \frac{S_1 - S_2 - S_3}{S_2 + S_3}$$



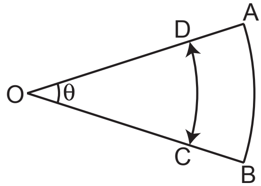
a) 2 b) ½ c) 4
d) ¼ e) 1

19. En el esquema adjunto determine el valor de “x”, si el área del sector AOB es igual al área del trapecio circular ABCD.



a) 50 b) 25 c) 20
d) 10 e) 5

20. Hallar “θ"; si: AD = BC = $\ell_{\overset{\frown}{CD}}$ = 2m, además el área del trapecio circular ABCD es 5 m².



a) 0,25 rad b) 0,5 rad c) 1 rad
d) 2 rad e) 4 rad

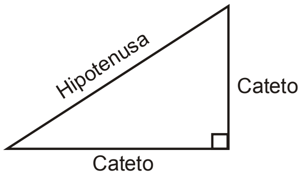
CLAVES II				
1. d	2. b	3. e	4. d	5. d
6. e	7. d	8. a	9. c	10. a
11. b	12. e	13. b	14. e	15. a
16. b	17. d	18. a	19. d	20. b

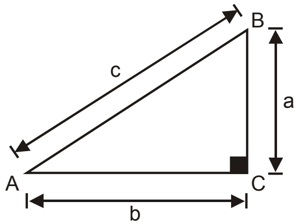
UNIDAD 3

Razones Trigonométricas de Ángulos Agudos I

Son aquellos números que resultan de dividir dos lados de un triángulo rectángulo.

Razón Trigonométrica





Teorema de Pitágoras

"La suma de cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa"

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Teorema

"Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios"

$$\boxed{\hat{A} + \hat{B} = 90^\circ}$$

Definición de las razones trigonométricas para un ángulo agudo

Dado el triángulo ABC, recto en "C", según la figura (1), se establecen las siguientes definiciones:

$$\text{Sen } \alpha = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{Cos } \alpha = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{Tan } \alpha = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}} = \frac{a}{b}$$

$$\text{Cot } \alpha = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Cateto Opuesto}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{Sec } \alpha = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Adyacente}} = \frac{c}{b}$$

$$\text{Csc } \alpha = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Opuesto}} = \frac{c}{a}$$

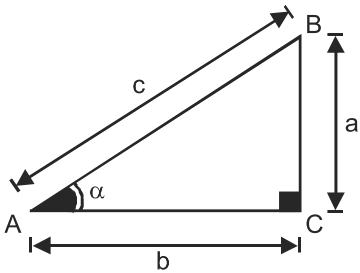


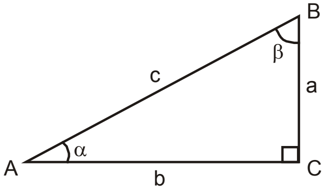
Fig. (1)

Ejemplo

En un triángulo rectángulo ABC ($\hat{C}$= 90°), se sabe que la suma de catetos es igual "k" veces la hipotenusa. Calcular la suma de los senos de los ángulos agudos del triángulo.

Resolución

Nótese que en el enunciado del problema tenemos:



$a + b = k \cdot c$

Nos piden calcular:

$$\text{Sen}\alpha + \text{Sen}\beta = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

Luego: $\text{Sen}\alpha + \text{Sen}\beta = \dfrac{k \bullet c}{c} = K$

Ejemplo

Los tres lados de un triángulo rectángulo se hallan en progresión arítmetica, hallar la tangente del mayor ángulo agudo de dicho triángulo.

Resolución

Nótese que dado el enunciado, los lados del triángulo están en progresión aritmetica, de razón "r" asumamos entonces:

Cateto menor = x - r
Cateto mayor = x
Hipotenusa = x + r

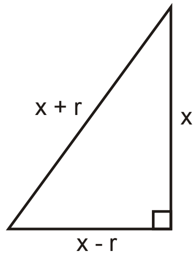


Fig. (A)

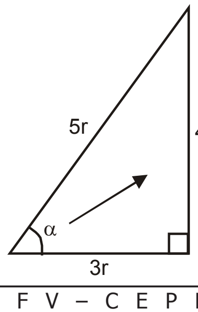
Teorema de Pitágoras

$$(x - r)^2 + x^2 = (x + r)^2$$
$$x^2 + 2xr + r^2 + x^2 = x^2 + 2xr + r^2$$
$$x^2 - 2xr = 2xr$$
$$x^2 = 4xr \qquad x = 4r$$

Importante

"A mayor cateto, se opone mayor ángulo agudo"; luego, reemplazando en la figura (A), tenemos:

Nos piden calcular: $\text{Tan}\alpha = \dfrac{4r}{3r} = \dfrac{4}{3}$



Ejemplo

Calcular el cateto menor de un triángulo rectángulo de 330 m de perímetro, si la tangente de uno de sus ángulos agudos es 2,4.

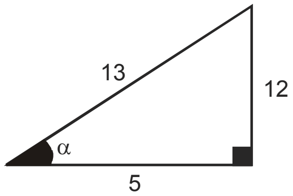
Resolución

1º Sea "α" un ángulo agudo del triángulo que cumpla con la condición:

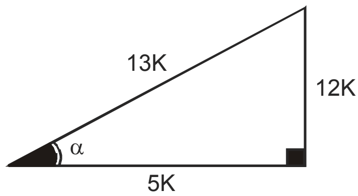
$$\text{Tan } \alpha = 2{,}4 = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$$

Ubicamos "α" en un triángulo rectángulo, cuya relación de catetos guardan la relación de 12 a 5.
La hipotenusa se calcula por pitágoras

Triángulo Rectángulo Particular   Triángulo Rectángulo General



$\Rightarrow$



2º El perímetro del triángulo rectángulo es:

Según la figura: $5K + 12K + 13K = 30\ K$

Según dato del enunciado: $= 330\ m$

Luego: $30K = 330$

$K = 11$

3º La pregunta es calcular la longitud del menor cateto es decir:

$$\begin{aligned} \text{Cateto} &= 5K \\ &= 5 \cdot 11\ m \\ &= 55\ m \end{aligned}$$

Propiedades de las Razones Trigonométricas

Razones Trigonométricas Recíprocas

"Al comparar las seis razones trigonométricas de un mismo ángulo agudo, notamos que tres pares de ellas al multiplicarse nos producen la unidad".

La parejas de las R.T. recíprocas son entonces:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Seno y Cosecante:} & \text{Sen}\alpha \bullet \text{Csc}\alpha = 1 \\ \text{Coseno y Secante:} & \text{Cos}\alpha \bullet \text{Sec}\alpha = 1 \\ \text{Tangente y Cotangente:} & \text{Tan}\alpha \bullet \text{Cot}\alpha = 1 \end{array}\right\} \text{Nótese: "ángulos iguales"}$$

Ejemplo

Indicar la verdad de las siguientes proposiciones:

I. $Sen20^\circ \bullet Csc10^\circ = 1$

II. $Tan35^\circ \bullet Cot50^\circ = 1$

III. $Cos40^\circ \bullet Sec40^\circ = 1$

Resolución

Nótese que en las parejas de razones trigonométricas recíprocas el producto es “1”; siempre que sean ángulos iguales.

Luego: $Sen20^\circ \bullet Csc10^\circ \neq 1$; sus ángulos NO son iguales

$Tan30^\circ \bullet Cot50^\circ \neq 1$; sus ángulos NO son iguales

$Cos40^\circ \bullet Sec40^\circ = 1$; sus ángulos SI son iguales

I) F II) F III) V

Ejemplo

Resolver “x”. Ángulo agudo que verifique:

$$Tan(3x + 10^\circ + \alpha) \bullet Cot(x + 70^\circ + \alpha) = 1$$

Resolución

Nótese que en la ecuación intervienen, razones trigonométricas recíprocas; luego los ángulos son iguales.

$$Tan(3x + 10^\circ + \alpha) \bullet Cot(x + 70^\circ + \alpha) = 1$$

ANGULOS IGUALES

$$3x + 10^\circ + \alpha = x + 70^\circ + \alpha$$

$$2x = 60^\circ$$

$$x = 30^\circ$$

Ejemplo

Se sabe: $Sen\theta \bullet Cos\theta \bullet Tan\theta \bullet Cot\theta \bullet Sec\theta = \frac{3}{7}$

Calcular:

$$E = Cos\theta \bullet Tan\theta \bullet Cot\theta \bullet Sec\theta \bullet Csc\theta$$

Resolución

Recordar:

$$Cos\theta \bullet Sec\theta = 1$$

$$Tan\theta \bullet Cot\theta = 1$$

$$Sec\theta \bullet Csc\theta = 1$$

Luego, reemplazando en la condición del problema:

$$Sen\theta \bullet \underbrace{Cos\theta \bullet Tan\theta \bullet Cot\theta \bullet Sec\theta}_{1} = \frac{3}{7}$$

$$Sen\theta = \frac{3}{7} \quad ... (I)$$

Nos piden calcular:

$$E = \underbrace{Cos\theta \bullet Tan\theta \bullet Cot\theta \bullet Sec\theta \bullet}_{1} Csc\theta$$

$$E = Csc\theta = \frac{1}{Sen\theta}\ ,\ \text{ pero de (I) tenemos: } Sen\theta = \frac{3}{7}$$

$$E = \frac{7}{3}$$

Razones trigonométricas de ángulos complementarios

“Al comparar las seis razones trigonométricas de ángulos agudos, notamos que tres pares de ellas producen el mismo número, siempre que su ángulos sean complementarios”.

NOTA:

“Una razón trigonométrica de un ángulo es igual a la co-razón del ángulo complementario.”

RAZÓN	***CO-RAZÓN***
Seno	Coseno
Tangente	Cotangente
Secante	Cosecante

Dado: $\alpha + \beta = 90^o$, entonces se verifica:

$Sen\alpha = Cos\beta$
$Tan\alpha = Cot\beta$
$Sec\alpha = Csc\beta$

Así por ejemplo:

A) $\underbrace{Sen20^o = Cos70^o}_{\text{SUMAN } 90^o}$

B) $\underbrace{Tan50^o = Cot40^o}_{\text{ANGULOS COMPLEMENTARIOS}}$

C) $\underbrace{Sec80^o = Csc10^o}_{\text{SUMAN } 90^o}$

Ejemplo

Indicar el valor de verdad según las proposiciones:

I. $Sen80^o = Cos20^o$

II. $Tan45^o = Cot45^o$

III. $Sec(80^o - x) = Csc\,(10^o + x)$

Resolución

Nótese que dada una función y cofunción serán iguales al evaluar que sus ángulos sean complementarios.

I. $\underbrace{Sen80º \neq Cos20º}_{\text{Porque suman } 100°}$; Sin embargo: $\underbrace{Sen80º = Cos10º}_{\text{Suman } 90°}$

II. $\underbrace{Tan45º = Cot45º}_{\text{Suman } 90°}$

III. $Sec(\underbrace{80º - x) = Csc (10º + x}_{\text{Suman } 90°})$

Ejemplo

Resolver el menor valor positivo de "x" que verifique:

$$Sen5x = Cosx$$

Resolución

Dada la ecuación sen5x = Cosx; luego los ángulos deben sumar 90º entonces:

$$\begin{aligned} 5x + x &= 90º \\ 6x &= 90º \\ x &= 15º \end{aligned}$$

Ejemplo

Resolver "x" el menor positivo que verifique:

$$\begin{aligned} Sen3x - Cosy &= 0 \\ Tan2y \bullet Cot30º - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Resolución

Nótese que el sistema planteado es equivalente a:

Sen3x = Cosy   3x + y = 90º   (R.T. ángulos complementarios)

Tan2y • Cot30º = 1   2y = 30º   (R.T. recíprocas)

De la segunda igualdad: y = 15º

Reemplazando en la primera igualdad:

$$\begin{aligned} 3x + 15º &= 90 \\ 3x &= 75º \\ x &= 25º \end{aligned}$$

Ejemplo

Se sabe que "x" e "y" son ángulos complementarios, además:

$$\begin{aligned} Senx &= 2t + 3 \\ Cosy &= 3t + 4{,}1 \end{aligned}$$

Hallar: Tan x

Resolución

Dado: $x + y = 90º$ Senx = Cosy

Reemplazando: $2t + 3 = 2t + 4,1$

$-1,1 = t$

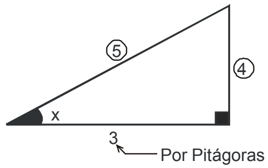
Conocido "t", calcularemos: $\text{Senx} = 2(-1,1) + 3$

$\text{Senx} = 0,8$

$\text{Senx} = \dfrac{4}{5}$ ... (I)

Nota:

Conocida una razón trigonométrica, luego hallaremos las restantes; graficando la condición (I) en un triángulo rectángulo, tenemos:

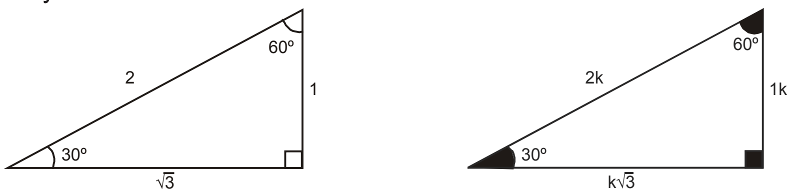


$$\text{Tanx} = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}} = \frac{4}{3}$$

Razones trigonométricas en ángulos notables

I. Triángulos rectángulos notables exactos

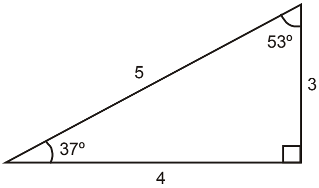
* 30º y 60º

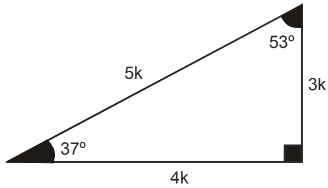


* 45º y 45º

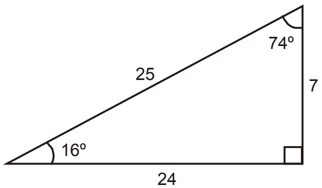
II. Triángulos rectángulos notables aproximados

* 37º y 53º





* 16º y 74º



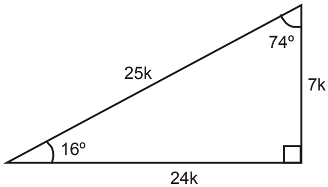


Tabla de las razones trigonométricas de ángulos notables

R.T. \ ∡	30º	60º	45º	37º	53º	16º	74º
Sen ∡	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$3/5$	$4/5$	$7/25$	$24/25$
Cos ∡	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$4/5$	$3/5$	$24/25$	$7/25$
Tan ∡	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$	1	$3/4$	$4/3$	$7/24$	$24/7$
Cot ∡	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$	1	$4/3$	$3/4$	$24/7$	$7/24$
Sec ∡	$2\sqrt{3}/3$	2	$\sqrt{2}$	$5/4$	$5/3$	$25/24$	$25/7$
Csc ∡	2	$2\sqrt{3}/3$	$\sqrt{2}$	$5/3$	$5/4$	$25/7$	$25/24$

Ejemplo

Calcular:

$$F = \frac{4 \bullet \text{Sen}30º + \sqrt{3} \bullet \text{Tan}60º}{10 \bullet \text{Cos}37º + \sqrt{2} \bullet \text{Sec}45º}$$

Resolución

Según la tabla mostrada notamos:

$$F = \frac{4 \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{10 \cdot \frac{4}{5} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$$

$$F = \frac{2+3}{8+2} = \frac{5}{10}$$

$$F = \frac{1}{2}$$

Ejemplo

Sea: $$F(\theta) = \frac{\text{Sen}3\theta \bullet \text{Cos}6\theta \bullet \text{Csc}\left(\frac{9\theta}{2}\right)}{\text{Tan}3\theta \bullet \text{Sec}6\theta \bullet \text{Cot}\left(\frac{9\theta}{2}\right)}$$

Evaluar para: $\theta = 10º$

Resolución

Reemplazando $\theta = 10º$ en "$F(\theta)$ tenemos:

$$F(10º) = \frac{\text{Sen}30º \bullet \text{Cos}60º \bullet \text{Csc}45º}{\text{Tan}30º \bullet \text{Sec}60º \bullet \text{Cot}45º}$$

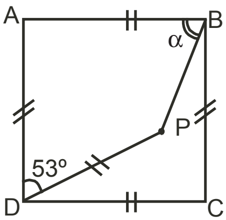
Reemplazando sus valores notables tenemos:

$$F(10º) = \frac{\frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} \bullet \sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3} \bullet 2 \bullet 1}$$

$$F(10º) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{8\sqrt{3}}$$

Racionalizando: $$F(10º) = \frac{\sqrt{6}}{8}$$

Ejemplo



Si ABCD es un cuadrado calcular "Tanα"

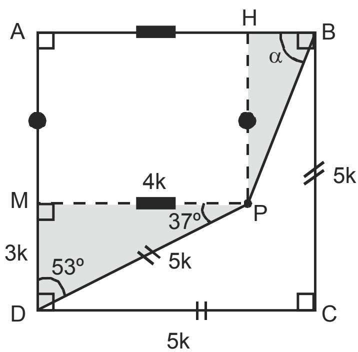
Resolución

Como "α" no está en un triángulo rectángulo:
Luego, efectuaremos trazos de modo que "α" y 53º estén en triángulo rectángulo.

De la figura:

⊿PMD: notable de 37º y 53º, luego suponemos DP = 5k.

Como: DP = BC = 5k



Luego el lado del cuadrado mide 5K

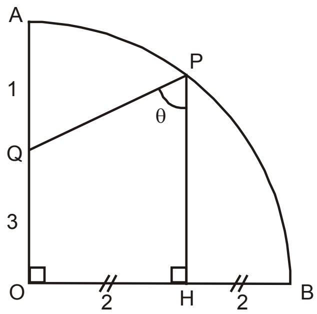
- Sumando: PH + MD = AD
  PH + 3K = 5K
  PH = 2K

- Sumando: PM + HB = AB
  4K + HB = 5K
  HB = K

- Finalmente: $\text{Tan}\alpha = \dfrac{PH}{HB} = \dfrac{2K}{K} = 2$

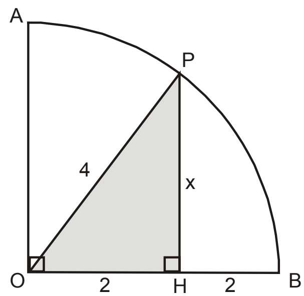
Ejemplo

En la figura mostrada "O" es el centro del cuadrante AOB, hallar "Cotθ"



Resolución

Construimos un triángulo rectángulo OPH; luego aplicando el teorema de Pitágoras



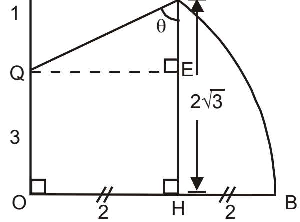
$$x = 2\sqrt{3}$$

En la figura inicial trazamos QE ⊥ PH

$PE = 2\sqrt{3} - 3$

$QE = 2$

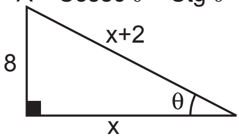
$$\text{Cot}\,\theta = \frac{PE}{QE} = \frac{2\sqrt{3}-3}{2}$$



Problemas I

1. De la figura, calcular:

$$A = \text{Cosec}\,\theta - \text{Ctg}\,\theta$$



a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{1}{6}$

2. En triangulo rectángulo la tangente de uno de los ángulos agudos es el triple de la tangente de su complemento; calcular el coseno del mayor ángulo agudo.

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{1}{6}$

3. Calcular “x” (agudo), si se cumple:

$$\text{Sen}\left(\frac{7x+1^\circ}{2}\right)\ \text{Tg}\,50^\circ\cdot\text{Cosec}(x+13^\circ)\cdot\text{Ctg}\,40^\circ=1$$

a) 1° b) 3° c) 5°
d) 7° e) 9°

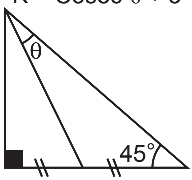
4. Calcular:

$$A = \frac{\text{Tg}10^\circ\cdot\text{Tg}80^\circ+\text{Tg}^2 60^\circ}{\text{Sen}50^\circ\cdot\text{Sec}40^\circ-\text{Sen}30^\circ}$$

a) 1 b) 2 c) 4
d) 8 e) 16

5. Del gráfico, calcular:

$$K = \text{Cosec}^2\theta + 3$$



a) 15 b) 14 c) 13
d) 12 e) 11

6. En un triangulo rectángulo de perímetro 60 m, calcular su área, si el coseno de uno de los ángulos agudos es 0,8.

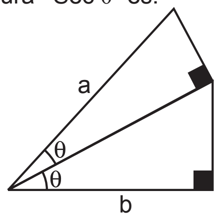
a) 120 m² b) 130 m² c) 140 m²
d) 150 m² e) 160 m²

7. Si se cumple:
$\text{Sen}28^\circ\cdot\text{Sec}\,\theta = 7\text{Cos}62^\circ-4\text{Sen}28^\circ$;
$0^\circ<\theta<90^\circ$
Calcula:

$$K = \text{Sec}\,45^\circ\,(\text{Tg}\,\theta + 3\,\text{Sen}\,\theta)$$

a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 10

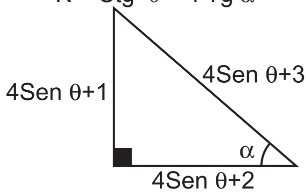
8. De la figura “'Sec θ" es:



a) $\sqrt{\frac{a}{b}}$ b) $\sqrt{ab}$ c) $\sqrt{\frac{1}{ab}}$
d) $\sqrt{\frac{b}{a}}$ e) $\sqrt{\frac{2a}{b}}$

9. De la figura calcular:

$$K = \text{Ctg}^2\,\theta + 4\,\text{Tg}\,\alpha$$



a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 6

10. Calcular “x” (agudo)
$\text{Sen}(3x+y+10^\circ)\cdot\text{Sec}(2x-y+30^\circ)=2\text{Cos}\,60^\circ$

a) 10° b) 20° c) 30°
d) 15° e) 25°

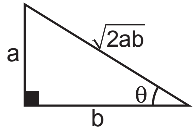
11. Si:
$2\text{Sen}\theta+\text{Cosec}\,\theta = 3$; $0^\circ < \theta < 90^\circ$
Calcular:

$$K = 6\text{Cos}\,2\theta + \text{Ctg}^2\theta$$

a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 10

12. De la figura, calcular:

$$K = Ctg(\theta - 15°) + Tg\frac{\theta}{3}$$



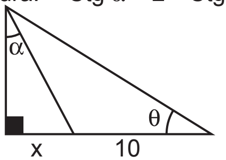
a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

13. Si:
$Tg\,x - Sen\,30° = 0$; $0° < x < 90°$ ^
$Cosec\,y = Tg\,60° \cdot Cosec\,x$; $0° < y < 90°$
Calcular:

$$A = Sec45° \cdot Ctgy - \sqrt{Cosec^2 x + Sec60°}$$

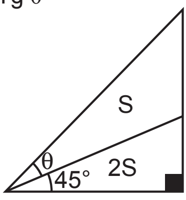
a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{6}$
d) $\sqrt{7}$ e) $\sqrt{10}$

14. En la figura: $Ctg\,\alpha = 2$ ^ $Ctg\,\theta = 3$



Calcular "x".
a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

15. En la figura: S = Área.
Calcular: $Tg\,\theta$



a) 1 b) 2 c) 5
d) 1/5 e) 4

16. En un triangulo ABC (recto en B) se cumple:
$4Tg\,A \cdot Ctg\,C = Sen\,A \cdot Sec\,C$
Calcular:

$$K = \sqrt{5} \cdot Cosec\,A + Tg\,C$$

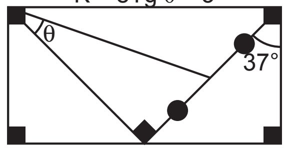
a) 3 b) 5 c) 7
d) 9 e) 11

17. Dado un triangulo rectángulo ABC. Si:
$Sec\,A + Ctg\,C = 5$
Calcular:

$$K = \sqrt{15(Cosec\,C - TgA) + 1}$$

a) l b) 2 c) ±1
d) ±2 e) 4

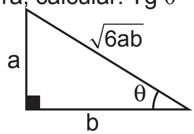
18. En la figura, calcular:
$K = 8Tg\,\theta - 3$



a) 1 b) 2 c) 1/2
e) 0 e) –1

19. Dado un triángulo ABC, la expresión:
$K = a(1+Cos\,B) + b(1+Cos\,A)$
representa:
a) Área
b) Doble del área
c) Perímetro
d) Doble del perímetro
e) Semiperimetro

20. En la figura, calcular: $Tg\,\theta$



a) $2\sqrt{2}+1$ b) $2(\sqrt{2}+1)$ c) $2\sqrt{2}+3$
d) $2(\sqrt{2}+2)$ e) $2\sqrt{2}+5$

CLAVES I				
1. c	2. a	3. c	4. d	5. c
6. d	7. d	8. a	9. e	10. a
11. c	12. b	13. d	14. b	15. d
16. c	17. b	18. d	19. c	20. c

Problemas II

1. Si: $\dfrac{Sen\,x}{\sqrt{2}} = 0{,}333\ldots$ ^

$$\frac{Cos\,y}{\sqrt{7}} = 0{,}2$$

("x" e "y" son ángulos agudos)

Calcular:

$$H = \frac{TanY \cdot CotX + CosX \cdot SecY}{CscY \cdot CscX - CotY \cdot CotX}$$

a) $\frac{7}{2}$ b) $\frac{2}{7}$ c) $\frac{1}{7}$
d) 7 e) $\sqrt{7}$

2. En un triángulo rectángulo ABC (recto en A). Hallar "Tg C", si se verifica la relación:

$$\frac{CscB - SenB}{SecB - CosB} = 8$$

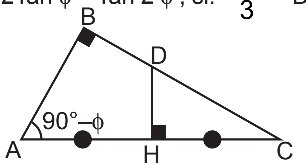
a) 1 b) 2 c) 8
d) 1/2 e) 1/8

3. Calcular el perímetro de un triángulo rectángulo, cuya área es 7,5 cm², si el valor de la tangente trigonométrica de uno de sus ángulo agudos es 5/12.
a) 12 cm b) 13 cm c) 15 cm
d) 24 cm e) 30cm

4. La altura desigual de un triángulo isósceles mide 15 cm; siendo su perímetro 50 cm, calcular el coseno de uno de sus ángulos iguales.

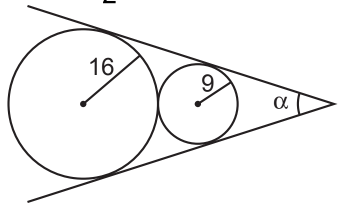
a) $\frac{15}{17}$ b) $\frac{17}{15}$ c) $\frac{17}{8}$
d) $\frac{8}{17}$ e) $\frac{8}{15}$

5. De la figura mostrada, calcular:
W = 2Tan ϕ – Tan 2 ϕ , si: $\frac{CD}{3}$ = BD



a) 0 b) $\sqrt{2}$ c) $-\sqrt{2}$
d) $2\sqrt{2}$ e) $-2\sqrt{2}$

6. Hallar "Sen $\frac{\alpha}{2}$" del gráfico siguiente:



a) $\frac{24}{25}$ b) $\frac{7}{24}$ c) $\frac{25}{7}$
d) $\frac{25}{24}$ e) $\frac{7}{25}$

7. Encontrar "x" a partir de la relación:

$$\frac{Sen(3x - 20°) \cdot Csc40°}{Tan(10° + x)} = \frac{Cos(2x + 30°) \cdot Sec50°}{Cot(80° - x)}$$

a) 16° b) 8° c) 18°
d) 9° e) 20°

8. Hallar "x" e "y" del sistema:
Sec(4x+y)–Csc(y–x) = 0 ...(i)
$\frac{Tan(5x - y)}{Cot(2y + x)} = 1$ ...(ii)
a) x = 5° ; y = 35°
b) x = 10° ; y = 30°
c) x = 30° ; y = 10°
d) x = 15° ; y = 25°
e) x = 25° ; y = 15°

9. Si: 2A+2B = $\frac{\pi}{3}$ rad y $\frac{C}{2} + \frac{D}{2} = 25^g$.
Calcular:
M= Sen 3A – Cot 2D + Tan 2C – Cos 3B
a) 0 b) 1 c) 2
d) 4 e) F.D.

10. Reducir:

$$H = \frac{Sen^5 15° \cdot Csc^3 15° + Cos^6 15° \cdot Sec^4 15°}{\sqrt[3]{Tan^2 15°} \cdot \sqrt[3]{Cot^2 15°}}$$

a) 1 b) 2
c) 2sen²15° d) 2Cos²15°
e) 1/2

11. Si:
$[Sen^2\phi]^{Sec\phi}=[Csc^3\phi]^{-Cos\,\phi}$; $0°<\phi<90°$.
Calcular el valor de:
$$P=[Tan^3\phi]^{Cot^2\phi}$$

a) $\sqrt[4]{8}$ b) $\dfrac{1}{4}$ c) 4
d) $\dfrac{1}{8}$ e) 8

12. Si: $Ctg[2x+10^g]\cdot Ctg[11°+5x]=1$; halle “x”.

a) $\dfrac{\pi}{20}$ rad b) $\dfrac{\pi}{18}$ rad c) $\dfrac{\pi}{10}$ rad
d) $\dfrac{\pi}{9}$ rad e) $\dfrac{\pi}{2}$ rad

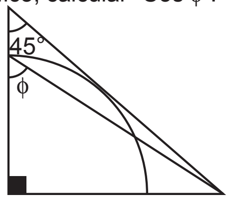
13. Siendo “ϕ" y "β" las medidas de dos ángulos agudos y complementarios indicar la alternativa incorrecta:
a) $\dfrac{Sen\phi}{Cos\beta}=1$
b) $Cos\,\beta-Sen\,\phi=0$
c) $Sen\,\phi\cdot Sec\,\beta=1$
d) $Tg\,\beta\cdot Ctg\,\phi=1$
e) $Cos\,\phi\cdot Csc\,\beta-1=0$

14. Calcular el valor de:
$$Q=\frac{\sqrt{Sen^2 30°+0{,}5Csc^4 60°+6^{-2}Sec^3\left(\frac{\pi}{3}\right)}}{Cot^4\left(\frac{\pi}{6}\right)+Sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right)+3Tan\,37°\cdot Tan\,53°}$$

a) 1 b) $\dfrac{1}{12}$ c) $\dfrac{1}{14}$
d) 12 e) 14

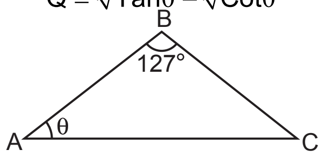
15. En un triángulo ABC, si:
$A=\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ rad ; $B=50^g$ y $AB=\sqrt{18}$
Calcular el lado “b”.
a) $2\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{2}$ c) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$
d) $2\sqrt{2}$ e) $2\sqrt{3}$

16. Del gráfico, calcular “Cos ϕ”.



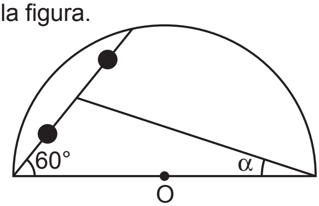
a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
d) $\sqrt{3}$ e) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

17. En el triángulo ABC mostrado, si: 5AB = 6BC; calcular el valor de:
$$Q=\sqrt{Tan\theta}-\sqrt{Cot\theta}$$



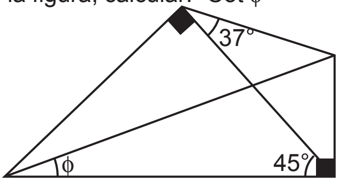
a) $\dfrac{6}{5}$ b) $-\dfrac{6}{5}$ c) $\dfrac{5}{6}$
d) $-\dfrac{5}{6}$ e) 1

18. Encontrar “Tan α” de la semi-circunferencia de centro “O” mostrada en la figura.



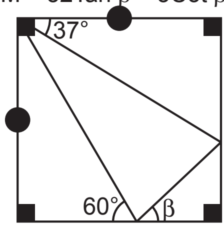
a) $\dfrac{1}{7}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}}{7}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$
d) $\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$ e) $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

19. En la figura, calcular: "Cot ϕ"



a) $\frac{3}{7}$ b) $\frac{4}{7}$ c) $\frac{7}{3}$
d) $\frac{7}{4}$ e) 7

20. De la figura mostrada, hallar:
$M = 32\text{Tan}\,\beta + 3\text{Cot}\,\beta$



a) $4\sqrt{3}$ b) 12 c) $8\sqrt{3}$
d) 24 e) 35

CLAVES II				
1. a	2. b	3. c	4. d	5. c
6. e	7. a	8. b	9. a	10. a
11. d	12. b	13. d	14. b	15. e
16. c	17. d	18. b	19. c	20. d

UNIDAD 4

Razones Trigonométricas del Ángulos Agudos II

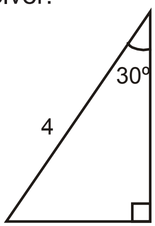
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

¿Qué es resolver un triángulo rectángulo?

Resolver un triángulo rectángulo es calcular sus lados si se conocen un lado y un ángulo agudo.

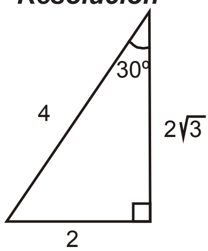
Ejemplo

Resolver:



$\Rightarrow$

Resolución



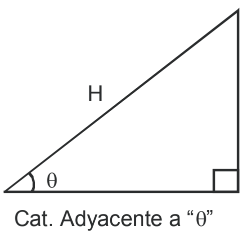
Cálculo de lados

Para calcular lados, vamos a aplicar tres propiedades que a continuación deducimos:

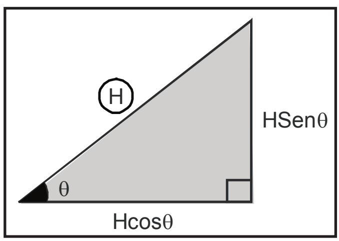
Conocida la hipotenusa (H) y un Ángulo agudo (q):

$$\text{Sen}\theta = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} \qquad \text{Cateto Opuesto} = \text{Hipotenusa} \bullet \text{Sen}\theta$$

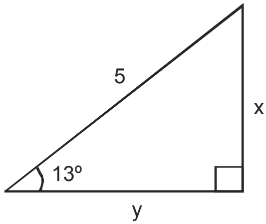
$$\text{Cos}\theta = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}} \qquad \text{Cateto Adyacente} = \text{Hipotenusa} \bullet \text{Cos}\theta$$



$\Rightarrow$



Luego afirmamos de la figura:

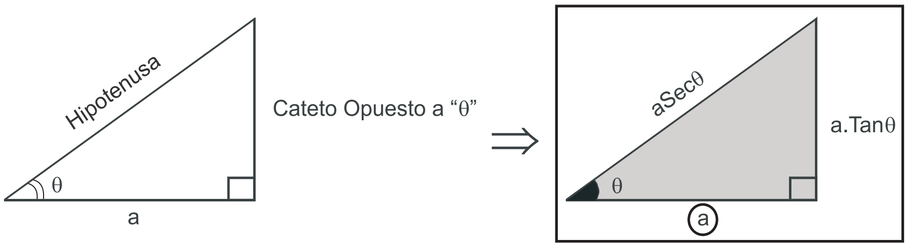


$$\begin{cases} \text{Cateto opuesto} = x = 5\text{Sen }13° \\ \text{Cateto adyacente} = y = 5\text{Cos }13° \end{cases}$$

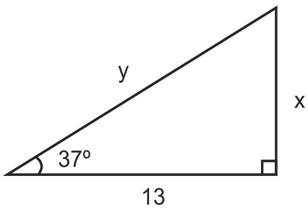
Conociendo un cateto adyacente (a) y un Ángulo agudo (θ):

$$\text{Tan}\theta = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}} \qquad \text{Cateto Opuesto} = \text{Cateto Adyacente} \cdot \text{Tan}\theta$$

$$\text{Sec}\theta = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Adyacente}} \qquad \text{Hipotenusa} = \text{Cateto Adyacente} \cdot \text{Sec}\theta$$



Así por ejemplo en la figura mostrada afirmamos:

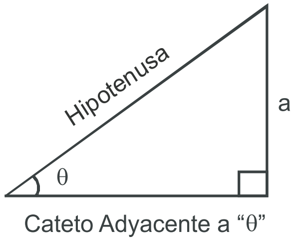


$$\begin{cases} \text{Cateto Opuesto} = x = 13\text{Tan}37° = 13 \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{39}{4} \\ \text{Hipotenusa} \quad = y = 13\text{Sec}37° = 13 \cdot \dfrac{5}{4} = \dfrac{65}{4} \end{cases}$$

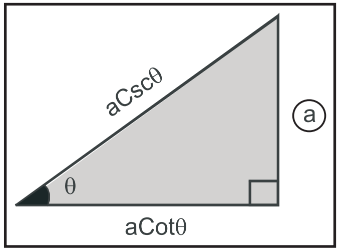
Conociendo un cateto opuesto (a) y un Ángulo agudo (θ)

$$\text{Cot}\theta = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Cateto Opuesto}} \qquad \text{Cateto Adyacente} = \text{Cateto Opuesto} \cdot \text{Cot}\theta$$

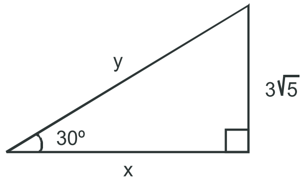
$$\text{Csc}\theta = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Opuesto}} \qquad \text{Hipotenusa} = \text{Cateto Opuesto} \cdot \text{Csc}\theta$$



$\Rightarrow$



En base a lo estudiado afirmamos:

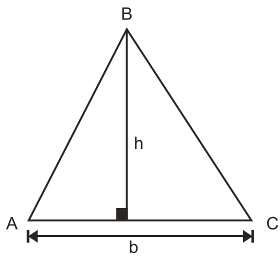


$$\begin{cases} \text{Cateto Adyacente} = x = 3\sqrt{5} \bullet \text{Cot}30^\circ = 3\sqrt{5} \bullet \sqrt{3} = 3\sqrt{15} \\ \text{Hipotenusa} = y = 3\sqrt{5} \bullet \text{Csc}30^\circ = 3\sqrt{5} \bullet 2 = 6\sqrt{5} \end{cases}$$

Área de la región triangular

Conocida la base y altura

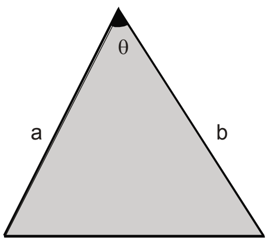
El área de una región triángular se calcula multiplicando la base (un lado) por su altura (relativa al lado) dividido entre dos:



$$\boxed{\text{ÁREA}_{\Delta} = \frac{b \bullet h}{2}}$$

Conocidos dos lados y ángulos entre ellos

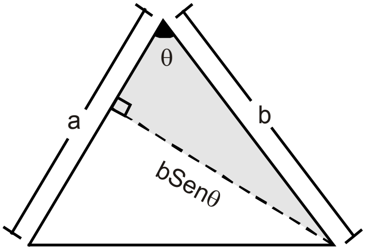
El área de de una región triángular se calcula multiplicando dos lados y el seno del ángulo entre ellos dividido entre dos.



$$\boxed{\text{AREA}_{\Delta} = \frac{a \bullet b}{2}\text{Sen}\theta}$$

Demostración

Usando un trazo auxiliar notamos en la figura que la altura mide “bSenθ”



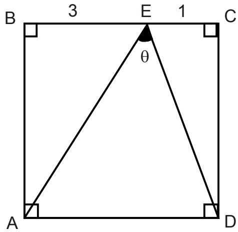
Sabemos:

$$AREA_{\Delta} = \frac{BASE \bullet ALTURA}{2}$$

$$AREA_{\Delta} = \frac{a \bullet bSen\theta}{2} \qquad \text{L.q.q.d}$$

Ejemplo (1)

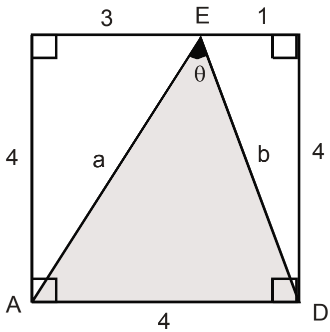
En la figura mostrada ABCD es un cuadrado calcular “Senθ”.



Resolución

Por el Teorema de Pitágoras: $a = 5$

$b = \sqrt{17}$



Cálculo del área de la región triángular AED.

* $\text{Área DAED} = \frac{\text{Base} \bullet \text{Altura}}{2} = \frac{4 \bullet 4}{2}$

** $\text{Área DAED} = \frac{a \bullet b}{2} Sen\theta = \frac{5 \bullet \sqrt{17}}{2} Sen\theta$

Igualando (*) y (**) tenemos:

$$\text{Area } \Delta AED = \text{Área } \Delta AED$$

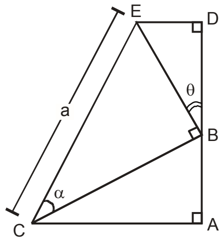
$$\frac{5\sqrt{17}}{2}\ Sen\ \theta = \frac{4 \bullet 4}{2} \qquad Sen\ \theta = \frac{16}{5\sqrt{17}} = \frac{16\sqrt{17}}{85}$$

Nota:

Recuerde que el cálculo del área será una herramienta importante; para el cálculo de la R.T. Seno.

Ejemplo (2)

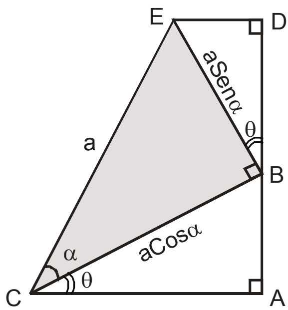
Halle AB en función de "a"; "α" y "θ"



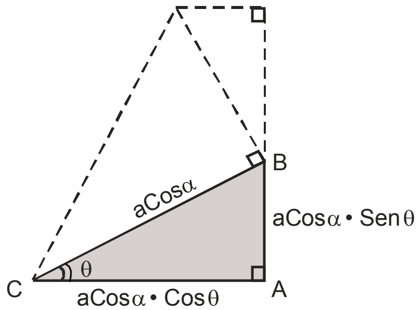
Resolución

Por resolución del triángulo rectángulo.

⊿ CBE: conocida la hipotenusa CE y "α"



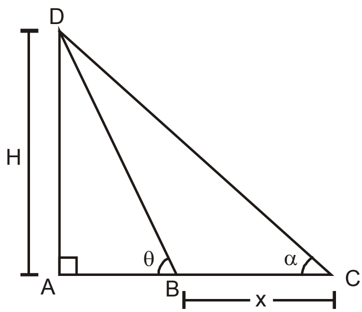
⊿ BAC:Conocida la hipotenusa CB y "θ"



AB = aCosα • Senθ

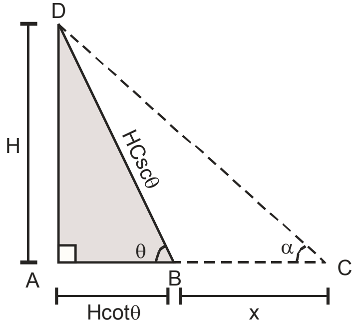
Ejemplo (3)

Calcular "x" en la siguiente figura:

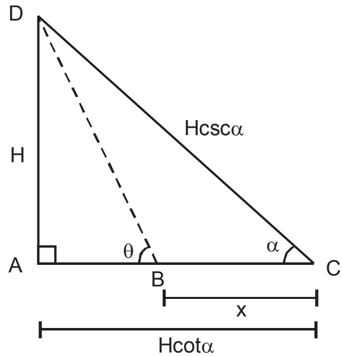


Resolución

⊿ BAD: Conocido "H" y "θ"



⊿ CAD: Conocido "H" y "α"



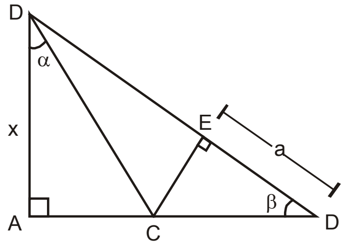
AC = BC

Luego: HCot α + x = HCot α

x = H(Cot α – Cot θ)

Ejemplo (4)

Hallar "x" en función de "a", "α" y "β"



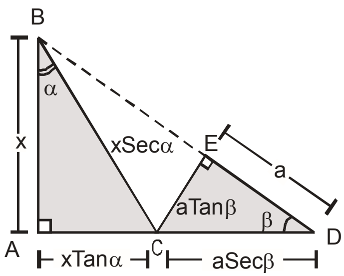
Resolución

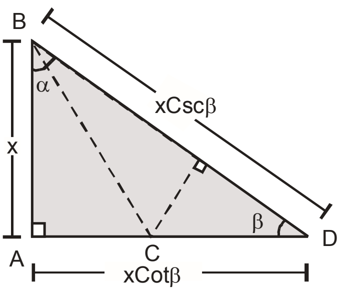
Aplicando resolución de triángulos rectángulos

a) ⊿ BAC: Conocidos "x" y "α"

⊿ BAD: Conocidos "x" y "β"

b) ⊿ CED: Conocidos "a" y "α"



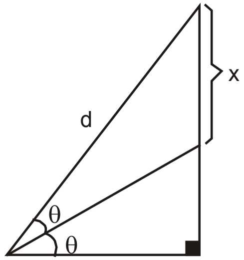


$$\begin{aligned} AD &= AD \\ x\text{Tan}\alpha + a\text{Sec}\beta &= x\text{Cot}\beta \\ a\text{Sec}\beta &= x\text{Cot}\beta - x\text{Tan}\alpha \end{aligned}$$

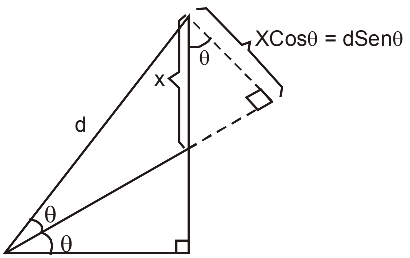
$$x = \frac{a\text{Sec}\beta}{\text{Cot}\beta - \text{Tan}\alpha}$$

Ejemplo (5)

Hallar "x" en función "d" y "θ"



Resolución



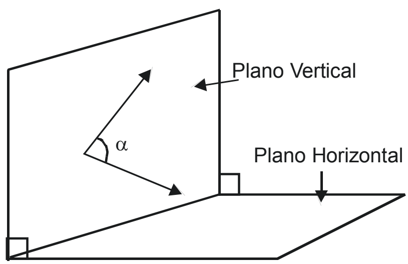
$x\text{Cos}\theta = d\text{Sen}\theta$ $\qquad x = d\dfrac{\text{Sen}\theta}{\text{Cos}\theta}$

$x = d\text{Tan}\theta$

Ángulo Vertical

Un ángulo se llama vertical, si está contenido en un plano vertical. Por ejemplo, "α" es un ángulo vertical en la siguiente figura:

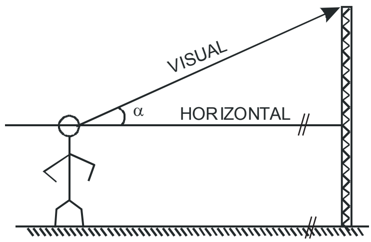
Los ángulos verticales se clasifican en:



Ángulo de elevación (α)

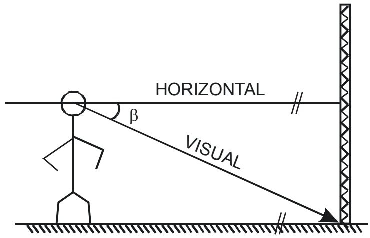
Es un ángulo vertical que está formado por una línea horizontal que pasa por el ojo del observador y su visual que se encuentra por encima de ésta.

A continuación ilustraremos con un gráfico los términos expresados.



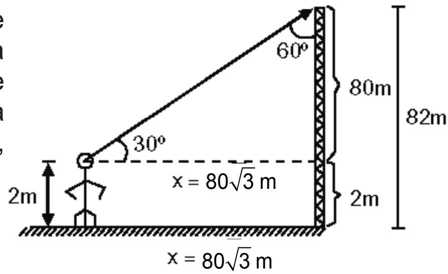
Ángulo de depresión (β)

Es un ángulo vertical que está formado por una línea horizontal que pasa por el ojo del observador y su línea visual que se encuentra debajo de ésta.



Ejemplos

1. Una persona de dos metros de estatura observa la parte más alta de una torre con un ángulo de elevación de 30º. ¿A qué distancia se encuentra de la base de la torre, si ésta mide 82 m?



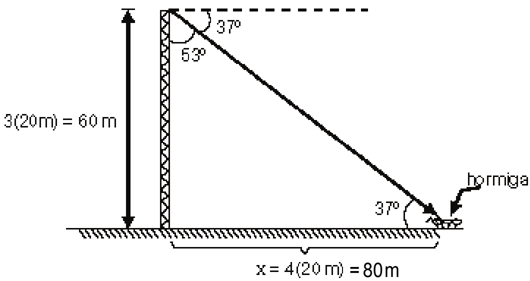
Resolución

La distancia pedida es $80\sqrt{3}$ m

2. Desde la parte más alta de una torre de 60 m. de longitud se observa a una hormiga con un ángulo de depresión de 37º. ¿A qué distancia de la base de la torre se encuentra la hormiga?

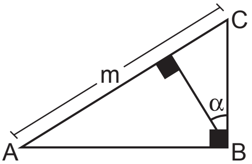
Resolución

La hormiga se encuentra a una distancia de 80 m



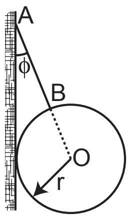
Problemas I

1. Calcular el perímetro del ΔABC mostrado, en función de "m" y "α".



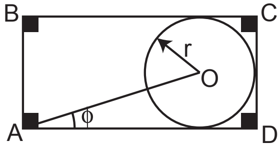
a) $m(1+\text{Sen }\alpha+\text{Cos }\alpha)$
b) $m(\text{Sen }\alpha+\text{Cos }\alpha)$
c) $m\text{Sen }\alpha-\text{Cos }\alpha$
d) $m(1+\text{Sen }\alpha)$
e) $m(1+\text{Cos }\alpha)$

2. Hallar la longitud del cable AB que sostiene la esfera de centro "O"; considere "r" y "ϕ" como datos.



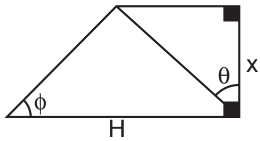
a) $r(\text{Csc }\phi+1)$
b) $r(\text{Csc }\phi-1)$
c) $r\text{Csc }\phi$
d) $r(1-\text{Csc }\phi)$
e) $\dfrac{r(\text{Csc}\phi+1)}{2}$

3. Indicar función de "r" y "ϕ", el perímetro del rectángulo ABCD mostrado.



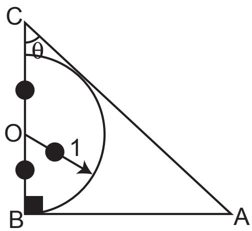
a) $3r(2+\text{Cot }\phi)$
b) $2r(3+\text{Cot }\phi)$
c) $2r(1+\text{Cot }\phi)$
d) $2r(3+\text{Tan }\phi)$
e) $3r(2+\text{Tan }\phi)$

4. En la figura siguiente, hallar "x" en términos de "H", "ϕ" y "θ".



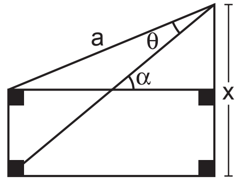
a) $\dfrac{H}{\text{Cot}\phi+\text{Tan}\theta}$
b) $H(\text{Cot }\phi+\text{Tan }\theta)$
c) $\dfrac{H}{\text{Tan}\phi+\text{Cot}\theta}$
d) $H(\text{Tan }\phi+\text{Cot }\theta)$
e) $\dfrac{H}{\text{Tan}\phi-\text{Cot}\theta}$

5. Calcular $\overline{AB}$ en la figura.



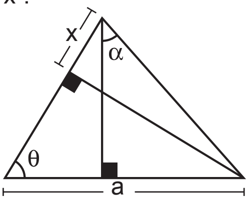
a) $\text{Tg }\theta(\text{Sec }\theta+1)$
b) $\text{Tg }\theta(\text{Sec }\theta-1)$
c) $\text{Ctg }\theta(\text{Sec }\theta+1)$
d) $\text{Tg }\theta(\text{Csc }\theta+1)$
e) $\text{Ctg }\theta(\text{Csc }\theta-1)$

6. Hallar "x"



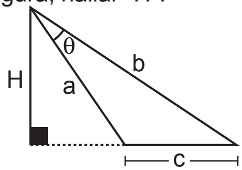
a) $a\text{Cos}(\alpha-\theta)\text{Tg }\alpha$
b) $a\text{Cos}(\alpha-\theta)\text{Ctg }\alpha$
c) $a\text{Cos}(\theta-\alpha)\text{Tg }\theta$
d) $a\text{Cos}(\theta-\alpha)\text{Ctg }\alpha$
e) $a\text{Cos}(\theta+\alpha)\text{Tg }\alpha$

7. Hallar "x".



a) $aSen\theta\ Tg(\theta+\alpha)$
b) $aSen\theta\ Tg(\theta-\alpha)$
c) $aSen\theta\ Tg(\alpha-\theta)$
d) $aSen\theta\ Ctg(\theta-\alpha)$
e) $aSen\theta\ Ctg(\alpha+\theta)$

8. De la figura, hallar "H".

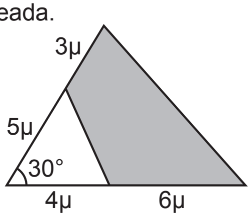


a) $\dfrac{ab}{c}$ Sen θ b) $\dfrac{ac}{b}$ Sen θ

c) $\dfrac{bc}{a}$ Sen θ d) $\dfrac{2ab}{c}$ Sen θ

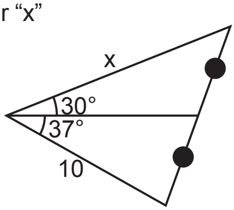
e) $\dfrac{2ac}{b}$ Sen θ

9. Calcular el área de la región sombreada.



a) 10 μ² b) 15 μ² c) 20 μ²
d) 30 μ² e) 35 μ²

10. Calcular "x"



a) 8 b) 10 c) 12
d) 14 e) 15

11. Una persona ubicada en la parte más alta de un edificio observa a dos puntos opuestos a ambos lados del edificio con ángulos de depresión de 37° y 53°. Si los puntos distan entre sí 20 metros, hallar la suma de las visuales.
a) 20 m b) 22 m c) 24 m
d) 26 m e) 28 m

12. Desde un punto en el suelo se observa la parte más alta de una torre con un ángulo de elevación de 60°, si se retrocede 40 m y se vuelve a observar la parte más alta, el ángulo de elevación es de 30°. Hallar la altura de la torre.

a) $20\sqrt{3}$ m b) $10\sqrt{3}$ m c) 30 m

d) $15\sqrt{3}$ m e) 10 m

13. Una persona se dirige a un edificio, y observa lo alto del mismo bajo un ángulo de elevación "x"; después de caminar 10 m observa la misma altura con un ángulo de elevación "θ". Si la altura del edificio es 30 m, hallar:

$$W = Tg\ x\left(Tg\theta + \frac{1}{3}\right)$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

14. Una persona colocada a 36 m de una torre, observa su parte más alta con un ángulo de elevación "α" ($Tg\ \alpha = \dfrac{7}{12}$). ¿Qué distancia habría que alejarse para que el ángulo de elevación sea θ?

Donde: $Tg\ \theta = \dfrac{1}{4}$

a) 12 m b) 13 m c) 48 m
d) 15 m e) 20 m

15. Un avión vuela horizontalmente a una altura constante, antes de pasar sobre dos puntos en tierra "A" y "B" los observa con ángulos de depresión de 45° y 37° respectivamente. Cuando está sobre "B" es visto desde "A" con un ángulo de elevación "α".
¿Cuánto vale Tg α?
a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 6

16. Desde lo alto de un edificio se ve un punto en tierra con un ángulo de depresión "α", y a otro punto ubicado a la mitad entre el primer punto y el edificio con un ángulo de depresión "$90°-\alpha$". Calcular "Ctg α".

a) $\sqrt{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $2\sqrt{2}$
d) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ e) 1

17. Un avión que inicialmente se encuentra a 2700 m de altura, sobre un objeto, empieza a caer con un ángulo de 37° por debajo de la línea horizontal, avanzando 500 m luego retoma su posición horizontal avanzando una distancia "x" y el piloto observa el objeto con un ángulo de depresión de 45°. Calcular "x".

a) 2400 m b) 1800 m
c) $2400\sqrt{2}$ d) $2100\sqrt{2}$
e) 2000 m

18. Desde el décimo piso de un edificio de 16 pisos, se observa un punto en el suelo con un ángulo de depresión "θ". De la azotea del edificio se observa el mismo punto con un ángulo de depresión igual al complemento de θ. Hallar: Ctg θ.

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{3}$ c) 1
d) $\frac{4}{3}$ e) $\frac{5}{3}$

19. Desde un punto se observa la parte más alta de un edificio con un ángulo de elevación "θ", si después de avanzar las 2/3 partes de la distancia original que separaba al observador del pie del edificio, el ángulo de elevación fue el complemento de "θ". Calcular "θ".

a) 15° b) 45° c) 60°
d) 30° e) 22°30'

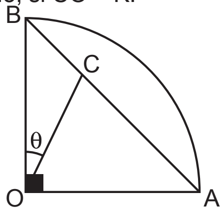
20. Un avión que vuela a una altura constante de 6000 m pasa sobre una ciudad, 2 minutos después es visto desde la ciudad, con un ángulo de elevación de 37°, ¿cuál es la velocidad constante del avión en km/h?

a) 480 b) 120 c) 960
d) 240 e) 360

CLAVES I				
1. a	2. b	3. b	4. a	5. d
6. a	7. b	8. a	9. b	10. c
11. e	12. a	13. a	14. c	15. c
16. a	17. e	18. d	19. d	20. d

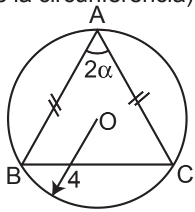
Problemas II

1. Hallar el radio del cuadrante AOB mostrado, si $\overline{CO} = K$.



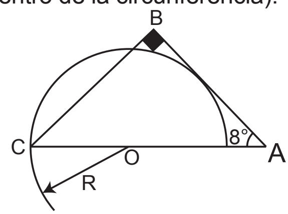
a) K(Sec θ + Cos θ)
b) K(Sec θ + Csc θ)
c) K(Sen θ + Cos θ)
c) K(Sen θ + Csc θ)
e) K·Sen θ · Cos θ

2. En la circunferencia mostrada hallar el lado BC, conocidos "α" y "4". (O: Centro de la circunferencia).



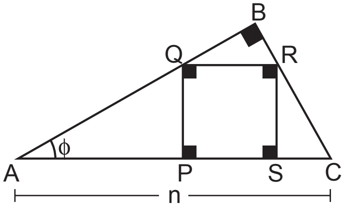
a) 2Sen 2α b) 4Cos 2α c) 4Sen 2α
d) 8Cos 2α e) 8Sen 2α

3. Determinar AB conocidos. "R" y "8°". (O: Centro de la circunferencia).



a) R(1+Sen 8°)
b) R(Cos 8º+Ctg8°)
c) R(1+Csc 8°)
d) R(Cos 8° + Tg 8°)
e) R(Sec 8°+Ctg8°)

4. Hallar el lado del cuadrado PQRS inscrito en el triángulo rectángulo ABC.



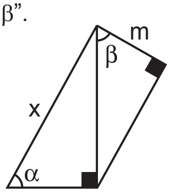
a) $n(\text{Tg}.\phi + \text{Ctg}\ \phi + 1)^{-1}$
b) $n(\text{Tg}.\phi + \text{Ctg}\ \phi + 1)$
c) $n(\text{Tg}.\phi + \text{Ctg}\ \phi)^{-1}$
d) $n(\text{Tg}.\phi + \text{Ctg}\ \phi)$
e) $n(\text{Tg}.\phi + \text{Ctg}\ \phi - 1)$

5. El inradio de un triángulo ABC vale "r", siendo "I" su incentro. Hallar:

$$W = AI+BI+CI$$

a) $r(\text{Sen}\frac{A}{2} + \text{Sen}\frac{B}{2} + \text{Sen}\frac{C}{2})$
b) $r(\text{Sen}\,A+\text{Sen}\,B+\text{Sen}\,C)$
c) $r(\text{Sec}\frac{A}{2} + \text{Sec}\frac{B}{2} + \text{Sec}\frac{C}{2})$
d) $r(\text{Csc}\frac{A}{2} + \text{Csc}\frac{B}{2} + \text{Csc}\frac{C}{2})$
e) $r(\text{Csc}\,A+\text{Csc}\,B+\text{Csc}\,C)$

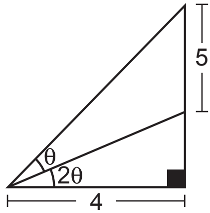
6. En la figura hallar "x" en términos de "m", "α" y "β".



a) $m\text{Csc}\,\alpha \cdot \text{Sen}\,\beta$
b) $m\text{Cos}\,\alpha \cdot \text{Sen}\,\beta$
c) $m\text{Sec}\,\alpha \cdot \text{Csc}\,\beta$
d) $m\text{Sen}\,\alpha \cdot \text{Cos}\,\beta$
e) $m\text{Csc}\,\alpha \cdot \text{Sec}\,\beta$

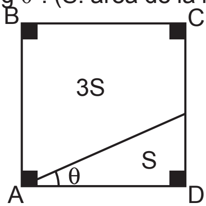
7. Hallar de la figura:

$$P = \frac{\text{Sen}\theta \cdot \text{Sec}2\theta}{\text{Cos}3\theta}$$



a) 0,80 b) 1,00 c) 1,25
d) 1,60 e) 2,50

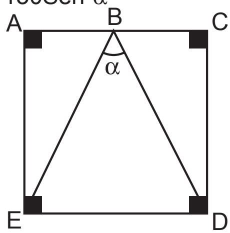
8. En la figura, ABCD es un cuadrado, hallar: "Tg θ". (S: área de la región)



a) 1 b) 2 c) $\frac{1}{2}$ d) 3 e) $\frac{1}{3}$

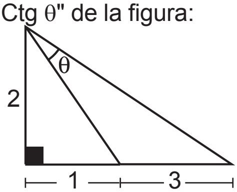
9. En la figura, si: $AB = \frac{BC}{2} = \frac{CD}{3}$

Hallar: "130Sen²α"



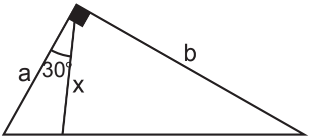
a) 81 b) 27 c) 9
d) 3 e) 1

10. Hallar "Ctg θ" de la figura:



a) 3/4 b) 4/3 c) 3/5
d) 4/5 e) 5/4

11. Hallar "x" del triángulo rectángulo mostrado a continuación:



a) $x = \dfrac{2ab}{a + b\sqrt{3}}$ b) $x = \dfrac{2ab}{a\sqrt{3} + b}$

c) $x = \dfrac{ab}{a + b\sqrt{3}}$ d) $x = \dfrac{ab}{a\sqrt{3} + b}$

e) $x = \dfrac{2ab}{a + b}$

12. Un niño de 100cm de estatura mira un OVNI con un ángulo de elevación de 45°. Luego el OVNI pasa sobre el niño volando a una altura constante y es visto nuevamente ahora con un ángulo de elevación de 53°. Si la distancia horizontal entre la primera y segunda observación fue de 182 m. Hallar a que altura volaba el OVNI.

a) 104 m b) 105 m c) 106 m
d) 204 m e) 183 m

13. Un mono se encuentra a 24 m de altura en el tronco de una palmera, y ve a una mona que está en el suelo con un ángulo de depresión de 53°. Luego, ambos se dirigen en forma simultánea hacia la base la palmera, y cuando la mona ha avanzado la mitad de la distancia que la separaba de la palmera inicialmente mira al mono con un ángulo de elevación de 45°; entonces la distancia que los separa en ese instante es:

a) $\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$ m b) 9 m c) $9\sqrt{2}$ m

d) $18\sqrt{2}$ m e) 18 m

14. La elevación angular de la parte superior de una torre vista desde el pie de un poste es de 60°, y desde la parte superior del poste, que tiene 30 m de altura, el ángulo de elevación mide 30°. Luego la altura de la torre es:

a) 15 m b) 30 m c) 45 m
d) 60 m e) 75 m

15. Dos personas de estaturas “H” y “h” (H>h) se encuentran paradas frente a frente separadas una cierta distancia. La persona de menos estatura observa la cabeza de la otra persona con un ángulo de elevación α y sus pies con un ángulo de depresión "β". Hallar: "H/h".

a) $1+\text{Tg}\,\alpha \cdot \text{Tg}\,\beta$
b) $1+\text{Tg}\,\alpha \cdot \text{Ctg}\,\beta$
c) $1+\text{Ctg}\,\alpha \cdot \text{Tg}\,\beta$
d) $1+\text{Ctg}\,\alpha \cdot \text{Ctg}\,\beta$
e) $1+\text{Sen}\,\alpha \cdot \text{Cos}\,\beta$

16. La estatura de un hombre es l,68 m. Observa su sombra a las 2 de la tarde, asumiendo que amanece a las 6 de la mañana y que él sol sigue una trayectoria circular sobre el hombre. ¿Cuánto mide su sombra aproximadamente?

a) 79 cm b) 48 cm c) 97 cm
d) 84 cm e) 63 cm

17. Un ratón observa el borde superior de un muro con un ángulo de elevación de 37°; luego avanza 28 m acercándose al muro en línea recta y, lo vuelve a observar con un ángulo de elevación de 53°. Si el ratón tarda 3 segundos en llegar a la base del

muro desde su segunda posición, determine la velocidad constante en m/seg con que se desplaza el roedor.

a) 18 b) 16 c) 14
d) 12 e) 10

18. Desde lo alto de un faro a 15m sobre el nivel del mar se observa una boya con un ángulo de depresión cuya tangente es 3/2; desde la base del faro a 8 m sobre el nivel del mar se vuelve a observar la boya, con un ángulo de depresión "θ".
Calcule el valor de "Tg θ"

a) 5/4 b) 4/5 s) 3/4
d) 4/3 e) 3/5

19. Cuando observamos una torre desde un punto en el terreno distante 2 m más que su altura el ángulo de elevación mide "α", pero si se observa de otro punto en el terreno distante 2 m menos que su altura el ángulo de elevación mide "2α". Luego la altura de la torre es:

a) $\sqrt{7}$ m b) ($\sqrt{6}$ –1) m
c) ($\sqrt{7}$ –1) m d) ($\sqrt{6}$ +1) m
e) ($\sqrt{7}$ +1) m

20. Desde dos puntos "P" y "Q" situados al Sur y al Este de un poste de luz se observa su foco con ángulos de elevación que son complementarios. Si la distancia PQ es igual al triple de la altura del poste, y uno de los ángulos de elevación mencionados mide "θ". Hallar:

$$W = \text{Tg}\,\theta + \text{Ctg}\,\theta$$

a) 1 b) 3 c) 9
d) $\sqrt{11}$ e) $\sqrt{7}$

CLAVES II				
1. c	2. e	3. b	4. a	5. d
6. e	7. c	8. c	9. a	10. b
11. a	12. b	13. c	14. c	15. b
16. c	17. d	18. b	19. e	20. d

UNIDAD 5

Razones trigonométricas de ángulos de cualquier magnitud

Ángulo en posición normal

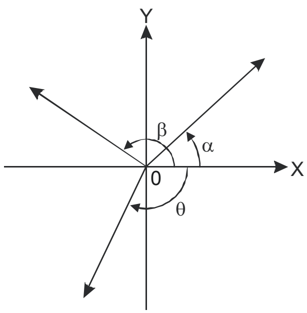
Un ángulo trigonométrico está en POSICIÓN NORMAL si su vértice está en el origen de coordenadas y su lado inicial coincide con el lado positivo del eje x.

Si el lado final está en el segundo cuadrante, el ángulo se denomina ÁNGULO DEL SEGUNDO CUADRANTE, y análogamente para los otros cuadrantes.

Si el lado final coincide con un eje se dice que el ÁNGULO NO PERTENECE A NINGÚN CUADRANTE.

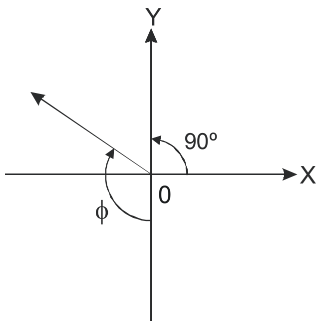
Ejemplo

1.



α I
β II
θ III

2.

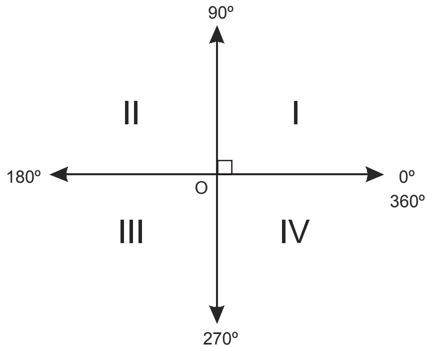


90º a ningún cuadrante
φ no está en posición normal

Ángulo cuadrantal

Un ángulo en posición normal se llamará CUADRANTAL cuando su lado final coincide con un eje. En consecuencia no pertenece a ningún cuadrante.

Los principales ángulos cuadrantes son: 0º, 90º, 180º, 270º y 360º, que por "comodidad gráfica" se escribirán en los extremos de los ejes.



Propiedad

Si θ es un ángulo en posición normal positivo y menor que una vuelta entonces se cumple:

Si	θ	I	0	<	θ	<	90º
Si	θ	II	90º	<	θ	<	180º
Si	θ	III	180º	<	θ	<	270º
Si	θ	IV	270º	<	θ	<	360º

Ejemplos

1. Si θ III. ¿En que cuadrante está 2θ/3?

Resolución

Si: θ III

$$180º < \theta < 270º$$

$$60º < \frac{\theta}{3} < 90º$$

$$120º < \frac{2\theta}{3} < 180º$$

Como 2θ/3 está entre 120º y 180º, entonces pertenece al II cuadrante.

2. Si α II, a qué cuadrante pertenece $\frac{\alpha}{2} + 70º$

Resolución

Si α II.

$$90º < \alpha < 180º$$

$$45º < \frac{\alpha}{2} < 90º$$

$$115º < \frac{\alpha}{2} + 70º < 160º$$

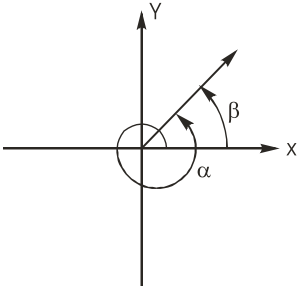
Como α/2 + 70º está entre 115º y 160º, entonces pertenece al II cuadrante.

Ángulos coterminales

Dos ángulos en posición normal se llamarán COTERMINALES o COFINALES si tienen el mismo lado final.

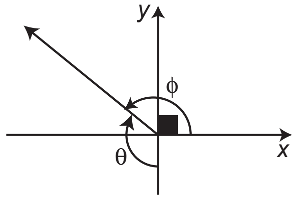
Ejemplos

1.



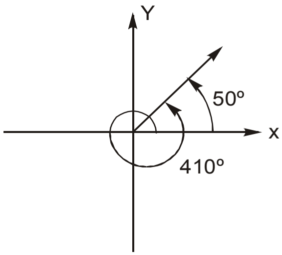
α β son coterminales

2.

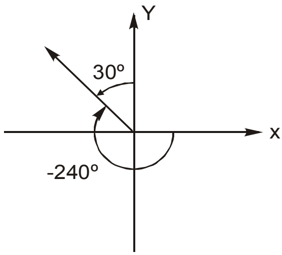


φ q no son coterminales

3.



4.



Propiedad

La diferencia de las medidas de dos ángulo coterminales siempre nos dará como resultado un número entero positivo de vueltas.

Si α β son coterminales tal que α > β entonces se cumple:

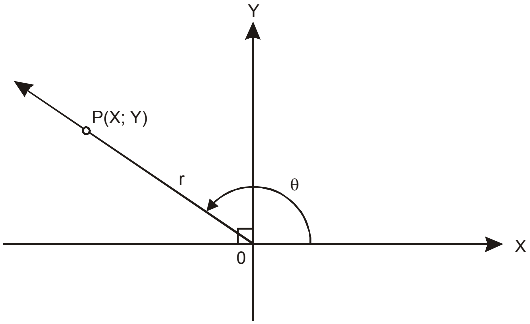
$$\boxed{\alpha - \beta = k(360^\circ)} \quad k \quad \mathbb{Z}^+$$

Ejemplos

1. 750º y 30º coterminales porque 750º – 30º = 720º (2 vueltas)
2. 330º y –30º coterminales porque 330º –(–30º) = 360º (1 vuelta)
3. 7π y 3π coterminales porque 7π – 3π = 4π (2 vueltas)
4. 450º y –90º coterminales porque 450º – (–90º) = 540º (No tiene vueltas exactas)

Razones trigonométricas de ángulos en posición normal

Si θ es un ángulo cualquiera en posición normal, sus razones trigonométricas se definen como sigue:



Ojo: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\begin{cases} x = \text{Abscisa} \\ y = \text{ordenada} \\ r = \text{radio vector} \end{cases}$$

$$\text{Sen}\theta = \frac{y}{r} = \frac{\text{ORDENADA}}{\text{RADIO VECTOR}} \qquad \text{Csc}\theta = \frac{r}{y} = \frac{\text{RADIO VECTOR}}{\text{ORDENADA}}$$

$$\text{Cos}\theta = \frac{x}{r} = \frac{\text{ABSCISA}}{\text{RADIO VECTOR}} \qquad \text{Sec}\theta = \frac{r}{x} = \frac{\text{RADIO VECTOR}}{\text{ABSCISA}}$$

$$\text{Tan}\theta = \frac{y}{x} = \frac{\text{ORDENADA}}{\text{ABSCISA}} \qquad \text{Cot}\theta = \frac{x}{y} = \frac{\text{ABSCISA}}{\text{ORDENADA}}$$

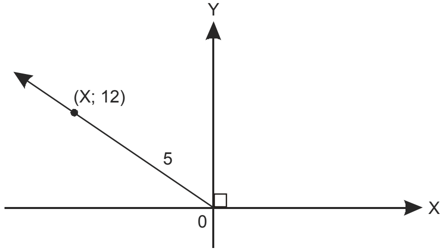
Observaciones

1. En verdad “r” es la longitud de radio vector OP por cuestiones prácticas vamos a denominar a “r” como vector.
2. Para RECORDAR las definiciones anteriores, utilice el siguiente cambio:

CATETO OPUESTO	= ORDENADA
CATETO ADYACENTE	= ABSCISA
RADIO VECTOR	= HIPOTENUSA

Ejemplos

1. Hallar “x”



Resolución

Aplicamos la fórmula: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Que es lo mismo: $r^2 = x^2 + y^2$

$x^2 + y^2 = r^2$

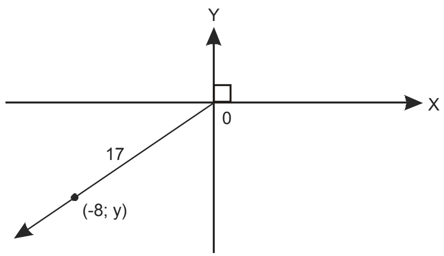
Reemplazamos "y" por 12 "r" por 13 en la igualdad anterior

$$x^2 + 12^2 = 13^2$$
$$x^2 + 144 = 169$$
$$x^2 = 25$$
$$x = \pm 5$$

Como "x" está en el segundo cuadrante entonces tiene que ser negativo:

$$x = -5$$

2. Hallar "y"



Resolución

Análogamente aplicamos: $x^2 + y^2 = r^2$

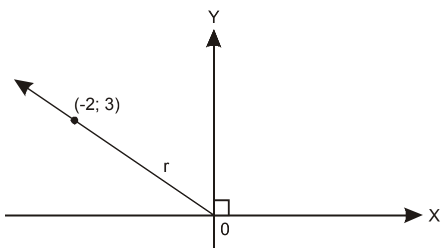
Reemplazamos "x" por 8 "r" por 17 en la igualdad anterior:

$$(-8)^2 + y^2 = 17^2$$
$$64 + y^2 = 289$$
$$y^2 = 225$$
$$y = \pm 15$$

Como "y" está en el tercer cuadrante entonces tiene que ser negativo:

$$y = -15$$

3. Hallar "r"



Resolución

Análogamente aplicamos: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Reemplazamos "x" por -2 "y" por 3 en la igualdad anterior:

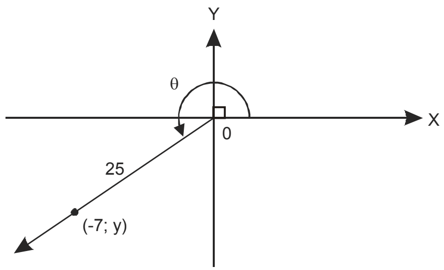
$$r = \sqrt{(-2)^2 + 3^2}$$

$$r = \sqrt{4 + 9}$$

$$r = \sqrt{13}$$

Ojo: "r" es siempre POSITIVO por ser LONGITUD.

4. Hallar Senθ



Resolución

Aplicamos el EJEMPLO 2 y obtenemos:

$$y = -24$$

Del gráfico obtenemos los valores de:

$$x = -7 \qquad r = 25$$

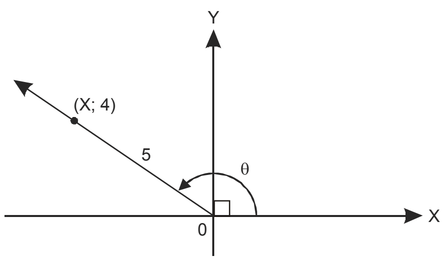
Nos piden Senθ, aplicamos la definición:

$$\text{Sen}\theta = \frac{y}{r}$$

Reemplazamos:

$$\text{Sen}\theta = -\frac{24}{25}$$

5. Hallar Cosθ



Resolución

Aplicamos el EJEMPLO 1 y obtenemos:

$$x = -3$$

Del gráfico obtenemos los valores de:

$$y = 4 \qquad r = 5$$

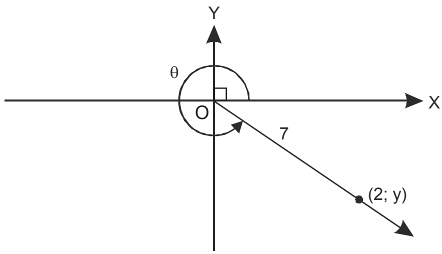
Nos piden Cosθ, aplicamos la definición:

$$\text{Cos}\theta = \frac{x}{r}$$

Reemplazamos:

$$\text{Cos}\theta = -\frac{3}{5}$$

6. Hallar Tanθ



Resolución

Aplicamos el EJEMPLO 2 y obtenemos:

$$y = -3\sqrt{5}$$

Del gráfico obtenemos los valores de:

$$x = 2 \qquad r = 7$$

Nos piden Tanθ, aplicamos la definición

$$\text{Tan}\theta = \frac{y}{x}$$

Reemplazamos:

$$\text{Tan}\theta = -\frac{3\sqrt{5}}{2}$$

Signos de las R.T. en cada cuadrante

Primer Cuadrante
En el primer cuadrante TODAS las R.T. son POSITIVAS porque la ABSCISA (x), la ORDENADA (Y) y el RADIO VECTOR (r) son positivos.

Segundo Cuadrante
En el segundo cuadrante el SENO y la COSECANTE son POSITIVAS porque la ORDENADA (y) el RADIO VECTOR (r) son positivas.

Las demás R.T. son negativas.

Tercer Cuadrante
En el tercer cuadrante la TANGENTE Y COTANGENTE son POSITIVAS porque la ABSCISA (x), y la ORDENADA (y) son negativas.

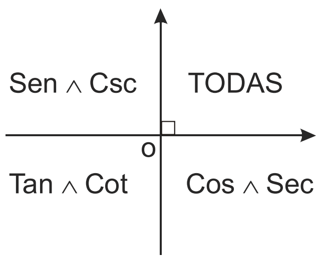
Las demás R.T. son negativas.

Cuarto Cuadrante
En el cuarto cuadrante el COSENO y la SECANTE son POSITIVAS porque la ABSCISA(x) y el RADIO VECTOR (r) son positivos

Las demás R.T. son negativas.

Regla Práctica
Son POSITIVOS.

Ejemplos



1. ¿Qué signo tiene?

$$E = \frac{\text{Sen}100^\circ \cdot \text{Cos}200^\circ}{\text{Tan}300^\circ}$$

Resolución

100º	II	Sen100º es (+)
200º	III	Cos200º es (–)
300º	IV	Tan300º es (–)

Reemplazamos: $E = \dfrac{(+)\,(-)}{(-)}$

$$E = \frac{(-)}{(-)}$$

$$E = (+)$$

2. Si θ   II $Cos^2\theta = \dfrac{2}{9}$. Hallar Cosθ.

Resolución

Despejamos Cosθ de la igualdad dato: $Cos^2\theta = \dfrac{2}{9}$

$$Cos\ \theta = \pm\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Como θ   III entonces Cos θ es negativo, por tanto:

$$Cos\ \theta = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

3. Si θ   IV $Tan^2\theta = \dfrac{4}{25}$. Hallar Tanθ.

Resolución

Despejamos Tanθ de la igualdad dato: $Tan^2\theta = \dfrac{4}{25}$

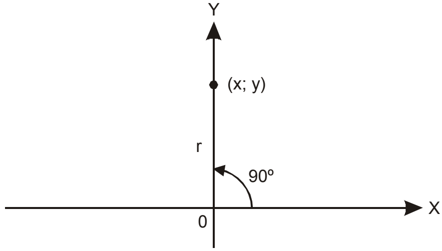
$$Tan^2\theta = \pm\frac{2}{5}$$

Como θ   IV entonces la Tanθ es negativa, por tanto:

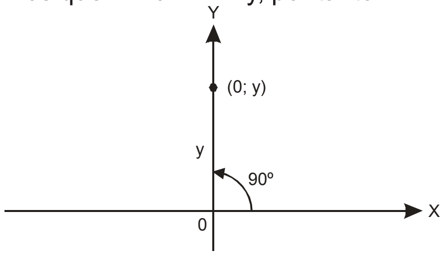
$$Tan\theta = -\frac{2}{5}$$

R.T. de ángulos cuadrantales

Como ejemplo modelo vamos a calcular las R.T. de 90º, análogamente se van a calcular las otras R.T. de 0º, 180º, 270º y 360º.



Del gráfico observamos que x = 0 r = y, por tanto:



$$\text{Sen}90^\circ = \frac{y}{r} = \frac{y}{y} = 1$$

$$\text{Cos}90^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{y} = 0$$

$$\text{Tan}90^\circ = \frac{y}{x} = \frac{y}{0} = \text{No definido} = \text{ND}$$

$$\text{Cot}90^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{y} = 0$$

$$\text{Sec}90^\circ = \frac{r}{x} = \frac{y}{0} = \text{No definido} = \text{ND}$$

$$\text{Csc}90^\circ = \frac{r}{y} = \frac{y}{y} = 1$$

Análogamente:

R.T.	0º	90º	180º	270º	360º
Sen	0	1	0	-1	0
Cos	1	0	-1	0	1
Tan	0	ND	0	ND	0
Cot	ND	0	ND	0	ND
Sec	1	ND	-1	ND	1
Csc	ND	1	ND	-1	ND

Ejemplos

1. Calcular:

$$E = \frac{2Sen(\pi/2) - Cos\pi}{Cot(3\pi/2) + Sec2\pi}$$

Resolución

Los ángulos están en radianes, haciendo la conversión obtenemos:

$$\frac{\pi}{2} = 90º$$

$$\pi = 180º$$

$$3\frac{\pi}{2} = 270º$$

$$2\pi = 360º$$

Reemplazamos:

$$E = \frac{2Sen90º - Cos180º}{Cot270º + Sec360º}$$

$$E = \frac{2(1) - (-1)}{0+1}$$

$$E = 3$$

2. Calcular el valor de "E" para x = 45º.

$$E = \frac{Sen2x + Cos6x}{Tan4x + Cos8x}$$

Resolución

Reemplazamos x = 45º en E:

$$E = \frac{Sen90º + Cos270º}{Tan180º + Cos360º}$$

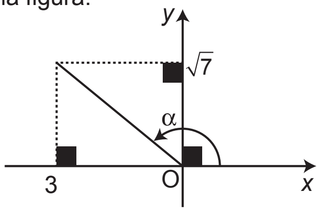
$$E = \frac{1+0}{0+1}$$

$$E = \frac{1}{1}$$

$$E = 1$$

Problemas I

1. De la figura:

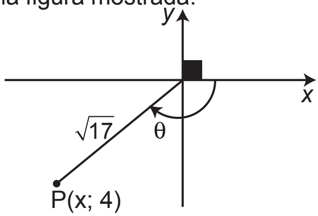


Calcular el valor de la expresión:

$$W = 4\text{Cos}\,\alpha - \sqrt{7}\,\text{Cot}\,\alpha$$

a) –1 b) 0 c) 1
d) $4+\sqrt{7}$ e) $2\sqrt{7}$

2. De la figura mostrada:



Halle el valor de:

$$H = \text{Tg}\,\theta + \text{Cot}\,\theta$$

a) 1/4 b) 4 c) 17/4
d) 4/17 e) 21

3. Si el lado final del ángulo en posición estándar "α" pasa por el punto Q(-12;5), calcule el valor de la expresión:

$$M = \text{Csc}\,\alpha - \text{Cot}\,\alpha$$

a) 0 b) 5/12 c) 5
d) 12/5 e) 1/5

4. Si: Cos θ = –0,25; además θ ∈ IIC. Calcular:

$$P = \text{Sec}\,\theta - \sqrt{15}\cdot\text{Tg}\,\theta$$

a) 4 b) 7 c) 9
d) 11 e) 19

5. Dada las proposiciones:
I. Tg α > 0 ^ Cos α < 0
II. Sen β < 0 ^ Cot β < 0
¿A qué cuadrantes pertenecen "α" y "β" respectivamente?

a) I; II b) II; I c) II; III
d) III, II e) III; IV

6. Indique el signo de las expresiones:

$P = \text{Sen }100° + \text{Cos}^2 200° - \text{Tg}^3 300°$

$$Q = \frac{\text{Tg}100°(\text{Sen}200° + \text{Cot}300°)}{\text{Cos}300°}$$

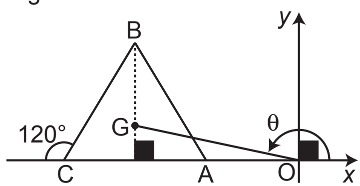
a) +; +; + b) –; +; + c) +; –; –
d) –; –; + e) +; +; –

7. Halle el valor de la expresión:

$$M = \frac{\text{Sen}0° - \text{Cos}180° + \text{Sec}360°}{\text{Sen}90° - \text{Cot}270°}$$

a) –1 b) 0 c) 1
d) 2 e) -2

8. Del gráfico mostrado:



Halle "Tg θ" ; Si: OA=AB=BC; además "G" es baricentro.

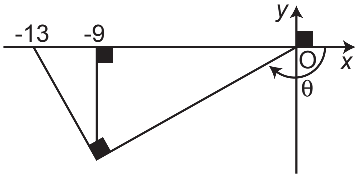
a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\sqrt{3}$
d) $2\sqrt{3}$ e) $-\frac{\sqrt{3}}{9}$

9. Si: $225\text{Tg}^2\alpha - 64 = 0$; α ∈ IVC.
Calcule el valor de la expresión:

$$A = 17\text{Cos}\,\alpha + 15\text{Tg}\,\alpha$$

a) 18 b) 15 c) 11
d) 10 e) 7

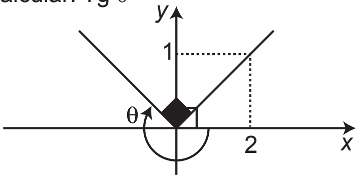
10. De la figura mostrada, halle: Tg θ



a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) 1

d) $\frac{3}{2}$ e) 3

11. Calcular: Tg θ



a) -2 b) 1 c) -1
d) 1/2 e) 2

12. Si:

$$\text{Tg } \beta = 3 \ ; \ |\text{Sen } \beta| = -\text{Sen } \beta$$

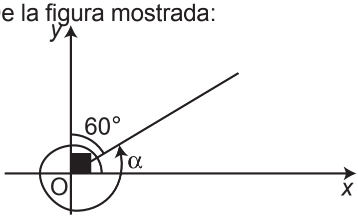
Calcular:

$$E = 2 \text{ Cos } \beta + \text{Sen } \beta$$

a) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{10}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

d) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ e) $\frac{1}{2}$

13. De la figura mostrada:



Calcule:

$$A = \text{Cot}^2\alpha + \text{Csc } \alpha$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

14. Si "α" es un ángulo positivo menor de una vuelta y, $\beta \in$ IIC, además:

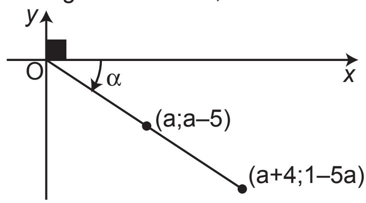
$$\text{Sen } \alpha + \text{Cos } \beta + |\text{Cos } \beta| = 0$$

Calcule: Cos α

a) 0 b) 1 c) $\sqrt{3}$

d) –1 e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

15. De la figura mostrada, halle: Sec α



a) $\frac{\sqrt{13}}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{13}}{2}$ c) $-\frac{\sqrt{13}}{3}$

d) $\frac{\sqrt{13}}{3}$ e) $\sqrt{13}$

16. Si se cumple:

$$27^{\text{Sen } \theta} = 9^{1-\text{Sen } \theta} \quad ; \theta \in \text{IIC}$$

Calcule: $\sqrt{21}$ Tg θ

a) 2 b) –2 c) 5
d) –5 e) $-\sqrt{21}$

17. Dado:

$$\text{Csc } \theta \cdot \sqrt{\text{Sen}^5\theta} \cdot \text{Cos } \theta < 0$$

¿A qué cuadrante pertenece θ?

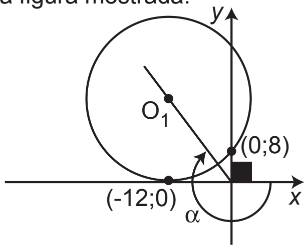
a) IC b) IIC c) IIIC
d) IVC e) II ó IIIC

18. Si: P(a; $\sqrt{a}$), es un punto del lado final de un ángulo en posición estándar "θ". Calcular:

$$A = \sqrt{a+1} \cdot \text{Sen}\theta + \frac{a\text{Sec}\theta}{\sqrt{a^2+a}}$$

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) –1

19. De la figura mostrada:



Halle: Tg α; O_1: Centro

a) –1/5 b) –5/12 c) –12/5
d) –13/5 e) –13/12

20. Halle: 3Cot ϕ, si:

$$\sqrt{Sen\phi+\sqrt{Sen\phi+\sqrt{Sen\phi+...}}}=\frac{3}{2};$$

$\phi \in$ IIC

a) $-\sqrt{7}$ b) $-\frac{\sqrt{7}}{2}$ c) $-\frac{3}{2}$

d) $-\frac{1}{3}$ e) $-\frac{\sqrt{7}}{3}$

CLAVES I				
1. b	2. c	3. c	4. d	5. e
6. e	7. d	8. e	9. e	10. b
11. a	12. b	13. e	14. d	15. a
16. b	17. c	18. c	19. e	20. a

Problemas II

1. Hallar el valor numérico de la expresión:

E = Sen 180°+2Cos 180°
+3Sen 270°-5Sec 180°-6Csc270°

a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 10

2. Indicar los signos de las siguientes expresiones, en el orden F, G, H.

$$F=\frac{(Sec285°\cdot Tan^2 138°\cdot Sen220°)^3}{Csc^3 215°\cdot Cot338°}$$

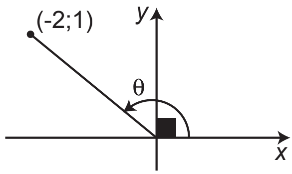
$$G=\frac{(Sen^3 260°\cdot Cos115°\cdot Csc116°)^5}{(Csc\ 195°\cdot Tan\ 336°)^4}$$

$$H=\frac{Sen195°\cdot Cot340°\cdot Csc128°}{(Tan135°\cdot Sec298°)^7}$$

a) –, +, – b) –, –, + c) –, –, –
d) + , –, – e) +, +, +

3. De la figura calcular el valor de:

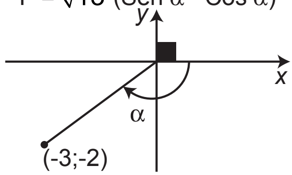
$$E=\sqrt{5}\ Csc\ \theta - Cot\ \theta$$



a) 1 b) 3 c) 5
d) 7 e) 9

4. De la figura calcular el valor de:

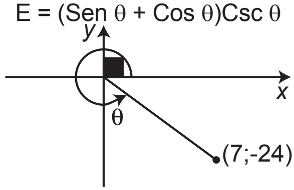
$$P=\sqrt{13}\ (Sen\ \alpha - Cos\ \alpha)$$



a) -5 b) -3 c) -2
d) 1 e) 2

5. De la figura calcular el valor de:

$$E = (Sen\ \theta + Cos\ \theta)Csc\ \theta$$



a) 17/24 b) 24/17 c) 7/24
d) -17/24 e) -7/24

6. Si: Cot α = 2,4 y Sen α < 0; siendo "α" un ángulo en posición estándar. Calcular el valor de:

$$E = 2\text{Sen}\,\alpha + \frac{1}{4}\text{Cos}\,\alpha$$

a) –2 b) –1 c) 1/2
d) 1 e) 2

7. Hallar "$\alpha+\theta$". Si cada uno de ellos es ángulo cuadrantal positivo menor que una vuelta y cumplen:

$$\sqrt{\text{Cos}\alpha + 1} + \sqrt{-1 - \text{Cos}\alpha} = 1 - \text{Sen}\theta$$

a) 540° b) 90° c) 180°
d) 270° e) 360°

8. Dos ángulos coterminales son proporcionales a los números 5 y 2. Además el mayor de ellos esta comprendido entre 1000° y 1700°. Hallar la suma de dichos ángulos.
a) 480° b) 960° c) 1200°
d) 1680° e) 1800°

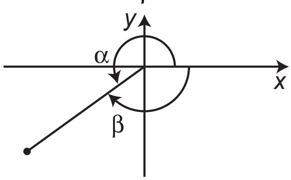
9. Calcular a/b si se tiene que:

$$\frac{(a+b)^2\text{Cos}0° + 2ab\text{Tan}2\pi + 4ab\text{Sec}\pi}{a^2\text{Sen}\frac{\pi}{2} + b^2\text{Csc}\frac{3\pi}{2}} = 2$$

a)-3 b) -2 c) –1
d) 1 e) 2

10. De la figura, hallar:

$$Q = \frac{2\text{Cos}\alpha}{\text{Cos}\beta} + \frac{\text{Tan}\beta}{\text{Tan}\alpha}$$



a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

11. Siendo "θ" y "α" ángulos del II y III cuadrante respectivamente, hallar el signo de:

$$E = \frac{\text{Sen}\theta \cdot \text{Cos}\alpha \cdot \text{Tan}\theta}{\text{Cot}\theta \cdot \text{Sec}\alpha \cdot \text{Csc}\theta}$$

a) + b) - c) + y -
d) cero e) FD

12. Indicar el signo de:

$$E = \frac{\text{Sen}220°\text{Cos}370°\text{Tan}265°}{\text{Sen}45°\text{Cos}120°\text{Sec}240°}$$

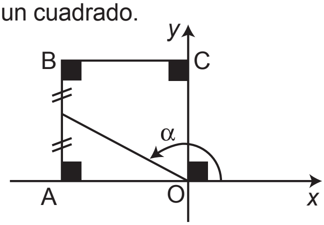
a) + b) - c) + y -
d) cero e) FD

13. ¿A qué cuadrante pertenece el ángulo "θ"?, si se cumple:

Cos θ < Cos($\frac{\pi}{2}$)
Tan θ > Tan π

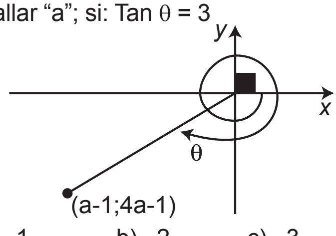
a) IC b) IIC c) IIIC
d) IVC e) FD

14. De la figura, hallar "Tan α"; si: OABC es un cuadrado.



a) -2 b) -1/2 c) -1/3
d) -3 e) 1/2

15. Hallar "a"; si: Tan θ = 3



a) –1 b) –2 c) –3
d) –4 e) –5

16. Si: $0 < x < 2\pi$ y Sen x = Tan 2π, calcular el valor de:

$$P = \text{Sen}\frac{x}{2} + \text{Cot}\frac{x}{4} + \text{Csc}\frac{x}{6}$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 0

17. "α" y "β" son complementarios, además se cumple:

$$(\text{Tan}\ \alpha)^{2\ \text{Tan}\ \theta+3} = (\text{Cot}\ \beta)^{\text{Tan}\ \theta+1}$$

Calcular:

$$M = \text{Sen}\ \theta + \text{Cos}\ \theta\ ;\ (\theta \in \text{IVC})$$

a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{10}$
d) $-\frac{\sqrt{5}}{10}$ e) $\frac{\sqrt{5}}{15}$

18. Siendo "θ" un ángulo en posición normal donde: Tan $\theta = -\frac{3}{2}$ y "Csc θ" es negativo. Calcular:

$$P = 3 + \sqrt{13}\ (\text{Sen}\ \theta + \text{Cos}\ \theta)$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

19. Si el punto (–a; 3a) pertenece al lado final de un ángulo canónico "θ". Además se cumple que: Cos $\theta < 0$. Calcular:

$$R = \text{Sen}\ \theta \cdot \text{Cot}\ \theta$$

a) $-\frac{1}{\sqrt{10}}$ b) $-\frac{2}{\sqrt{10}}$ c) $-\frac{3}{\sqrt{10}}$
d) $-\frac{4}{\sqrt{10}}$ e) $\frac{1}{\sqrt{10}}$

20. Los ángulos coterminales "α" y "β" están en la relación de 1 a 7 respectivamente. El ángulo "α" esta entre 90° y 180°. Hallar "$\alpha+\beta$"

a) 920° b) 940° c) 960°
d) 980° e) 1000°

CLAVES II				
1. c	2. c	3. d	4. d	5. a
6. b	7. d	8. d	9. a	10. c
11. a	12. b	13. c	14. b	15. b
16. d	17. b	18. b	19. a	20. c

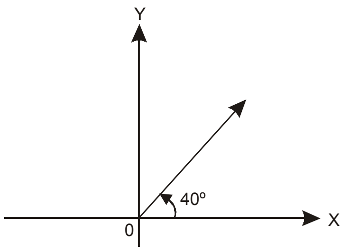
Reducción al primer cuadrante

Ángulo de referencia

Al ángulo agudo formado por el lado final de un ángulo positivo en posición normal θ con el lado positivo o negativo del eje x se llama ÁNGULO DE REFERENCIA y se denota por θ_R

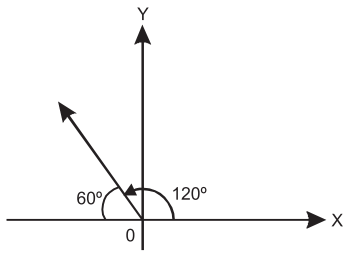
Ejemplos

1.



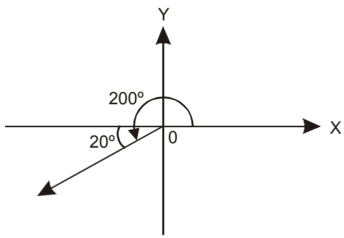
El ángulo de referencia de 40º es 40º

2.



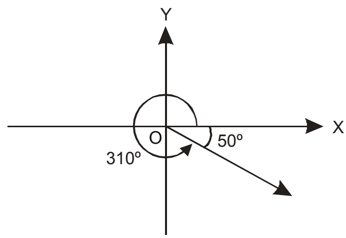
El ángulo de referencia de 120º es 60º

3.



El ángulo de referencia de 200º es 20º

4.



El ángulo de referencia de 310º es 50º

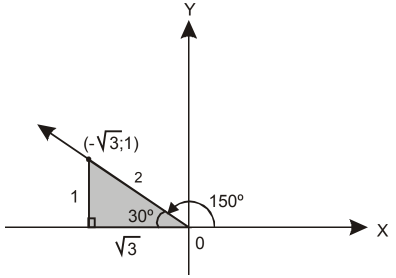
Propiedad fundamental

Si θ es un ángulo positivo en posición normal menor que una vuelta y θ_R su ángulo de referencia, entonces se cumple que las R.T. de θ y los R.T. de θ_R van a tener los mismos valores, aunque en algunos casos difieren en el signo, así:

$$R.T(\theta) = \pm R.T.(\theta_R)$$

Ejemplos

1.

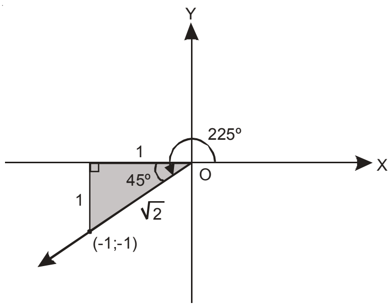


$$Sen150º = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$$

$$Sen30º = \frac{CO}{H} = \frac{1}{2}$$

Entonces:
Sen150º = Sen30º

2.

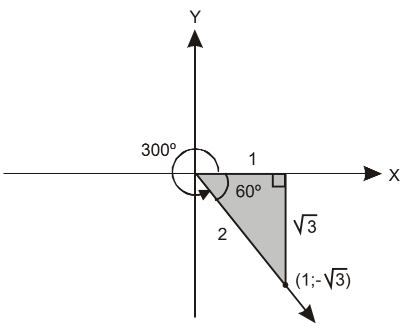


$$Cos\ 225º = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$Cos\ 45º = \frac{CA}{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Entonces:
Cos225º = -Cos45º

3.



$$Tan300º = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$

$$Tan60º = \frac{CO}{CA} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

Entonces:
Tan300º = –Tan60º

Observación

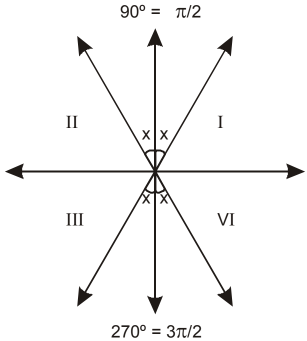
En los ejemplos anteriores se ha notado que efectivamente las R.T. de un ángulo en posición normal son igual a las R.T. de su respectivo ángulo de referencia, en algunos casos difieren en el signo.

Para hacer cálculos vamos a citar cuatro propiedades.

Propiedad I: Para ángulos positivos menores que una vuelta

Esta propiedad se analizará en dos partes:

A. Para entender la propiedad, nos ayudamos del siguiente gráfico.
   Si x es un ángulo agudo, es fácil darse cuenta que:



- (90º - x) I $\quad\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) \in$ I
- (90º + x) II $\quad\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$ II
- (270º – x) III $\quad\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right) \in$ III
- (270º + x) IV $\quad\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right) \in$ IV

Los R.T. de los ángulos anteriores se reducen a R.T. de (x) aplicando la siguiente fórmula:

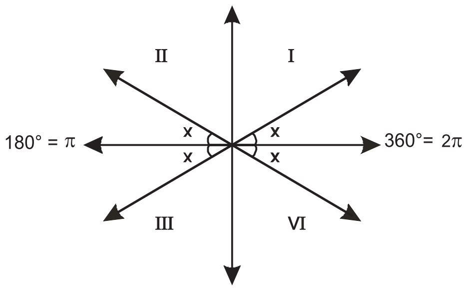
R.T.(90º – x) = CO – RT(x)	R.T.(270º – x) = ± CO – RT(x)
R.T.(90º + x) = ±CO – RT(x)	R.T.(270º + x) = ± CO – RT(x)

Ojo:El signo ± depende del cuadrante al cual pertenece el ángulo que queremos reducir

Ejemplos

1. Sen100º = Sen(90º + 10º) = +Cos10º
2. Cos200º = Cos(270º – 70º) = –Sen70º
3. Tan310º = Tan(270º + 40º) = –Cot40º
4. $\text{Sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = +\text{Cosx}$
5. $\text{Cos}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) = -\text{Senx}$
6. $\text{Tan}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = -\text{Cotx}$

B. Para entender la propiedad, nos ayudamos del siguiente gráfico



Si x es un ángulo agudo es fácil darse cuenta que:

- (180º - x) II — (π – x) II
- (180º + x) III — (π + x) III
- (360º – x) IV — (2π – x) IV

Los R.T. de los ángulos anteriores se reducen a R.T. de (x) aplicando la siguiente fórmula:

$\boxed{\text{R.T.}(180º - x) = \pm \text{R.T.}(x)}$ $\boxed{\text{R.T.}(360º - x) = \pm \text{R.T.}(x)}$

$\boxed{\text{R.T.}(180º + x) = \pm \text{R.T.}(x)}$

Ojo: El signo ± depende del cuadrante al cual pertenece el ángulo que queremos reducir.

Ejemplos

1. $\text{Sen}110º = \text{Sen}(180º - 70º) = +\text{Sen}70º$
2. $\text{Cos}230º = \text{Cos}(180º + 50º) = -\text{Cos}50º$
3. $\text{Tan}340º = \text{Tan}(360º - 20º) = -\text{Tan}20º$
4. $\text{Cot}400º = \text{Cot}(360º + 40º) = \text{Cot}40º$
5. $\text{Sen}(\pi - x) = \text{Sen}x$
6. $\text{Sen}(\pi + x) = -\text{Sen}x$
7. $\text{Tan}(2\pi - x) = -\text{Tan}x$

Propiedad II: Para ángulos positivos mayores que una vuelta

Si a un ángulo positivo θ mayor que una vuelta, lo dividimos entre 360º nos da como cociente "n" y residuo "α". Es decir:

$$\theta = n(360º) + \alpha$$

Las R.T. de θ y las R.T. de α son iguales, por tanto:

$$\boxed{R.T.[n(360º) + \alpha] = R.T.(\alpha)}$$

Ejemplos

1. Calcular Sen 750º

Resolución

$$\begin{array}{r|l} 750º & 360º \\ \cline{2-2} 30º & 2 \end{array} \qquad \text{Sen}750º = \text{Sen}30º = \frac{1}{2}$$

2. Calcular Cos 540º

Resolución

$$\begin{array}{r|l} 540º & 360º \\ \cline{2-2} 180º & 1 \end{array} \qquad \text{Cos}540º = \text{Cos}180º = -1$$

3. Calcular: Tan 900º

Resolución

$$\begin{array}{r|l} 900º & 360º \\ \cline{2-2} 180º & 2 \end{array} \qquad \text{Tan}900º = \text{Tan}180º = 0$$

4. Reducir al primer cuadrante: Sen 3010º

Resolución

$$\begin{array}{r|l} 3010º & 360º \\ \cline{2-2} 130º & 8 \end{array}$$

$\text{Sen } 3010º = \text{Sen } 130º$

$\text{Sen } 3010º = \text{Sen}(180º - 50º)$

$\text{Sen } 3010º = +\text{Sen } 50º$

5. Reducir al primer cuadrante: Cos 4910º

Resolución

$$\begin{array}{l|l} 4910^\circ & 360^\circ \\ \hline 230^\circ & 13 \end{array}$$

Cos 4910º = Cos 230º
Cos 4910º = Cos(180º + 50º)
Cos 4910º = –Cos 50º

6. Reducir al primer cuadrante Tan 10000º

Resolución

$$\begin{array}{l|l} 10000^\circ & 360^\circ \\ \hline 280^\circ & 27 \end{array}$$

Tan10000º = Tan 280º
Tan10000º = Tan(360º - 80º)
Tan10000º = -Tan80º

7. $\text{Sen}(\cancel{10\pi} + x) = \text{Sen}(10\pi + x) = \text{Senx}$
8. $\text{Cos}(\cancel{416\pi} + x) = \text{Cos}(416\pi + x) = \text{Cosx}$
9. $\text{Tan}(\cancel{35\pi} + x) = \text{Tan}(34\pi + \pi + x) = \text{Tan}(\pi + x) = \text{Tanx}$
10. $\text{Cot}(\cancel{499\pi} + x) = \text{Cot}(498\pi + \pi + x) = \text{Cot}(\pi + x) = \text{Cotx}$
11. $\text{Sen}\ \cancel{1275\pi} = \text{Sen}(1274\pi + \pi) = \text{Sen}\pi = 0$
12. $\text{Cos}\ \cancel{4377\pi} = \text{Cos}(4376\pi + \pi) = \text{Cos}\pi = -1$

13. $\text{Sen}\ 43\dfrac{\pi}{7}$ luego dividimos sin el π:

$$\begin{array}{l|l} 43 & 7 \\ \hline 1 & 6 \end{array} \qquad = \frac{43}{7} = 6 + \frac{1}{7}$$

$$\text{Sen}43\frac{\pi}{7} = \text{Sen}\left(6 + \frac{1}{7}\right)\pi = \text{Sen}\left(\cancel{6\pi} + \frac{\pi}{7}\right) = \text{Sen}\frac{\pi}{7}$$

14. $\text{Cos}\ \dfrac{237}{5}\pi$ luego dividimos sin el π:

$$\begin{array}{l|l} 237 & 5 \\ \hline 2 & 47 \end{array} \qquad \frac{237}{5} = 47 + \frac{2}{5}$$

$$\text{Cos}\frac{237}{5}\pi = \text{Cos}\left(47 + \frac{2}{5}\right)\pi = \text{Cos}\left(47\pi + \frac{2\pi}{5}\right) = \text{Cos}\left(\cancel{46\pi} + \pi + \frac{2\pi}{5}\right) = -\text{Cos}\frac{2\pi}{5}$$

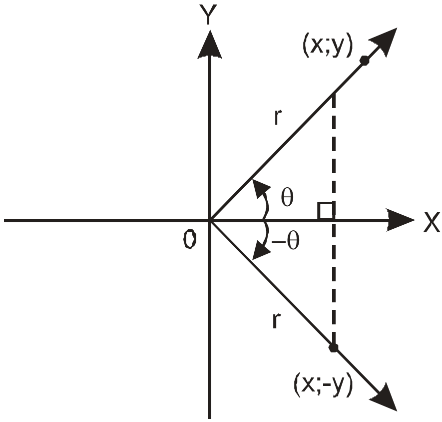
15. $\text{Tan}\,\frac{315}{8}\pi$ luego dividimos sin el π:

$$\begin{array}{r|l} 315 & 8 \\ \hline 3 & 39 \end{array} \qquad \frac{315}{8} = 39 + \frac{3}{8}$$

$$\text{Tan}\,\frac{315}{8}\pi = \text{Tan}\left(39+\frac{3}{8}\right)\pi = \text{Tan}\left(39\pi+\frac{3\pi}{8}\right) = \text{Tan}\left(\cancel{38\pi}+\pi+\frac{3\pi}{8}\right) = \text{Tan}\,\frac{3\pi}{8}$$

Propiedad III: Para ángulos negativos

Si θ es un ángulo positivo entonces -θ es un ángulo negativo, como se muestra en el gráfico siguiente.



Calculamos el Seno, Coseno y Tangente de (θ) y (-θ) y obtenemos:

$\text{Sen}\theta = \frac{y}{r}$ $\qquad \text{Sen}(-\theta) = \frac{y}{r}$ $\qquad \boxed{\text{Sen}(-\theta) = -\text{Sen}\theta}$

$\text{Cos}\theta = \frac{x}{r}$ $\qquad \text{Cos}(-\theta) = \frac{x}{r}$ $\qquad \boxed{\text{Cos}(-\theta) = \text{Cos}\theta}$

$\text{Tan}\theta = \frac{y}{x}$ $\qquad \text{Tan}(-\theta) = -\frac{y}{x}$ $\qquad \boxed{\text{Tan}(-\theta) = -\text{Tan}\theta}$

Análogamente

$$\boxed{\operatorname{Cot}(-\theta) = -\operatorname{Cot}\theta}$$
$$\boxed{\operatorname{Sec}(-\theta) = \operatorname{Sec}\theta}$$
$$\boxed{\operatorname{Csc}(-\theta) = -\operatorname{Csc}\theta}$$

Nótese, que para el coseno y la secante el ángulo negativo es indiferente.

Ejemplos

1. $\operatorname{Sen}(-30^\circ) = -\operatorname{Sen}30^\circ = -\dfrac{1}{2}$
2. $\operatorname{Cos}(-45^\circ) = \operatorname{Cos}45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\operatorname{Tan}(-60^\circ) = -\operatorname{Tan}60^\circ = -\sqrt{3}$
4. $\operatorname{Sen}(-130^\circ) = -\operatorname{Sen}130^\circ = -\operatorname{Sen}(180^\circ - 50^\circ) = -(+\operatorname{Sen}50^\circ) = -\operatorname{Sen}50^\circ$
5. $\operatorname{Cos}(-200^\circ) = \operatorname{Cos}200^\circ = \operatorname{Cos}(180^\circ + 20^\circ) = -\operatorname{Cos}20^\circ$
6. $\operatorname{Tan}(-325^\circ) = -\operatorname{Tan}325^\circ = -\operatorname{Tan}(360^\circ - 35^\circ) = -(-\operatorname{Tan}35^\circ) = \operatorname{Tan}35^\circ$

Ángulos suplementarios

Si α y β son suplementarios entonces:

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$
$$\alpha = 180^\circ - \beta$$
$$\operatorname{Sen}\alpha = \operatorname{Sen}(180^\circ - \beta)$$
$$\boxed{\operatorname{Sen}\alpha = \operatorname{Sen}\beta}$$

Análogamente

$\operatorname{Cos}\alpha = -\operatorname{Cos}\beta$
$\operatorname{Tan}\alpha = -\operatorname{Tan}\beta$
$\operatorname{Cot}\alpha = -\operatorname{Cot}\beta$
$\operatorname{Sec}\alpha = -\operatorname{Sec}\beta$
$\operatorname{Csc}\alpha = \operatorname{Csc}\beta$

Ejemplos

1. $\operatorname{Sen}130^\circ = \operatorname{Sen}50^\circ$ porque: $130^\circ + 50^\circ = 180^\circ$
2. $\operatorname{Cos}110^\circ = -\operatorname{Cos}70^\circ$ porque: $110^\circ + 70^\circ = 180^\circ$
3. $\operatorname{Tan}140^\circ = -\operatorname{Tan}40^\circ$ porque: $140^\circ + 40^\circ = 180^\circ$
4. $\operatorname{Sen}\dfrac{2\pi}{3} = \operatorname{Sen}\dfrac{\pi}{3}$ porque: $\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3} = \pi$
5. $\operatorname{Cos}\dfrac{4\pi}{5} = -\operatorname{Cos}\dfrac{\pi}{5}$ porque: $\dfrac{4\pi}{5} + \dfrac{\pi}{5} = \pi$

Problemas I

1. Marcar verdadero (V) o falso (F)
   ( ) $\text{Sen}(\pi+x) = -\text{Senx}$
   ( ) $\text{Cos}\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right) = -\text{Sen }x$
   ( ) $\text{Tg}(2\pi-x) = -\text{Tg }x$
   a) VVV b) FFF c) FVV
   d) FFV e) VVF

2. Señale lo incorrecto:
   I. $\text{Sen}(\pi-x) = \text{Sen }x$
   II. $\text{Cos}\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right) = -\text{Sen }x$
   III. $\text{Tg}(\pi+x) = \text{Tg }x$
   IV. $\text{Tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right) = \text{Ctg }x$
   V. $\text{Sec}(\pi+x) = \text{Sec }x$
   a) I b) II c) III
   d) IV e) V

3. Simplificar:
   $E = \text{TgA} + \text{Tg}(180°\text{-A}) + \text{Ctg}(90°\text{-A}) + \text{Tg}(180°\text{+A})$
   a) 0 b) Tg A c) 2TgA
   d) 1 e) -1

4. Calcular:
   $$E = \frac{\text{Cos}(\pi+\alpha)}{\text{Tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}\ ; \quad \text{Si: } \alpha = \frac{\pi}{6}$$
   a) -1/2 b) 2 c) -2
   d) 1 e) –1

5. Reducir:
   $$E = \frac{\text{Sen}(-A)}{\text{Sen}(\pi+A)} + \frac{\text{Cos}(-A)}{\text{Sen}\left(\dfrac{\pi}{2}+A\right)}$$
   a) 0 b) 2 c) -2
   d) 1 e) –1

6. Simplificar:
   $$E = \frac{\text{Sen}\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)}{\text{Cos}(-x)} + \frac{\text{Tg}(\pi+x)}{\text{Tg}(-x)}$$
   a) 0 b) 2 c) –2
   d) 1/2 e) –1/2

7. Sabiendo que:
   $$\text{Sen}(90°+\alpha) = m$$
   Calcular:
   $M = \text{Cos}(-\alpha)+\text{Cos}(180°-\alpha)+\text{Cos}(360°-\alpha)$
   a) m b) 2m c) 3m
   d) -2m e) -m

8. Afirmar si es verdadero (V) o falso (F):
   ( ) $\text{Tg } 210° = \sqrt{3}$
   ( ) $\text{Sec } 300° = 2$
   ( ) $\text{Sen } 150° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
   a) VVF b) FVV c) FVF
   d) FFV e) VVV

9. Marcar lo incorrecto:
   a) $\text{Sen } 120° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   b) $\text{Cos } 150° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   c) $\text{Tg } 135° = -1$
   d) $\text{Sec } 143° = -\dfrac{5}{3}$
   e) $\text{Csc } 127° = \dfrac{5}{4}$

10. En un triángulo ABC, simplificar:
    $$E = \frac{\text{Sen}(A+B)}{\text{SenC}} + \frac{\text{Cos}(B+C)}{\text{CosA}} - \frac{\text{Tan}(A+C)}{\text{TanB}}$$
    a) 1 b) -1 c) 2
    d) 3 e) -3

11. Sabiendo que:
    $m + n = \text{Sen } 150° + \text{Tg } 225°$
    $m - n = \text{Cos } 240°$
    Hallar: $2m - 3n$
    a) 2 b) -2 c) 3/2
    d) -3/2 e) 3

12. En un triangulo ABC, simplificar:

$$E = \frac{Sen(A+B+2C)}{Sen(A+B)}$$

a) -1 b) -2 c) 1
d) Tg B e) Tg C

13. Siendo "A" un ángulo agudo, hallar "A" en:

Ctg(–160°) = Ctg A

a) 10° b) 20° c) 30°
d) 40° e) 50°

14. Si:

$$Ctg\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\frac{k}{2}$$ y

$$Tg(x-\pi)=\frac{2k+1}{3}$$

Calcular el valor de "k"

a) -2/7 b) 7/2 c) -7/2
d) 3/7 e) 7/3

15. Simplificar:

$$E=\frac{Sen\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{Sen\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}-\frac{Cos(\alpha-270°)}{Sen(\alpha-180°)}$$

a) 1 b) –1 c) 0
d) 2 e) –2

16. Si: "α" y "β" son dos ángulos complementarios y

$Sen(2\alpha+3\beta)=-\frac{1}{3}$; el valor de:

$Tg(3\alpha + 2\beta)$, es:

a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ b) $\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{2}$
d) $8\sqrt{2}$ e) $-\sqrt{8}$

17. Siendo: $a+b+c = \pi$
Simplificar:

$E=\frac{1}{2}[Cos(a+2b+c)+Sen\frac{1}{2}(a+3b+c)]$

a) 0 b) Sen b c) 0,5Senb
d) 2Sen b e) 1

18. Hallar:

$$E=\frac{Tg\left(k\pi+\frac{\pi}{4}\right)+Tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)+Sec\left(\frac{5\pi}{4}\right)}{Sec\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2}$$

Donde: $k \in Z$

a) $\sqrt{2}+1$ b) $\sqrt{2}-1$ c) $1-\sqrt{2}$
d) $\sqrt{2}$ e) 1

19. Si: Sen A - 2Cos A = 0; calcular:

$$E=\frac{Tg(90°+A)Sec(180°-A)Tg(270°-A)}{Sen(360°-A)Csc(180°-A)Cos(180°+A)}$$

a) 8/3 b) –8/3 c) 3/8
d) –3/8 e) 5/4

20. Simplificar:

$$A=Cos\frac{\pi}{11}+Cos\frac{3\pi}{11}+Cos\frac{8\pi}{11}+Cos\frac{10\pi}{11}$$

a) 1 b) –1 c) 0
d) 2 e) –2

CLAVES I				
1. a	2. e	3. c	4. a	5. b
6. a	7. a	8. c	9. d	10. a
11. b	12. a	13. b	14. a	15. c
16. c	17. a	18. c	19. e	20. c

Problemas II

1. Simplificar:

$$A=\frac{Sen(90°-x)Sec(180°-x)}{Cos(90°+x)Csc(360°-x)}$$

a) -1/2 b) –1 c) 0
d) 1 e) 1/2

2. Simplificar:

$$M=\frac{Tan(180°+x)}{Cot(270°+x)}+\frac{Sec(90°+x)}{Csc(180°-x)}$$

a) –2 b) –1 c) 0
d) 1 e) 2

3. Simplifique:

$$N=\frac{Sen(\pi+x)+Sen(-x)}{Cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}+\frac{Cos(-x)}{Sen\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$$

a) -2 b) 3 c) 0
d) 1 e) 2

4. Calcule el valor de:

$$P=\frac{Sen150°\cdot Sec300°+Tan^2 135°}{Tan315°+Cos240°}$$

a) -2/3 b) -4/3 c) –1/3
d) 3 e) 3/4

5. Determinar el valor de:

$$Q = Sec\ 1500° + 5Sen\ 2483°$$

a) -2 b) –1 c) 0
d) 1 e) 2

6. Reducir:

$$R=\frac{Sen200°+2Cos1510°}{Cos(-70°)}$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 1/2 e) 1/3

7. Reduzca:
$E = Tan(4\pi+x)+Tan(7\pi+x)+Tan(12\pi-x)$
a) –3Tan x b) –Tan x c) 3Tan x
d) Tan x e) 0

8. Calcule:

$$F = Tan\ 57\frac{\pi}{4} + Sec\ 61\frac{\pi}{3}$$

a) –2 b) –1 c) 0
d) 1 e) 3

9. Calcule la medida del ángulo agudo que cumple con:

$$Sen\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - 3Cos(\pi-x) = Sec(2\pi-x)$$

a) $\frac{\pi}{8}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{3}$

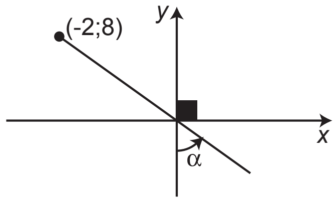
d) $\frac{\pi}{6}$ e) $\frac{\pi}{12}$

10. En un triángulo ABC, reducir:

$$N=\frac{SenC}{Sen(A+B)}+\frac{Cos(B+C)}{CosA}$$

a) –2 b) –1 c) 0
d) 1 e) 2

11. De la figura, calcule: Tan α



a) –2 b) –4 c) 0
d) 1/2 e) 1/4

12. En un triángulo ABC, reducir:

$$T=\frac{Cos(2A+2B)}{Cos2C}+\frac{Tan\left(\frac{A+C}{2}\right)}{Cot\frac{B}{2}}$$

a) –2 b) –1 c) 0
d) 1 e) 2

13. Simplifique:

$$H = Tan\frac{2\pi}{13}+Tan\frac{5\pi}{13}+Tan\frac{8\pi}{13}+Tan\frac{11\pi}{13}$$

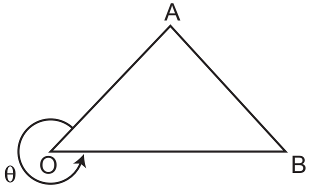
a) -2 b) –1 c) 0
d) 1 e) 2

14. Si "θ" es un ángulo positivo y menor que una vuelta, de modo que cumple:
$Sen\ \theta = Cot(180°+\theta)+Tan(270°+\theta)$
Calcule:

$$A = Cos\ \theta + Sen\frac{\theta}{2} + Sec\ 2\theta$$

a) –2 b) –1 c) 1
d) 2 e) 3

15. De la figura, calcule: Tan θ.
Si: OA=AB=41 ^ OB=80

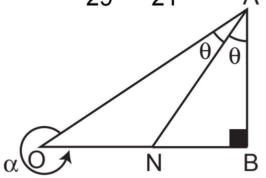


a) 20/21   b) 21/20   c) –9/40
d) –40/9   e) –1/2

16. Siendo "α" y "β" ángulos agudos de un triángulo rectángulo, reducir:
$P = \text{Sec}(\alpha+2\beta)+\text{Tan}(2\alpha+5\beta) \times \text{Cot}(\beta+4\alpha)+\text{Csc}(2\alpha+\beta)$

a) –2   b) –1   c) 0
d) 1   e) 2

17. De la figura mostrada, calcule:
Tan α
Además:
$$\frac{ON}{29}=\frac{NB}{21}$$



a) –2,1   b) –4,2   c) –1,05
d) 2,1   e) 4,2

18. Siendo "α" y "β" ángulos complementarios, calcular:
$$M=\frac{\text{Cos}(2\alpha+4\beta)}{\text{Cos}(4\beta+6\alpha)}+\frac{\text{Tan}(3\alpha+2\beta)}{\text{Cot}(2\alpha+3\beta)}$$

a) –2   b) –1   c) 0
d) 1   e) 2

19. Reduzca:
$$P=\frac{\text{Sen}(230^\circ+\theta)\cdot\text{Tan}(300^\circ-\theta)}{\text{Tan}(60^\circ+\theta)\cdot\text{Cos}(400^\circ-\theta)}$$

a) –2   b) –1   c) 0
d) 1   e) 2

20. El equivalente de:
$W = \text{Sen}\,K\pi - \text{Cos}(K+1)\pi$; $k \in Z$ es:

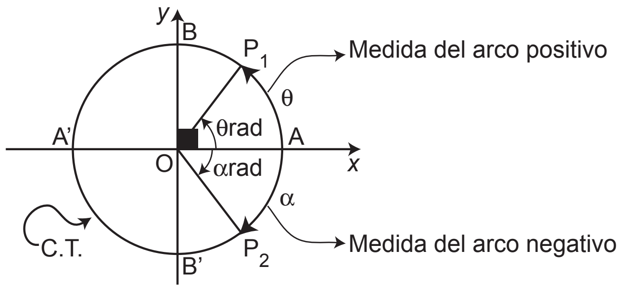
a) 1   b) 1^k c) $(-1)^k$
d) $(-1)^{2k}$ e) $(-1)^{k+1}$

CLAVES II				
1. b	2. a	3. b	4. b	5. b
6. a	7. d	8. e	9. c	10. c
11. e	12. e	13. c	14. c	15. c
16. b	17. c	18. e	19. d	20. c

UNIDAD 7

Circunferencia Trigonométrica (C.T.)

Es aquella circunferencia cuyo centro coincide con el origen de coordenadas rectangulares y cuyo radio es igual a la unidad, razón por la cual se le denomina también circunferencia unitaria.



La ecuación de la circunferencia trigonométrica es:

$$\boxed{x^2 + y^2 = 1}$$

Para un mejor entendimiento de las definiciones posteriores se enuncian las siguientes denominaciones a los puntos:

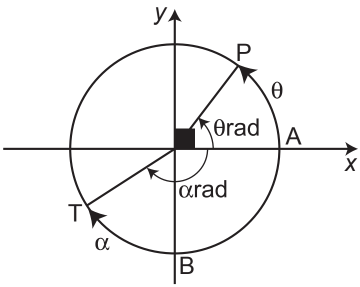
A(1; 0) Como origen de arcos
B(0; 1) Como origen de complementos
A'(–1;0) Como origen de suplementos
B'(0;-1) Sin nombre especial
$P_1 \wedge P_2$ Extremos de arco

Arco en posición estándar

Es aquél arco cuyo extremo inicial es el origen de arcos de la C.T. y su extremo final cualquier punto sobre la C.T. (es aquel que indica el cuadrante al cual pertenece dicho arco).

Observación

El ángulo central correspondiente a un arco en posición estándar tiene una medida en radianes que es igual a la medida del arco en unidades.



"θ" y "α" son arcos en posición estándar tales que:

θ es (+) ^ $\theta \in$ IC

α es (–) ^ $\alpha \in$ IIIC

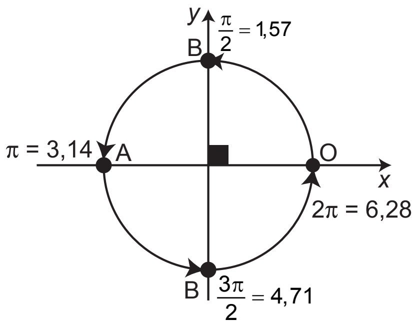
$\overset{\frown}{AP} = \theta$

$\overset{\frown}{AT} = \alpha$

Observación

Del gráfico estos extremos de arcos servirán como referencia para ubicar aproximadamente otros arcos en la C.T.

Ejemplo

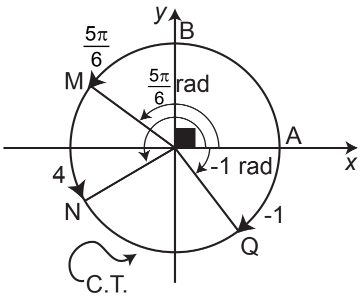


Ubique gráficamente en la circunferencia trigonométrica los extremos de arcos (en posición estándar).

$$\frac{5\pi}{6}; 4; -1$$

Resolución

Para que los arcos se encuentren en posición estándar en la C.T. estos tendrán su posición inicial en el punto A(1; 0).



M: extremo de arco $\frac{5\pi}{6}$ $\left(\frac{5\pi}{6} \in \text{IIC}\right)$
N: extremo de arco 4 (4 $\in$ IIIC)
Q: extremo de arco -1 (-1 $\in$ IVC)

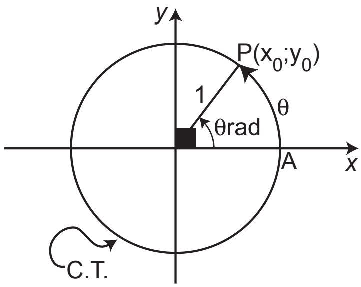
Razones trigonométricas de arcos en posición estándar

Son numéricamente iguales a las razones trigonométricas de su respectivo ángulo central en la C.T.

Importante:

$$\boxed{\text{R.T.(arco)} = \text{R.T.(central)}}$$

Cálculo de las R.T.



$$\text{Sen } \theta = \text{Sen}(\theta \text{ rad}) = \frac{y_0}{1} = y_0$$

$$\text{Cos } \theta = \text{Cos}(\theta \text{ rad}) = \frac{x_0}{1} = x_0$$

$$\text{Tg } \theta = \text{Tg}(\theta \text{ rad}) = \frac{y_0}{x_0}$$

$$\text{Ctg } \theta = \text{Ctg}(\theta \text{ rad}) = \frac{x_0}{y_0}$$

$$\text{Sec } \theta = \text{Sec}(\theta \text{ rad}) = \frac{1}{x_0}$$

$$\text{Csc } \theta = \text{Csc}(\theta \text{ rad}) = \frac{1}{y_0}$$

De acuerdo al gráfico:

$$\boxed{\text{R.T.}(\theta) = \text{R.T.}(\theta \text{ rad})}$$

Ejemplo:

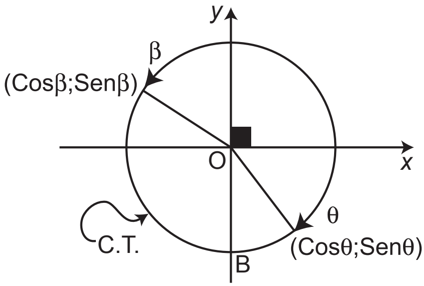
$$\text{Sen}\frac{\pi}{6} = \text{Sen}\frac{\pi}{6}\text{ rad} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Tg}\frac{\pi}{4} = \text{Tg}\frac{\pi}{4}\text{ rad} = 1$$

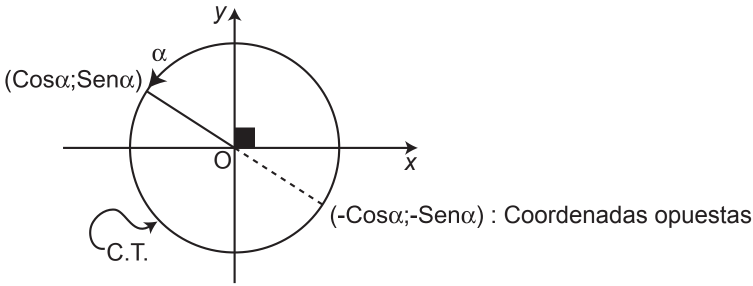
Observación:
Las coordenadas de "P" son $(x_0;y_0)$, luego se tendra:

$$\boxed{(x_0;y_0) = (\text{Cos }\theta; \text{ Sen }\theta)}$$

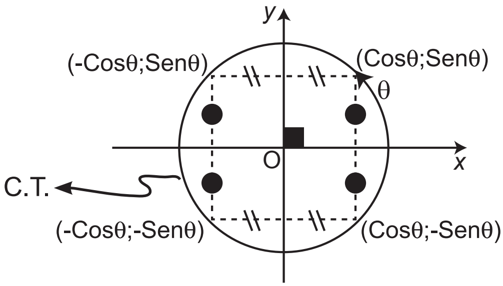
Coordenadas del extremo de arco



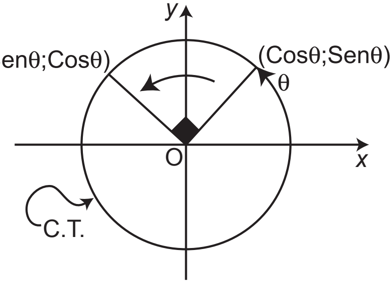
Coordenadas opuestas



Coordenadas simétricas



Coordenadas ortogonales



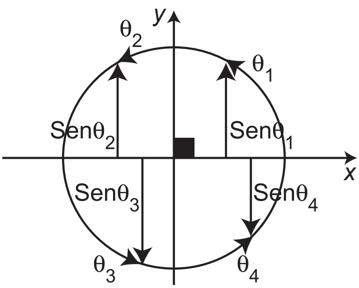
Líneas trigonométricas

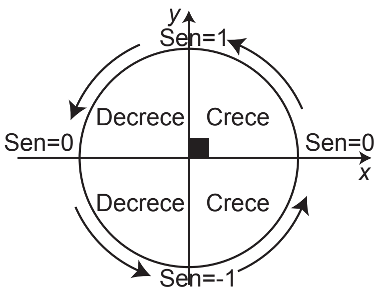
Son segmentos de rectas dirigidas, los cuales nos representan en la circunferencia trigonométrica, el valor numérico de una razón trigonométrica de un ángulo o número.

Representaciones de seno, coseno de un arco en la C.T.

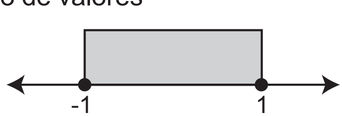
Representación de la línea Seno

El seno de un arco viene a ser la ordenada trazada de su extremo de arco.





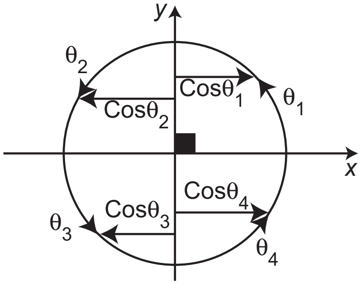
Rango de valores

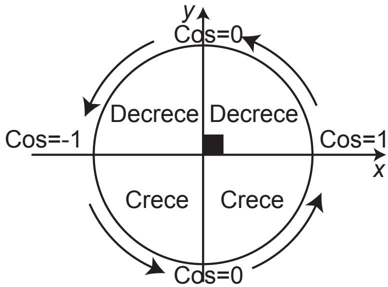


$$\boxed{-1 \le \text{Sen}\ \theta \le 1}$$
$$\forall\ \theta \in \mathbb{R}$$

Representación de la línea Coseno

El coseno de un arco es la abscisa trazada de su extremo de arco.





Rango de valores

$$\boxed{-1 \leq Cos\,\theta \leq 1}$$
$$\forall\, \theta \in R$$

Problemas I

1. Considerando los valores de:

   Sen 40°, Sen 130°, Sen 220°, Sen 310°

   Luego el mayor valor será:
   a) Sen 40° b) Sen 130°
   c) Sen 220° d) Sen 310°
   e) Necesito calculadora

2. Hallar la variación de "m" para que sea posible la relación:

   $$\text{Sen}\ \alpha = 2m - 7$$

   a) $3 \le m \le 4$ b) $-1 \le m \le 1$
   c) $6 \le m \le 8$ d) $-2 \le m \le 2$
   e) $2 \le m \le 3$

3. Hallar la extensión de "K", si:

   $$"\theta" \in \text{IIIC y Sen}\ \theta = \frac{3K-7}{4}$$

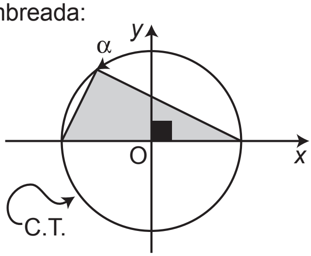
   a) $K \in [-1; 1]$ b) $K \in \left\langle -1; \frac{7}{3} \right\rangle$
   c) $K \in \left[-1; \frac{7}{3} \right]$ d) $K \in \left\langle 1; \frac{7}{3} \right\rangle$
   e) $K \in \left[1; \frac{7}{3} \right]$

4. Si "A" es el máximo valor, y "B" el mínimo valor de la expresión:

   $$Q = 2 - 3\ \text{Sen}\ \alpha$$

   Encontrar el valor de "A-B"
   a) 4 b) 5 c) 6
   d) 7 e) 8

5. Hallar el área de la región sombreada:



   a) $\frac{\text{Sen}\alpha}{2}\ \mu^2$ b) $2\text{Sen}\ \alpha\ \mu^2$
   c) $\text{Sen}\ \alpha\ \mu^2$ d) $2\text{Cos}\ \alpha\ \mu^2$
   e) $\text{Cos}\ \alpha\ \mu^2$

6. Considerando los valores de:

   Cos 55°, Cos 145°, Cos 235°, Cos 325°

   Luego el menor valor será:
   a) Cos 325° b) Cos 235°
   c) Cos 145° d) Cos 55°
   e) Necesito calculadora

7. Hallar la variación de "m" si:

   $$\text{Cos}\alpha = \frac{m+3}{5}$$

   a) $-1 \le m \le 1$ b) $2 \le m \le 8$
   c) $-8 \le m \le 8$ d) $-8 \le m \le -2$
   e) $-8 \le m \le 2$

8. Si: "θ" ∈ IVC y $\text{Cos}\ \theta = \frac{1-3a}{7}$

   ¿Entre que límites debe estar "a" para que el "Cos θ" exista?

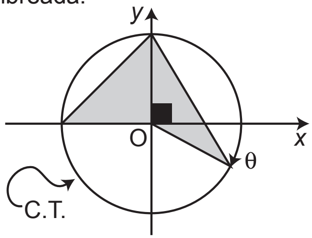
   a) $\left] \frac{1}{3}; 2 \right[$ b) $\left[-\frac{1}{3}; 2 \right]$ c) $\left] -\frac{1}{3}; 2 \right[$
   d) $\left[-2; \frac{1}{3} \right]$ e) $\left] -2; \frac{1}{3} \right[$

9. Calcular el cociente de los valores máximo y mínimo de:

   $$Q = 6\text{Cos}\ \alpha - 7$$

   a) 1 b) 13 c) –13
   d) –1/13 e) 1/13

10. Hallar el área de la región sombreada:



a) $\left(\dfrac{1-\text{Cos}\theta}{2}\right)\mu^2$ b) $\left(\dfrac{1+\text{Cos}\theta}{2}\right)\mu^2$

c) $\left(\dfrac{\text{Cos}\theta}{2}\right)\mu^2$ d) $(1-\text{Cos}\ \theta)\mu^2$

e) $(1+\text{Cos}\ \theta)\mu^2$

11. Calcular:

$$J=\frac{\text{Sen}360°+3\text{Sen}90°-2\text{Cos}^3 180°}{\text{Cos}90°+10\text{Sen}^2 270°\cdot\text{Cos}^3 0°}$$

a) 1 b) 0,1 c) 0,5
d) –0,1 e) –0,5

12. Si: $\dfrac{\pi}{2}<\alpha_1<\alpha_2<\pi$

Indicar si es (V) o (F)
i) $\text{Sen}\ \alpha_1 < \text{Sen}\ \alpha_2$
ii) $\text{Cos}\ \alpha_1 > \text{Cos}\ \alpha_2$
iii) $\text{Sen}\ \alpha_2\cdot\text{Cos}\ \alpha_1 > 0$
iv) $\text{Cos}\ \alpha_2\cdot\text{Sen}\ \alpha_1 < 0$
a) FVVF b) FVFV c) VFFF
d) FVVV e) VFVF

13. Indicar la relación posible:

a) $\text{Sen}\ \alpha=\sqrt{3}$

b) $\text{Cos}\ \beta=-\sqrt{2}$

c) $\text{Sen}\ \theta=\sqrt{2}+1$

d) $\text{Cos}\ \phi=1-\sqrt{3}$

e) $\text{Sen}\ \gamma=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

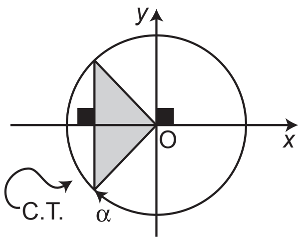
14. Siendo:

$$P = 3\text{Sen}^2\alpha - 5\text{Cos}^2\beta\ ;\ \alpha\neq\beta$$

Encontrar: $P_{máx}\cdot P_{min}$

a) –64 b) –15 c) –2
d) 1 e) 0

15. En la figura, hallar el área de la región sombreada.



a) $0{,}5\text{Sen}\ \alpha\cdot\text{Cos}\ \alpha\ \mu^2$
b) $2\text{Sen}\ \alpha\cdot\text{Cos}\ \alpha\ \mu^2$
c) $\text{Sen}\ \alpha\cdot\text{Cos}\ \alpha\ \mu^2$
d) $-\text{Sen}\ \alpha\cdot\text{Cos}\ \alpha\ \mu^2$
e) $-0{,}5\text{Sen}\ \alpha\cdot\text{Cos}\ \alpha\ \mu^2$

16. Si: $45° < \theta < 135°$ y $A < \text{Sen}\ \theta \leq B$
Hallar el valor de:

$$W = (A+B)\ (A-B)$$

a) $-\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) 1

d) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

17. Si: $-\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{\pi}{3}$

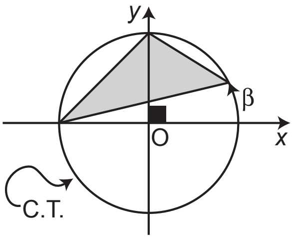
Hallar la extensión de:

$$E = 4\text{Cos}\ \theta + 1$$

a) <3; 5> b) [3; 5] c) <3; 5]
d) [3;5> e) <0,5;1]

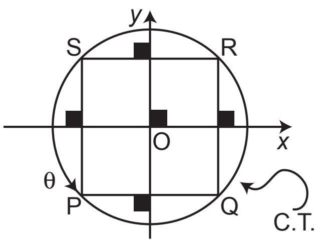
18. Indicar la verdad (V) o Falsedad (F) de las siguientes proposiciones:
i) Sen 1 < Sen 3 ( )
ii) Cos4 > Cos2 ( )
iii) Sen 5 · Cos 6 > 0 ( )
a) VVV b) FVV c) FFV
d)FFF e)VFF

19. Hallar el área de la región triangular mostrada en la circunferencia trigonométrica.



a) 0,5 · Sen β · Cos β u²
b) 0,5 (1-Sen β - Cos β) u²
c) 0,5 (1+Sen β - Cos β) u²
d) 0,5 (1 +Sen β + Cos β) u²
e) 0,5 (1-Sen β + Cos β) u²

20. En la figura, hallar el perímetro del rectángulo PQRS.



a) -4(Sen θ + Cos θ)
b) 4(Sen θ + Cos θ)
c) -4(Sen θ – Cos θ)
d) -4(Cos θ – Sen θ)
e) 4 · Sen θ · Cos θ

CLAVES I				
1. b	2. a	3. d	4. c	5. c
6. c	7. e	8. e	9. e	10. b
11. c	12. b	13. d	14. b	15. c
16. a	17. c	18. d	19. e	20. a

Problemas II

1. Indicar el mayor valor en las siguientes alternativas:
a) Sen 20°   b) Sen 70°
c) Sen 100°   d) Sen 230°
e) Sen 300°

2. Indicar verdadero (V) ó falso (F) según corresponda:
( ) Cos 10° > Cos 50°
( ) Cos 120° > Cos 160°
( ) Cos 290° > Cos 340°
a) VVV   b) FFF   c) FVF
d) VVF   e) VFF

3. Indicar verdadero (V) ó falso (F) según corresponda:
( ) Sen 20° > Cos 20°
( ) Cos 190° > Cos 300°
( ) Sen 100° = Cos 350°
a) VVV   b) FFF   c) FFV
d) VFF   e) VVF

4. Hallar la variación de "k"' para que se verifique la igualdad:

$$\text{Sen}\theta = \frac{2k-5}{3}$$

a) $-1 \le k \le 1$ b) $0 \le k \le 3$
c) $0 \le k \le 1$ d) $1 \le k \le 4$
e) $-2 \le k \le 1$

5. Indicar la extensión de "k", si "θ" $\in$ IIC; además:

$$\text{Cos }\theta = 2k + 3$$

a) [–1;1]   b) $\left\langle -2;-\frac{3}{2}\right\rangle$ c) [0; 1]
d) $\left\langle -\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right\rangle$ e) <–1;2>

6. Si "α" $\in \left[\frac{\pi}{6};\frac{3\pi}{5}\right]$; hallar la extensión de:

$$E = 4\text{Sen }\alpha - 3$$

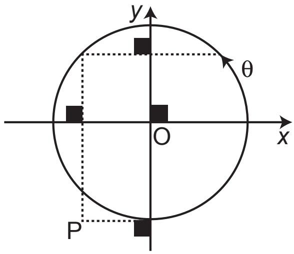
a) [–1;1]   b) [0; 1]   c) [–3; 4]
d) [1; 2]   e) [–2; 0]

7. Siendo "α" y "β" ángulos independientes entre si, hallar la diferencia entre el máximo y mínimo valor de:

$$M = 2\text{Sen}\,\alpha + 3\text{Cos}^2\beta$$

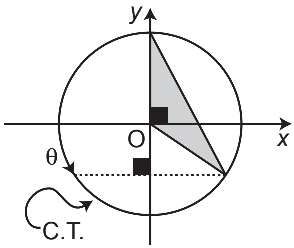
a) 1 b) 3 c) 5
d) 7 e) 9

8. En la C.T. mostrada, hallar las coordenadas del punto "P".



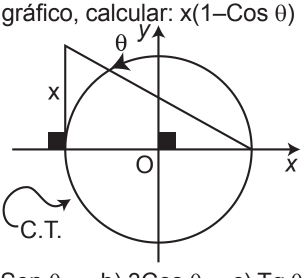
a) (–Sen θ; –1) b) (–1; Cos θ)
c) (–1; –Cos θ) d) (–Cos θ; –1)
e) (Cos θ;–1)

9. Calcular el área de la región sombreada:



a) Sen θ b) Cos θ c) –Cos θ
d) $\frac{1}{2}$ Sen θ e) $-\frac{1}{2}$ Cos θ

10. Del gráfico, calcular: x(1–Cos θ)



a) 2Sen θ b) 3Cos θ c) Tg θ
d) Sen θ e) 2Sec θ

11. Indicar verdadero (V) ó falso (F):
( ) Sen Kπ = 0
( ) Cos(2k+1)π = –1
( ) Sen(4k+1)$\frac{\pi}{2}$ = 1

a) VVV b) FFV c) VVF
d) VFV e) VFF

12. Sabiendo que:

$$\sqrt{\text{Sen }x - 1} + 4^{\text{Cos }x} = \text{Sen }y$$

Calcular el valor de:

$$M = \text{Cos }x + \text{Cos }y$$

a) –2 b) –1 c) 0
d) 1 e) 2

13. Indicar las alternativas correctas:
I. Sen 1 > Sen 2
II. Cos 3 > Cos 4
III. Cos 6 > Sen 1
a) Solo I
b) Solo II
c) Solo III
d) Solo I y II
e) Solo II y III

14. Indicar verdadero (V) ó falso (F) según corresponda:

i. Sen 4α = $\sqrt{3}$ –1

ii. $\text{Cos}\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$

iii. $\text{Sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}$

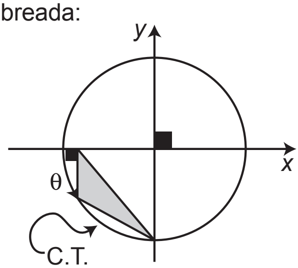
a) VVV b) FFF c) VVF
d) VFV e) FVF

15. Sabiendo que "α" ∈ <30°; 120°>; hallar la extensión de:

$$M = 2\text{Cos }2\alpha + 1$$

a) [–1;2> b) [0;3] c) <–2;–1>
d) [–2;2> e) [1;2]

16. Calcular el área de la región sombreada:



a) Csc θ
b) Sen θ
c) –Cos θ
d) $\frac{1}{2}$ Sen θ·Cos θ
e) $\frac{1}{2}$ Cos θ

17. Calcular el máximo valor de:

$$E = (3 – \text{Cos } x)(1 + \text{Cos } x)$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

18. Hallar la extensión de:

$$\text{Cos}\left(\frac{\pi}{2}\text{Sen } x\right)$$

a) [0; 1] b) [0; 2] c) [-2; –1]
d) [-2; 0] e)[1; 2]

19. Si "α" ∈ IIIC, hallar la variación del ángulo agudo "β" para el cual se cumple:

$$\text{Sen}\beta = \frac{\text{Cos}\alpha + 1}{2}$$

a) <10°;45°> b) <0°;30°>
c) <30°;60°> d) [30°;45°]
e) <30°;45°>

20. Calcular el máximo valor de:

$M = \text{Sen}^2\alpha + \text{Cos}^2\beta + 2(\text{Sen}\alpha + 3\text{Cos } \beta)$

a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 10

CLAVES II				
1. c	2. d	3. c	4. d	5. b
6. a	7. d	8. d	9. e	10. a
11. a	12. c	13. c	14. d	15. a
16. d	17. d	18. a	19. b	20. e

UNIDAD 8

Identidades trigonométricas para un mismo arco

Identidad Trigonométrica

Una identidad trigonométrica es una igualdad que contiene expresiones trigonométricas que se cumplen para todo valor admisible del ángulo.

Ejemplos

Identidad Algebraica: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Identidad Trigonométrica: $Sen^2\theta + Cos^2\theta = 1$

Ecuación Trigonométrica: $Sen\theta + Cos\theta = 1$

Para: $\theta = 90º$ Cumple

Para: $\theta = 30º$ No cumple

Identidades Fundamentales

Las identidades trigonométricas fundamentales sirven de base para la demostración de otras identidades más complejas.

Se clasifican en: Pitágoricas
Por cociente
Recíprocas

Identidades pitagóricas

$Sen^2\theta + Cos^2\theta = 1$
$1 + Tan^2\theta = Sec^2\theta$
$1 + Cot^2\theta = Csc^2\theta$

Sabemos que:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = 1$$

$$Sen^2\theta + Cos^2\theta = 1 \qquad \text{L.q.q.d}$$

Identidades por cociente

$$\text{Tan}\,\theta = \frac{\text{Sen}\theta}{\text{Cos}\theta}$$

$$\text{Cot}\,\theta = \frac{\text{Cos}\theta}{\text{Sen}\theta}$$

Demostración

$$\text{Tan}\theta = \frac{\text{ORDENADA}}{\text{ABSCISA}} = \frac{y}{x} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{\text{Sen}\theta}{\text{Cos}\theta} \qquad \text{L.q.q.d}$$

Identidades recíprocas

$\text{Sen}\theta \cdot \text{Csc}\theta = 1$
$\text{Cos}\theta \cdot \text{Sec}\theta = 1$
$\text{Tan}\theta \cdot \text{Cot}\theta = 1$

Demostración

$$1 = 1$$

$$\frac{y}{r} \cdot \frac{r}{y} = 1$$

$$\text{Sen}\theta \cdot \text{Csc}\theta = 1 \qquad \text{L.q.q.d}$$

Observación:

$$\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1$$

Despejando:	$\text{Sen}^2\theta = 1 - \text{Cos}^2\theta$	$\text{Sen}^2\theta = (1 + \text{Cos}\theta)(1 - \text{Cos}\theta)$
Así mismo:	$\text{Cos}^2\theta = 1 - \text{Sen}^2\theta$	$\text{Cos}^2\theta = (1 + \text{Sen}\theta)(1 - \text{Sen}\theta)$

Identidades auxiliares

A) $\text{Sen}^4\theta + \text{Cos}^4\theta = 1 - 2\text{Sen}^2\theta \cdot \text{Cos}^2\theta$

B) $\text{Sen}^6\theta + \text{Cos}^6\theta = 1 - 3\text{Sen}^2\theta \cdot \text{Cos}^2\theta$

C) $\text{Tan}\theta + \text{Cot}\theta = \text{Sec}\theta \cdot \text{Csc}\theta$

D) $\text{Sec}^2\theta + \text{Csc}^2\theta = \text{Sec}^2\theta \cdot \text{Csc}^2\theta$

E) $(1 + \text{Sen}\theta + \text{Cos}\theta)^2 = 2(1 + \text{Sen}\theta)(1 + \text{Cos}\theta)$

Demostraciones

A) $\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1$

al cuadrado:

$(\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta)^2 = 1^2$

$\text{Sen}^4\theta + \text{Cos}^4\theta + 2\text{Sen}^2\theta \bullet \text{Cos}^2\theta = 1$

$$\boxed{\text{Sen}^4\theta + \text{Cos}^4\theta = 1 - 2\text{Sen}^2\theta \bullet \text{Cos}^2\theta}$$

B) $\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1$

al cubo:

$(\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta)^3 = 1^3$

$\text{Sen}^6\theta + \text{Cos}^6\theta + 3\text{Sen}^2\theta \bullet \text{Cos}^2\theta(\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta) = 1$

$\text{Sen}^6\theta + \text{Cos}^6\theta + 3\text{Sen}^2\theta \bullet \text{Cos}^2\theta = 1$

$$\boxed{\text{Sen}^6\theta + \text{Cos}^6\theta = 1 - 3\text{Sen}^2\theta \bullet \text{Cos}^2\theta}$$

C) $\text{Tan}\theta + \text{Cot}\theta = \dfrac{\text{Sen}\theta}{\text{Cos}\theta} + \dfrac{\text{Cos}\theta}{\text{Sen}\theta}$

$\text{Tan}\theta + \text{Cot}\theta = \dfrac{\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta}{\text{Cos}\theta \bullet \text{Sen}\theta}$

$\text{Tan}\theta + \text{Cot}\theta = \dfrac{1 \bullet 1}{\text{Cos}\theta \bullet \text{Sen}\theta}$

$$\boxed{\text{Tan}\theta + \text{Cot}\theta = \text{Sec}\theta \bullet \text{Csc}\theta}$$

D) $\text{Sec}^2\theta + \text{Csc}^2\theta = \dfrac{1}{\text{Cos}^2\theta} + \dfrac{1}{\text{Sen}^2\theta}$

$\text{Sec}^2\theta + \text{Csc}^2\theta = \dfrac{\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta}{\text{Cos}^2\theta \bullet \text{Sen}^2\theta}$

$\text{Sec}^2\theta + \text{Csc}^2\theta = \dfrac{1 \bullet 1}{\text{Cos}^2\theta \bullet \text{Sen}^2\theta}$

$$\boxed{\text{Sec}^2\theta + \text{Csc}^2\theta = \text{Sec}^2\theta \bullet \text{Csc}^2\theta}$$

E) $(1+\text{Sen}\theta+\text{Cos}\theta)^2 = 1^2+(\text{Sen}\theta)^2+(\text{Cos}\theta)^2+2\text{Sen}\theta+2\text{Cos}\theta+2\text{Sen}\theta\bullet\text{Cos}\theta$

$= 1 + \text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta + 2\text{Sen}\theta + 2\text{cos}\theta + 2\text{Sen}\theta \bullet \text{Cos}\theta$

$= 2 + 2\text{Sen}\theta + 2\text{Cos}\theta + 2\text{Sen}\theta \bullet \text{Cos}\theta$

Agrupando convenientemente:

$= 2(1 + Sen\theta) + 2Cos\theta(1 + Sen\theta)$

$= (1 + Sen\theta)(2 + 2Cos\theta)$

$= 2(1 + Sen\theta)\ (1 + Cos\theta)$

Finalmente:

$$\boxed{(1 + Sen\theta + Cos\theta)^2 = 2(1 + Sen\theta)\ (1 + Cos\theta)}$$

Problemas para demostrar

Demostrar una identidad consiste en que ambos miembros de la igualdad propuesta son equivalentes. Para lograr dicho objetivo se siguen los siguientes pasos:

1. Se escoge el miembro "más complicado".
2. Se lleva a Senos y Cosenos (por lo general).
3. Se utilizan las identidades fundamentales y las diferentes operaciones algebraicas.

Ejemplos

1) Demostrar:

$$Secx \bullet (1 - Sen^2x) \bullet Cscx = Cotx$$

Se escoge el 1er miembro:

$$Secx \bullet (1 - Sen^2x) \bullet Cscx =$$

Se lleva a senos y cosenos:

$$\frac{1}{Cosx} \bullet (Cos^2x) \bullet \frac{1}{Senx} =$$

Se efectúa: $\quad Cosx \bullet \dfrac{1}{Senx} =$

$$Cotx = Cotx$$

2) Demostrar:

$$[Secx + Tanx - 1][1 + Secx - Tanx] = 2Tanx$$

Se escoge el 1er miembro:

$$[Secx + Tanx - 1][Secx - Tanx + 1] =$$

$$[Secx + (Tanx - 1)][Secx - (Tanx - 1)] =$$

Se efectua:

$$(Secx)^2 - (Tanx - 1)^2 =$$

$$(1 + Tan^2x) - (Tan^2x - 2Tanx - 1) =$$

$$1 + Tan^2x - Tan^2x + 2Tanx - 1 =$$

$$2Tanx = 2Tanx$$

Problemas para simplificar y reducir

Ejemplos

1) Reducir:

$$K = Sen^4x - Cos^4x + 2Cos^2x$$

Por diferencia de cuadrados

$K = (\overbrace{Sen^2x + Cos^2x}^{1})(Sen^2x - Cos^2x) + 2Cos^2x$

$K = Sen^2x - Cos^2x + 2Cos^2x$

$K = Sen^2x + Cos^2x$ $\qquad\qquad K = 1$

2) Simplificar:

$$E = \frac{1+Cosx}{Senx} - \frac{Senx}{1-Cosx}$$

$$E = \frac{\overbrace{(1+Cosx)(1-Cosx)}^{1-Cos^2x} - (Senx)(Senx)}{Senx(1-Cosx)}$$

$$E = \frac{\cancel{Sen^2x} - \cancel{Sen^2x}}{Senx(1-Cosx)} \qquad\qquad E = \frac{0}{Senx(1-Cosx)}$$

$E = 0$

Problemas condicionales

Dada una o varias condiciones se pide hallar una relación en términos de dicha o dichas condiciones.

Ejemplos

Si $Senx + Cosx = \frac{1}{2}$. Hallar: Senx•Cosx

Resolución

Del dato: $\qquad (Senx + Cosx)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$$Sen^2x + Cos^2x + 2Senx \cdot Cosx = \frac{1}{4}$$

$$2\text{Senx} \cdot \text{Cosx} = \frac{1}{4} - 1$$

$$2\text{Senx} \cdot \text{Cosx} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{Senx} \cdot \text{Cosx} = -\frac{3}{8}$$

Problemas para eliminar ángulos

La idea central es eliminar todas las expresiones algebraicas, y que al final se den relaciones independientes de la variable.

Ejemplos

Eliminar "x" a partir de: Senx = a
Cosx = b

Resolución

De: Senx = a
Cosx = b

$$\left.\begin{aligned} \text{Sen}^2x &= a^2 \\ \text{Cos}^2x &= b^2 \end{aligned}\right\} \text{Sumamos}$$

$$\begin{aligned} \text{Sen}^2x + \text{Cos}^2x &= a^2 + b^2 \\ \hline 1 &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Resumen de fórmulas

Fundamentales

PITAGÓRICAS

$$\boxed{\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1} \rightarrow \begin{cases} \text{Sen}^2\theta = 1 - \text{Cos}^2\theta \\ \text{Cos}^2\theta = 1 - \text{Sen}^2\theta \end{cases}$$

$$\boxed{1 + \text{Tan}^2\theta = \text{Sec}^2\theta} \rightarrow \begin{cases} \text{Tan}^2\theta = \text{Sec}^2\theta - 1 \\ \text{Sec}^2\theta - \text{Tan}^2\theta = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{1 + \text{Cot}^2\theta = \text{Csc}^2\theta} \rightarrow \begin{cases} \text{Cot}^2\theta = \text{Csc}^2\theta - 1 \\ \text{Csc}^2\theta - \text{Cot}^2\theta = 1 \end{cases}$$

DE COCIENTE

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Tan}\theta = \dfrac{\text{Sen}\theta}{\text{Cos}\theta} \\[2ex] \text{Cot}\theta = \dfrac{\text{Cos}\theta}{\text{Sen}\theta} \end{array}\right.$$

RECÍPROCAS

$$\boxed{\text{Sen}\theta \cdot \text{Csc}\theta = 1} \quad \text{Sen}\theta = \frac{1}{\text{Csc}\theta} \qquad \text{Csc}\theta = \frac{1}{\text{Sen}\theta}$$

$$\boxed{\text{Cos}\theta \cdot \text{Sec}\theta = 1} \quad \text{Cos}\theta = \frac{1}{\text{Sec}\theta} \qquad \text{Sec}\theta = \frac{1}{\text{Cos}\theta}$$

$$\boxed{\text{Tan}\theta \cdot \text{Cot}\theta = 1} \quad \text{Tan}\theta = \frac{1}{\text{Cot}\theta} \qquad \text{Cot}\theta = \frac{1}{\text{Tan}\theta}$$

Auxiliares

$\text{Sen}^4\theta + \text{Cos}^4\theta$	$= 1 - 2\text{Sen}^2\theta \cdot \text{Cos}^2\theta$
$\text{Sen}^6\theta + \text{Cos}^6\theta$	$= 1 - 3\text{Sen}^2\theta \cdot \text{Cos}^2\theta$
$\text{Tan}\theta + \text{Cot}\theta$	$= \text{Sec}\theta \cdot \text{Csc}\theta$
$\text{Sec}^2\theta + \text{Csc}^2\theta$	$= \text{Sec}^2\theta \cdot \text{Csc}^2\theta$
$(1 \pm \text{Sen}\theta \pm \text{Cos}\theta)^2$	$= 2(1 \pm \text{Sen}\theta)(1 \pm \text{Cos}\theta)$

Problemas I

1. Reducir:
   $(\text{Sen } x + \text{Cos } x)^2 + (\text{Sen } x - \text{Cos } x)^2$
   a) 1 b) 2
   c) 2Sen x Cos x d) 4Sen x Cos x
   e) 4

2. Simplificar:
   $(\text{Csc } x - \text{Ctg } x)(1 + \text{Cos } x)$
   a) 1 b) Sen x c) Cos x
   d) Sen^2x e) Cos^2x

3. Reducir:
   $(\text{Sen } x + \text{Cos } x \cdot \text{Ctg } x)\text{Sen } x$
   a) Tg x b) Ctg x c) 1
   d) Sec x e) Csc x

4. Reducir:
   $(\text{Sec } x - \text{Cos } x)\text{Ctg } x$
   a) 1 b) Sen x c) Sen^2x
   d) Sec x e) Cos^2x

5. Hallar "k" de la siguiente identidad:
   $$\frac{\text{Senx}}{1+\text{Cosx}} + \frac{1+\text{Cosx}}{\text{Senx}} = \frac{2}{k}$$
   a) Sen x b) Cos x c) Tg x
   d) Sec x e) Csc x

6. Reducir la expresión:
   $(\text{Sen}^2x - \text{Cos}^2x)\text{Csc}^2x + \text{Ctg}^2x$
   a) 0 b) 1 c) 2
   d) 3 e) 4

7. Reducir:
   $$\frac{\text{Secx} - \text{Cosx}}{\text{Cscx} - \text{Senx}}$$
   a) Tg x b) Tg^2x c) Tg^3x
   d) Ctg^2x e) Ctg^3x

8. Simplificar:
   $$\text{Tgx} + \frac{\text{Cosx}}{1+\text{Senx}}$$
   a) 2 b) 2Sec x c) 2Csc x
   d) Sec x e) Csc x

9. Hallar "A" en la identidad:
   $$\sqrt{\frac{1+\text{Senx}}{1-\text{Senx}}} = A + \text{Tg } x$$
   a) Sen x b) Cos x c) Ctg x
   d) Sec x e) Csc x

10. Reducir la expresión:
    $\text{Csc } x(\text{Csc } x+\text{Sen } x) - \text{Ctg } x(\text{Ctg } x-\text{Tg } x)$
    a) 0 b) 1 c) 2
    d) 3 e)4

11. Reducir:
    $$\frac{\text{Sen}^3x + \text{Cos}^3x}{1-\text{Senx}\cdot\text{Cosx}} - \text{Cosx}$$
    a) Sen x b) Cos x c) Tg x
    d) Ctg x e) Sec x

12. Reducir.
    $$\frac{1}{\text{Secx}+\text{Tgx}} + \frac{1}{\text{Ctgx}}$$
    a) Sen x b) Cos x c) Sec x
    d) Csc x e) Tg x

13. Si: Tg x + Ctg x = 3
    Hallar:
    $\text{Tg}^4x + \text{Ctg}^4x$
    a) 41 b) 43 c) 45
    d) 47 e) 49

14. Si: Tg x + Ctg x = 3
    Hallar: $(\text{Sen } x + \text{Cos } x)^2$
    a) 5 b) 5/2 c) 5/3
    d) 5/4 e) 5/6

15. Si: Sen x + Cos x = n
    Hallar:
    Tg x + Ctg x + Sec x + Csc x
    a) n+1 b) n -1 c) $\frac{2}{n+1}$
    d) $\frac{2}{n-1}$ e) $\frac{1}{n-1}$

16. Si la expresión es independiente de "x", hallar: $\frac{a}{b}$
    $3a(\text{Sen}^4x+\text{Cos}^4x)+b(\text{Sen}^6x + \text{Cos}^6x)$
    a) 1/5 b) -1/3 c) -1/2
    d) -2/3 e) 5/2

17. Si: $\text{Cos } x = \frac{1}{a+b}$; $\text{Ctg } x = \frac{1}{a-b}$
    Eliminar "x"
    a) ab = 1 b) 2ab = 1 c) 3ab = 1
    d) 4ab = 1 e) 5ab = 1

18. Simplificar:
   (Sec x + Tg x - 1)(Sec x – Tg x + 1)
   a) 2Sen x b) 2Cos x c) 2Tg x
   d) 2Sec x e) 2Csc x

19. Simplificar:
   $$\text{Sec x}\cdot\text{Csc x} - \text{Ctg x} + \frac{1}{\text{Sec x} + \text{Tg x}}$$
   a) Sen x b) Cos x c) Sec x
   d) Csc x e) Ctg x

20. Si: 5Sec x – 4Tg x = 3
   Calcular:
   A = Sen x + Cos x
   a) 1,0 b) 1,2 c) 1,4
   d) 1,6 e) 1,8

CLAVES I				
1. b	2. b	3. c	4. b	5. a
6. b	7. c	8. d	9. d	10. d
11. a	12. c	13. d	14. c	15. d
16. c	17. d	18. c	19. c	20. c

Problemas II

1. Simplificar:
   $$P = \frac{(\text{Senx} + \text{Cosx})(\text{Senx} - \text{Cosx})}{\text{Sen}^4\text{x} - \text{Cos}^4\text{x}}$$
   a) 0 b) 1 c) –1
   d) Sen²x e) Cos²x

2. Reducir:
   $$Q = \frac{(1+\text{Senx})^{-1} + (1-\text{Senx})^{-1}}{(1-\text{Cosx})^{-1} + (1+\text{Cosx})^{-1}}$$
   a) 1 b) Tan x c) Cot x
   d) Tan²x e) Cot²x

3. Reducir:
   $$W = \frac{\text{Secx}(\text{Secx} - \text{Cosx}) + \text{Cscx}(\text{Cscx} - \text{Senx})}{\text{Cotx}(\text{Tanx} - \text{Cotx}) - \text{Tanx}(\text{Cotx} + \text{Tanx})}$$
   a) –1 b) 1 c) –2
   d) 2 e) 0

4. Reduzca:
   $$J = \frac{\text{Sec}^2\text{x} - 2\text{Sen}^2\text{x} - \text{Tan}^2\text{x}}{\text{Csc}^2\text{x} - 2\text{Cos}^2\text{x} - \text{Cot}^2\text{x}}$$
   a) –2 b) 2 c) –1
   d) 1 e) 0

5. Hallar "n" en la siguiente identidad trigonométrica:
   $(1+\text{Tan x})^2+(1+\text{Cotx})^2=(\text{Secx}+\text{Cscx})^n$
   a) 0 b) 1 c) 2
   d) 3 e) 4

6. Reducir:
   $$H = \frac{\text{Sen}^4\text{x}(1+\text{Sen}^2\text{x}) + \text{Cos}^4\text{x}(1+\text{Cos}^2\text{x}) - 2}{\text{Sen}^4\text{x}(1-\text{Sen}^2\text{x}) + \text{Cos}^4\text{x}(1-\text{Cos}^2\text{x})}$$
   a) 1 b) 5 c) –1
   d) –5 e) $-\frac{1}{5}$

7. Reducir:
   $$U = \frac{(1+\text{Senx}-\text{Cosx})^2}{(2+2\text{Senx})} - \frac{(1-\text{Senx}+\text{Cosx})^2}{(2+2\text{Cosx})}$$
   a) 0 b) 2
   c) Cos x– Sen x d) Sen x + Cos x
   e) Sen x – Cos x

8. Indicar el equivalente de:
   $$M = \left(\frac{\text{Cosx}}{1-\text{Senx}} - \frac{1}{\text{Cotx}}\right)^2 \bullet \left(\frac{\text{Senx}}{1+\text{Cosx}} + \frac{1}{\text{Tanx}}\right)^2$$
   a) Tan²x+Cot²x
   b) Sec²x+Cos²x
   c) Sen²x+Csc²x
   d) Sec²x+Csc²x
   e) 1

9. Simplificar:
   $$L = \frac{(2\text{Tanx} + \text{Secx})(\text{Cscx} - \text{Senx})}{\text{Cotx} + 2\text{Cosx}}$$
   a) 1 b) Cos²x c) Cos⁴x
   d) Tan²x e) Cot²x

10. Siendo: Sen x · Cos x = $\frac{3}{8}$
   Hallar:
   $$T = \frac{\text{Senx} + \text{Cosx}}{\text{Senx} - \text{Cosx}}$$
   a) 1 b) 7 c) $\frac{1}{7}$
   d) $\sqrt{7}$ e) $\frac{\sqrt{7}}{7}$

11. Calcular:

$$Y=\frac{(Sen3°+\cos 3°)^2+(Sen3°-Cos3°)^2}{(Tan1°+Cot1°)^2-(Tan1°-Cot1°)^2}$$

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1
d) 2 e) 3

12. Simplificar:

$$P=\frac{Csc^2x+Sen^2x-1}{Sec^2x+Cos^2x-1}$$

a) 1 b) Cot^2x c) Tan^2x
d) Cot^6x e) Tan^6x

13. Simplificar:

$$W=\frac{[Secx+Tanx+1]\cdot[Secx-Tanx-1]}{[Cscx+Cotx-1]\cdot[Cscx-Cotx+1]}$$

a) $-Tan^2x$ b) Tan^2x c) 1
d) $-Cot^2x$ e) Cot^2x

14. Siendo:
(Sec A + Tan A) (Csc B – Cot B) = k
Hallar:
(Tan A – Sec A)(Cot B + Csc B)

a) 1 b) –k c) $-k^{-1}$
d) k e) k^{-1}

15. Reducir:
$Q = 1 - Tan^2x + Tan^4x - Tan^6x + \dots$

a) Tan^2x b) Sec^2x c) Csc^2x
d) Cos^2x e) Sen^2x

16. Sabiendo que:
Sen x + Cos x = m
Hallar:

$$V=\frac{Sec^2x+Csc^2x-1}{Tanx+Cotx-1}$$

a) $\frac{2}{m^2-1}$ b) $\frac{1+m^2}{1-m^2}$ c) $\frac{m^2-1}{m^2+1}$
d) $\frac{1-m^2}{1+m^2}$ e) $\frac{m^2+1}{m^2-1}$

17. Calcular:

$$F=2\sqrt{1-2Cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot Sen\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\sqrt{3}+1$
d) $1-\sqrt{3}$ e) $\sqrt{3}-1$

18. Simplificar:

$$H=\sqrt[3]{\frac{Tan^2x-Sen^2x}{Cot^2x-Cos^2x}}$$

a) 1 b) Tan^2x c) Cot^2x
d) Tan^6x e) Cot^6x

19. Dado:
Tan x – Cot x = 3
Halle:
$J = Tan^3x - Cot^3x$

a) 12 b) 15 c) 27
d) 33 e) 36

20. Si: Cos x(1+Cos x) = 1
Hallar:
$M = Csc^2x + Cos^2x$

a) 0 b) 1 c) $\sqrt{2}$
d) 2 e) 4

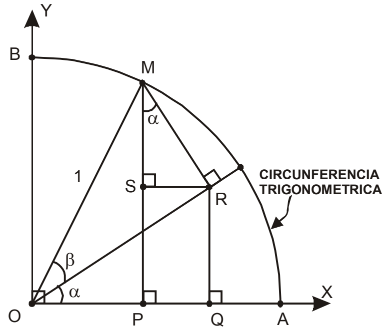
CLAVES II				
1. b	2. d	3. a	4. c	5. c
6. d	7. e	8. d	9. a	10. d
11. b	12. b	13. a	14. c	15. d
16. e	17. e	18. b	19. e	20. d

UNIDAD 9

Identidades trigonométricas para el arco compuesto

Identidades trigonométricas para la suma de dos arcos

A partir del gráfico:



$\text{Sen}(\alpha + \beta) = ?$

$\text{Sen}(\alpha + \beta) = MP = PS + SM = QR + SM$

$\triangle OQR \quad OQ = \underbrace{OR}_{\text{Cos}\beta} \text{Sen}\alpha = \text{Sen}\alpha \cdot \text{Cos}\beta$

$\triangle MSR \quad SR = \underbrace{MR}_{\text{Sen}\beta} \text{Cos}\alpha = \text{Cos}\alpha \cdot \text{Sen}\beta$

Luego:

$$\boxed{\text{Sen}(\alpha + \beta) = \text{Sen}\alpha \cdot \text{Cos}\beta + \text{Cos}\alpha \cdot \text{Sen}\beta}$$

$\text{Cos}(\alpha + \beta) = ?$

$\text{Cos}(\alpha + \beta) = OP = OQ - PQ = OQ - SR$

$\triangle OQR \quad OR = \underbrace{OR}_{\text{Cos}\beta} \text{Cos}\alpha = \text{Cos}\alpha \cdot \text{Cos}\beta$

$\triangle MSR \quad SM = \underbrace{MR}_{\text{Sen}\beta} \text{Sen}\alpha = \text{Sen}\alpha \cdot \text{Sen}\beta$

Luego:

$$\boxed{\text{Cos}(\alpha + \beta) = \text{Cos}\alpha \cdot \text{Cos}\beta - \text{Sen}\alpha \cdot \text{Sen}\beta}$$

$Tan(\alpha + \beta) = ?$

$$Tan(\alpha + \beta) = \frac{Sen(\alpha+\beta)}{Cos(\alpha+\beta)} = \frac{Sen\alpha \bullet Cos\beta + Cos\alpha \bullet Sen\beta}{Cos\alpha \bullet Cos\beta - Sen\alpha \bullet Sen\beta}$$

Dividiendo a la expresión por $Cos\alpha Cos\beta$

$$Tan(\alpha + \beta) = \frac{\dfrac{Sen\alpha \bullet Cos\beta}{Cos\alpha \bullet Cos\beta} + \dfrac{Cos\alpha \bullet Sen\beta}{Cos\alpha \bullet Cos\beta}}{\dfrac{Cos\alpha \bullet Cos\beta}{Cos\alpha \bullet Cos\beta} - \dfrac{Sen\alpha \bullet Sen\beta}{Cos\alpha \bullet Cos\beta}}$$

Luego:

$$\boxed{Tan(\alpha + \beta) = \frac{Tan\alpha + Tan\beta}{1 - Tan\alpha \bullet Tan\beta}}$$

Observaciones

$Cot(\alpha + \beta)$	$= \dfrac{1}{Tan(\alpha+\beta)}$
$Sec(\alpha + \beta)$	$= \dfrac{1}{Cos(\alpha+\beta)}$
$Csc(\alpha + \beta)$	$= \dfrac{1}{Sen(\alpha+\beta)}$

Ejemplos

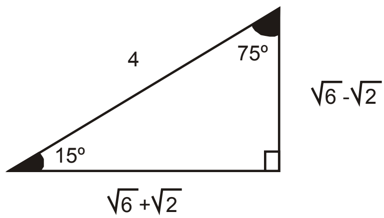
Sen 75º = ?

Sen(45º + 30º) = Sen45º • Cos30º + Sen30º • Cos45º

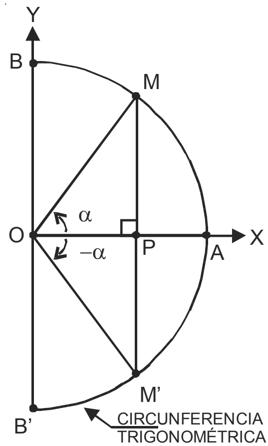
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \bullet \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \bullet \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$Sen75º = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$



De la circunferencia trigonométrica se observa que:



- $Sen(-\alpha) = M'P$
  $Sen(\alpha) = MP$
  $M'P = -MP$ $\qquad Sen(-\alpha) = -Sen\alpha$
- $Cos(-\alpha) = OP$ $\qquad Cos(-\alpha) = Cos\alpha$
  $Cos(\alpha) = OP$

Asi mismo:

- $Cot(-\alpha) = -Cot\alpha$
- $Sec(-\alpha) = Sec\alpha$
- $Csc(-\alpha) = -Csc\alpha$
- $Tan(-\alpha) = -Tan\alpha$

Identidades trigonométricas para la diferencia de dos arcos

$Sen(\alpha - \beta) = ?$

$$Sen[\alpha + (-\beta)] = Sen\alpha \cdot \underbrace{Cos(-\beta)}_{Cos\beta} + Cos\alpha \cdot \underbrace{Sen(-\beta)}_{-Sen\beta}$$

Luego:

$$\boxed{Sen(\alpha - \beta) = Sen\alpha \cdot Cos\beta - Cos\alpha \cdot Sen\beta}$$

$Cos(\alpha - \beta) = ?$

$$Cos[\alpha + (-\beta)] = Cos\alpha \cdot \underbrace{Cos(-\beta)}_{Cos\beta} - Sen\alpha \cdot \underbrace{Sen(-\beta)}_{-Sen\beta}$$

Luego:

$$\boxed{Cos(\alpha - \beta) = Cos\alpha \cdot Cos\beta + Sen\alpha \cdot Sen\beta}$$

$Tan(\alpha - \beta) = ?$

$$Tan[\alpha + (-\beta)] = \frac{Tan\alpha + \overbrace{Tan(-\beta)}^{-Tan\beta}}{1 - Tan\alpha \cdot \underbrace{Tan(-\beta)}_{-Tan\beta}}$$

Luego:

$$\boxed{Tan(\alpha - \beta) = \frac{Tan\alpha - Tan\beta}{1 + Tan\alpha \cdot Tan\beta}}$$

Observaciones:

Así mismo:

$\text{Cot}(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{\text{Tan}(\alpha-\beta)}$
$\text{Sec}(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{\text{Cos}(\alpha-\beta)}$
$\text{Csc}(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{\text{Sen}(\alpha-\beta)}$

Ejemplos

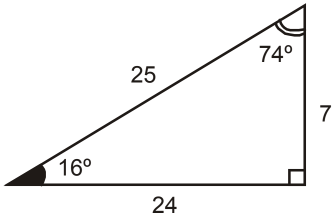
Cos16º = ?

$$\text{Cos}(53^\circ-37^\circ)=\text{Cos}53^\circ\bullet\text{Cos}37^\circ+\text{Sen}53^\circ\bullet\text{Sen}37^\circ$$

$$=\frac{3}{5}\bullet\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\bullet\frac{3}{5}$$

$$=\frac{12}{25}+\frac{12}{25}$$

$$\text{Cos}16^\circ=\frac{24}{25}$$

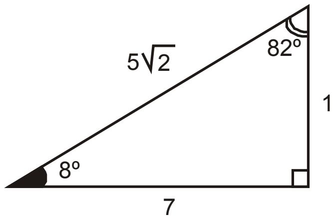


Tan8º = ?

$$\text{Tan}(45^\circ-37^\circ)=\frac{\text{Tan}45^\circ-\text{Tan}37^\circ}{1+\text{Tan}45^\circ\bullet\text{Tan}37^\circ}$$

$$=\frac{1-\frac{3}{4}}{1+1\bullet\frac{3}{4}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}}$$

$$\text{Tan}8^\circ=\frac{1}{7}$$



Propiedades

$$\boxed{\text{Sen}(\alpha+\beta)\bullet\text{Sen}(\alpha-\beta)=\text{Sen}^2\alpha-\text{Sen}^2\beta}$$

Demostración

Sabemos que:

* $\text{Sen}(\alpha+\beta)=\text{Sen}\alpha\bullet\text{Cos}\beta+\text{Cos}\alpha\bullet\text{Sen}\beta$ i
* $\text{Sen}(\alpha-\beta)=\text{Sen}\alpha\bullet\text{Cos}\beta-\text{Cos}\alpha\bullet\text{Sen}\beta$ ii

Multiplicando miembro a miembro i •ii, tenemos:

$$
\begin{aligned}
\text{Sen}(\alpha+\beta)\bullet\text{Sen}(\alpha-\beta) &= [(\text{Sen}\alpha\bullet\text{Cos}\beta)^2-(\text{Cos}\alpha\bullet\text{Sen}\beta)^2]\\
&= \text{Sen}^2\alpha\bullet\text{Cos}^2\beta-\text{Cos}^2a\bullet\text{Sen}^2\beta\\
&= \text{Sen}^2\alpha\bullet(1-\text{Sen}^2\beta)-(1-\text{Sen}^2\alpha)\bullet\text{Sen}^2\beta\\
&= \text{Sen}^2\alpha-\text{Sen}^2\alpha\bullet\text{Sen}^2\beta-\text{Sen}^2\beta+\text{Sen}^2\alpha\bullet\text{Sen}^2\beta
\end{aligned}
$$

$$\text{Sen}(\alpha+\beta)\bullet\text{Sen}(\alpha-\beta)=\text{Sen}^2\alpha-\text{Sen}^2\beta \quad \text{L.q.q.d}$$

Ejemplos

- $\text{Sen}(45^\circ+\theta)\bullet\text{Sen}(45^\circ-\theta)=\text{Sen}^2 45^\circ-\text{Sen}^2\theta=\dfrac{1}{2}-\text{Sen}^2\theta$
- $\text{Sen}^2 3x-\text{Sen}^2 2x=\text{Sen}(3x+2x)\bullet\text{Sen}(3x-2x)=\text{Sen}5x\bullet\text{Sen}x$

$$\boxed{\text{Tan}\alpha+\text{Tan}\beta+\text{Tan}(\alpha+\beta)\bullet\text{Tan}\alpha\bullet\text{Tan}\beta=\text{Tan}(\alpha+\beta)}$$

Demostración

Sabemos que:

$$\frac{\text{Tan}\alpha+\text{Tan}\beta}{1-\text{Tan}\alpha\bullet\text{Tan}\beta}=\text{Tan}(\alpha+\beta)$$

$$
\begin{aligned}
\text{Tan}\alpha+\text{Tan}\beta &= \text{Tan}(\alpha+\beta)\bullet[1-\text{Tan}\alpha\bullet\text{Tan}\beta]\\
\text{Tan}\alpha+\text{Tan}\beta &= \text{Tan}(\alpha+\beta)-\text{Tan}(\alpha+\beta)\bullet\text{Tan}\alpha\bullet\text{Tan}\beta
\end{aligned}
$$

$$\text{Tan}\alpha+\text{Tan}\beta+\text{Tan}(\alpha+\beta)\bullet\text{Tan}\alpha\bullet\text{Tan}\beta=\text{Tan}(\alpha+\beta) \quad \text{L.q.q.d}$$

Ejemplos

- $M=\text{Tan}2\theta+\underbrace{\text{Tan}\theta}_{\text{Tan}(2\theta+\theta)}+\text{Tan}3\theta\bullet\text{Tan}2\theta\bullet\text{Tan}\theta \qquad M=\text{Tan}(2\theta+\theta)$

  $M=\text{Tan}\,3\theta$

- $N=\text{Tan}70^\circ+\underbrace{\text{Tan}10^\circ}_{\text{Tan}(70^\circ+10^\circ)}+\text{Tan}80^\circ\bullet\text{Tan}70^\circ\bullet\text{Tan}10^\circ \qquad N=\text{Tan}(70^\circ+10^\circ)$

  $N=\text{Tan}\,80^\circ$

- $P=\text{Tan}55^\circ+\underbrace{\underbrace{\text{Tan}5^\circ+}_{\text{Tan}60^\circ}}_{\text{Tan}(55^\circ+5^\circ)}\sqrt{3}\bullet\text{Tan}55^\circ\bullet\text{Tan}5^\circ \qquad P=\text{Tan}(55^\circ+5^\circ)$

  $P=\text{Tan}60^\circ=\sqrt{3}$

- $Q = \text{Tan}13° + \text{Tan}32° + \text{Tan}13° \bullet \text{Tan}32°$

$$Q = \text{Tan}13° + \text{Tan}32° + \underbrace{\underbrace{1}_{\text{Tan}45°}}_{\text{Tan}(13°+32°)} \bullet \text{Tan}13° \bullet \text{Tan}32° \qquad Q = \text{Tan}(13° + 32°)$$

$$Q = \text{Tan}45° = 1$$

$$\boxed{\text{Si: } \alpha + \beta + \theta = 180° \qquad \text{Tan}\alpha + \text{Tan}\beta + \text{Tan}\theta = \text{Tan}\alpha \bullet \text{Tan}\beta \bullet \text{Tan}\theta}$$

Demostración

Por condición:

$$\alpha + \beta + \theta = 180°$$

$$\alpha + \beta = 180° - \theta$$

$$\text{Tan}(\alpha + \beta) = \text{Tan}(180° - \theta)$$

$$\frac{\text{Tan}\alpha + \text{Tan}\beta}{1 - \text{Tan}\alpha \bullet \text{Tan}\beta} = -\text{Tan}\theta$$

$$\text{Tan}\alpha + \text{Tan}\beta = -\text{Tan}\theta \bullet (1 - \text{Tan}\alpha \bullet \text{Tan}\beta)$$

$$\text{Tan}\alpha + \text{Tan}\beta = -\text{Tan}\theta + \text{Tan}\alpha \bullet \text{Tan}\beta \bullet \text{Tan}\theta$$

$$\text{Tan}\alpha + \text{Tan}\beta + \text{Tan}\theta = \text{Tan}\alpha \bullet \text{Tan}\beta \bullet \text{Tan}\theta \qquad \text{L.q.q.d}$$

Ejemplos

En un ΔABC, así: Tan A = 3 y Tan B = 2; Hallar "Tan C"

Resolución

En todo ΔABC:

A + B + C = 180º, entonces

se cumplirá:

$$\underbrace{\text{TanA}}_{3} + \underbrace{\text{TanB}}_{2} + \underbrace{\text{TanC}}_{?} = \underbrace{\text{TanA}}_{3} \bullet \underbrace{\text{TanB}}_{2} \bullet \underbrace{\text{TanC}}_{?}$$

Reemplazando datos:

$$3 + 2 + \text{TanC} = 3 \bullet 2 \bullet \text{TanC}$$

$$5 + \text{TanC} = 6 \bullet \text{TanC}$$

$$5 = 5 \bullet \text{TanC}$$

$$\text{TanC} = 1$$

Ejemplos

Calcular:

$$E = \text{Tan}\frac{\pi}{7} + \text{Tan}\frac{2\pi}{7} + \text{Tan}\frac{4\pi}{7} - \text{Tan}\frac{\pi}{7} \bullet \text{Tan}\frac{2\pi}{7} \bullet \text{Tan}\frac{4\pi}{7}$$

Resolución

Se nota que: $\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi}{7}+\frac{4\pi}{7}=\pi$

$$\text{Tan}\frac{\pi}{7}+\text{Tan}\frac{2\pi}{7}+\text{Tan}\frac{4\pi}{7}=\text{Tan}\frac{\pi}{7}\bullet\text{Tan}\frac{2\pi}{7}\bullet\text{Tan}\frac{4\pi}{7}$$

Reemplazamos:

$$E=\text{Tan}\frac{\pi}{7}\bullet\cancel{\text{Tan}\frac{2\pi}{7}}\bullet\text{Tan}\frac{4\pi}{7}-\text{Tan}\frac{\pi}{7}\bullet\cancel{\text{Tan}\frac{2\pi}{7}}\bullet\text{Tan}\frac{4\pi}{7}$$

$E = 0$

$$\boxed{\text{Si: } \alpha+\beta+\theta=90^\circ \qquad \text{Tan}\alpha\bullet\text{Tan}\beta+\text{Tan}\beta\bullet\text{Tan}\theta+\text{Tan}\alpha\bullet\text{Tan}\theta=1}$$

Demostración

Por condición:

$$\alpha+\beta+\theta = 90^\circ$$

$$\alpha+\beta = 90^\circ-\theta$$

$$\text{Tan}(\alpha+\beta) = \text{Tan}(90^\circ-\theta)$$

$$\frac{\text{Tan}\alpha+\text{Tan}\beta}{1-\text{Tan}\alpha\bullet\text{Tan}\beta} = +\text{Cot}\theta$$

$$\frac{\text{Tan}\alpha+\text{Tan}\beta}{1-\text{Tan}\alpha\bullet\text{Tan}\beta} = \frac{1}{\text{Tan}\theta}$$

$$(\text{Tan}\alpha+\text{Tan}\beta)\bullet\text{Tan}\theta = 1-\text{Tan}\alpha\bullet\text{Tan}\beta$$

$$\text{Tan}\alpha\bullet\text{Tan}\theta+\text{Tan}\beta\bullet\text{Tan}\theta = 1-\text{Tan}\alpha\bullet\text{Tan}\beta$$

$\text{Tan}\alpha\bullet\text{Tan}\beta+\text{Tan}\beta\bullet\text{Tan}\theta+\text{Tan}\alpha\bullet\text{Tan}\theta= 1$ L.q.q.d

Ejemplo

Calcular:

$$W = \text{Tan}20^\circ\bullet\text{Tan}30^\circ+\text{Tan}30^\circ\bullet\text{Tan}40^\circ+\text{Tan}20^\circ\bullet\text{Tan}40^\circ$$

Notamos que:

$20^\circ + 30^\circ + 40^\circ = 90^\circ$, entonces

Se cumple que:

$$\underbrace{\text{Tan}20^\circ\bullet\text{Tan}30^\circ+\text{Tan}30^\circ\bullet\text{Tan}40^\circ+\text{Tan }20^\circ\bullet\text{Tan}40^\circ}_{W}=1$$

$W = 1$

Resumen de fórmulas

Básicas

* $\text{Sen}(\alpha \pm \beta) = \text{Sen}\alpha \cdot \text{Cos}\beta \pm \text{Cos}\alpha \cdot \text{Sen}\beta$
* $\text{Cos}(\alpha \pm \beta) = \text{Cos}\alpha \cdot \text{Cos}\beta \mp \text{Sen}\alpha \cdot \text{Sen}\beta$
* $\text{Tan}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\text{Tan}\alpha \pm \text{Tan}\beta}{1 \mp \text{Tan}\alpha \cdot \text{Tan}\beta}$

Observaciones

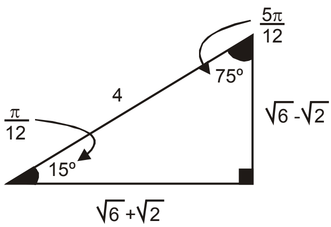
* $\text{Cot}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{1}{\text{Tan}(\alpha \pm \beta)}$
* $\text{Sec}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{1}{\text{Cos}(\alpha \pm \beta)}$
* $\text{Csc}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{1}{\text{Sen}(\alpha \pm \beta)}$

Propiedades

- $\text{Sen}(\alpha + \beta) \cdot \text{Sen}(\alpha - \beta) = \text{Sen}^2\alpha - \text{Sen}^2\beta$
- $\text{Tan}\alpha + \text{Tan}\beta + \text{Tan}(\alpha + \beta) \cdot \text{Tan}\alpha \cdot \text{Tan}\beta = \text{Tan}(\alpha + \beta)$
- Si: $\alpha + \beta + \theta = 180^\circ$ $\quad \text{Tan}\alpha + \text{Tan}\beta + \text{Tan}\theta = \text{Tan}\alpha \cdot \text{Tan}\beta \cdot \text{Tan}\theta$
- Si: $\alpha + \beta + \theta = 90^\circ$ $\quad \text{Tan}\alpha \cdot \text{Tan}\beta + \text{Tan}\beta \cdot \text{Tan}\theta + \text{Tan}\alpha \cdot \text{Tan}\theta = 1$

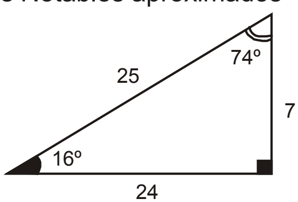
Notas

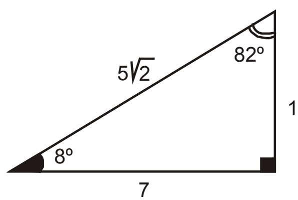
- ⊿ Notable exacto



∢ / R.T.	$15^\circ = \frac{\pi}{12}$	$75^\circ = \frac{5\pi}{12}$
Sen y Cos	$\frac{\sqrt{6} \mp \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{4}$
Tan y Cot	$2 \mp \sqrt{3}$	$2 \pm \sqrt{3}$
Sec y Csc	$\sqrt{6} \mp \sqrt{2}$	$\sqrt{6} \pm \sqrt{2}$

- ⊿s Notables aproximados





Problemas I

1. Si: Sen $\alpha = \frac{12}{13}$ ^ Cos $\beta = \frac{4}{5}$; α y β ángulos agudos.
   Calcular:
   Sen($\alpha+\beta$) = ...
   Cos($\alpha+\beta$) = ...
   Tan($\alpha+\beta$) = ...

2. Si: Cos $\theta = \frac{8}{17}$ ^ Sen $\phi = \frac{7}{25}$; θ y ϕ ángulos agudos
   Calcular:
   Sen ($\theta-\phi$) = ...
   Cos ($\theta-\phi$) = ...
   Tan($\theta-\phi$) = ...

3. El valor simplificado de:
   es: $E = \dfrac{2Sen(30^\circ + x) - Cosx}{Senx}$
   a) 1 b) $\sqrt{3}$ c) $2\sqrt{3}$
   d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e) 2

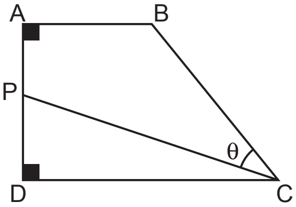
4. Calcular el valor de:
   E = $(Cos70^\circ+Cos10^\circ)^2+(Sen70^\circ+Sen10^\circ)^2$
   a) 1 b) 2 c) 3
   d) 4 e) $\dfrac{1}{2}$

5. ¿A qué es igual?
   E = Sen(15°+x)·Cos x–Cos(15°+x) · Sen x
   a) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ b) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ c) $\dfrac{1}{2}$
   d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e)0

6. La expresión:
   $$E = \frac{Sen9^\circ \cdot Cos6^\circ + Cos9^\circ \cdot Sen6^\circ}{Cos9^\circ \cdot Cos6^\circ - Sen9^\circ \cdot Sen6^\circ}$$
   es igual a:
   a) 1 b) $2+\sqrt{3}$ c) $2-\sqrt{3}$
   d) $2\sqrt{3}$ e) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

7. Si: Sen 15° = $\dfrac{\sqrt{a-\sqrt{b}}}{2}$
   Indica el valor de: (b - a)
   a) –1 b) 1 c) 2
   d) –2 e) 3

8. Si: $\overline{AB}$=AP=$2\sqrt{2}$;
   AD=$\overline{DC}$=$\sqrt{6}+\sqrt{2}$
   Hallar: Cos θ



   a) $\dfrac{2}{3}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{3}{4}$
   d) $\dfrac{1}{4}$ e) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

9. Hallar: $\sqrt{\dfrac{\theta}{a}}$
   Sen5°+Cos 5°= $\sqrt{a}$ Senθ°; 0°<θ°< 90°
   a) 1 b) 3 c) 5
   d) $\dfrac{1}{3}$ e) $\dfrac{1}{5}$

10. Hallar: $\sqrt{\dfrac{\theta}{10a}}$

$\text{Sen } 20° + \sqrt{3}\ \text{Cos } 20° = a\text{Sen } \theta°\ ;\ 0° < \theta° < 90°$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

11. ¿A qué es igual?

$$E = 2\text{Sen } 20° + \sqrt{3}\ \text{Sen } 10°$$

a) Sen 20° b) Tan 10° c) Cos 10°
d) Tan 20° e) Cos 20°

12. El valor de:

$$E = \text{Cos } 40° - 2\text{Cos } 50° \cdot \text{Cos } 10°$$

es:

a) $-\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
d) $\dfrac{1}{2}$ e) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

13. ¿A qué es igual?

$$E = \frac{\text{Cot}70° + \text{Tan}25°}{1 - \text{Cot}70° \cdot \text{Tan}25°}$$

a) –1 b) 1 c) $\sqrt{3}$
d) $-\sqrt{3}$ e) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

14. El valor de:

$$E = \frac{\text{Tan}\frac{\pi}{5} - \text{Tan}\frac{\pi}{30}}{1 + \text{Tan}\frac{\pi}{5} \cdot \text{Tan}\frac{\pi}{30}}$$

es:

a) 1 b) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ c) –1
d) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e) $-\sqrt{3}$

15. Calcular el valor de:

$$E = \frac{\text{Tan}50° - \text{Tan}40°}{4\text{Tan}10°}$$

a) $\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{2}{3}$ c) $\dfrac{3}{2}$
d) $\dfrac{4}{3}$ e) $\dfrac{5}{2}$

16. ¿A qué es igual?

$$E = \frac{\text{Tan}2°}{\text{Tan}46° - \text{Tan}44°}$$

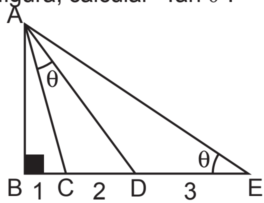
a) 2 b) $\dfrac{1}{2}$ c) $-\dfrac{1}{2}$
d) –2 e) 1

17. Calcular el valor aproximado de:

$$E = 117\ \text{Tan } 21° + 31\ \text{Tan } 29°$$

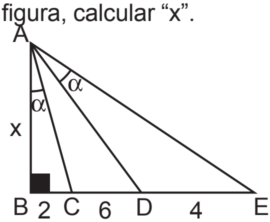
a) 59 b) 60 c) 61
d) 62 e) 63

18. En la figura, calcular “Tan θ“.



a) $\dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{1}{6}$
d) 2 e) 3

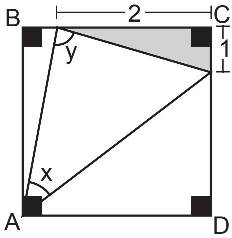
19. En la figura, calcular “x”.



a) $4\sqrt{3}$ b) $4\sqrt{6}$ c) $3\sqrt{6}$
d) $3\sqrt{3}$ e) $4\sqrt{2}$

20. Si ABCD es un cuadrado de lado "3". ¿A qué es igual?

$$E = \frac{Sen(x-y)}{7Cosx \cdot Cosy}$$



a) $\frac{8}{9}$ b) $-\frac{9}{10}$ c) $-\frac{8}{9}$
d) $\frac{9}{10}$ e) $-\frac{10}{9}$

CLAVES I				
1.*	2.*	3. b	4. c	5. b
6. c	7. b	8. b	9. c	10. b
11. c	12. a	13. b	14. b	15. a
16. b	17. c	18. b	19. b	20. c

Problemas II

1. Calcule aproximadamente: Tg 24°
a) $\frac{1}{7}$ b) $\frac{7}{24}$ c) 7
d) $\frac{73}{161}$ e) $\frac{161}{73}$

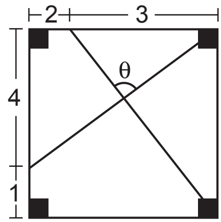
2. Reducir la expresión:
$A = [Sen(\alpha+\beta) - Sen(\alpha-\beta)]\ Sec\ \alpha$
a) 2Sen β b) Cos β c) Sen α
d) Cos α e) 1

3. Halle el valor de la expresión:
Cos(x-y) - 2Sen x · Sen y ;$0°<x,y<90°$
Si: Sen x = Cos y
a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $\frac{3}{5}$ e) $\frac{4}{5}$

4. El valor de la expresión:
$$\frac{Sen67° \cdot Cos14° - Sen14° \cdot Cos67°}{Cos38° \cdot Cos22° - Sen38° \cdot Sen22°}$$
es:
a) 0,2 b) 0,4 c) 0,5
d) 1,2 e) 1,6

5. Calcular:
$$\frac{Tg(50°+x)+Tg(10°-x)}{1-Tg(50°+x)Tg(10°-x)}$$
a) 1 b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\sqrt{3}$
d) Tg x e) $\frac{3}{4}$

6. De la figura, halle: Tg θ



a) $\frac{37}{5}$ b) $\frac{5}{37}$ c) $\frac{13}{31}$
d) $\frac{31}{13}$ e) $\frac{5}{13}$

7. Halle el valor de:
2Cos 48° · Cos 5° – Cos 43°
a) 0,2 b) 0,3 c) 0,4
d) 0,5 e) 0,6

8. Halle el valor de "K", en:
K · Tg 56° = Tg 73° – Tg 17°
a) 1/2 b) 1 c) 3/2
d) 2 e) 2/3

9. El valor de la expresión:
4Cos 7° + 3Sen 7°
es:
a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
d) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ e) 5

10. Calcular el valor de:
$4(\text{Tg } 19°+\text{Tg } 18°)+3\text{Tg } 19° \cdot \text{Tg } 18°$
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

11. Halla el valor de:
$(\text{Tg } 36°+1)(\text{Tg } 9°+1)$
a) 1/2 b) 1 c) 2
d) 3/2 e) 4

12. En un triángulo ABC, se cumple:
$\text{Tg } B + \text{Tg } C = 5\text{Tg } A$
Halle:
$$N = \frac{\text{Tg}B \cdot \text{Tg}C + 2}{\text{Tg}B \cdot \text{Tg}C - 2}$$
a) 1/2 b) 1 c) 2
d) 3/2 e) 4

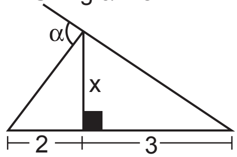
13. Si: $\text{Tg}(x+45°) = -3$
Halle: Csc x; $0° < x < 90°$
a) 3 b) 2 c) $\sqrt{5}$
d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

14. Si: $\text{Tg}(3\alpha-2\beta) = \frac{1}{3}$
y $\text{Tg}(3\beta-2\alpha) = \frac{2}{3}$
Halle: $\text{Tg}(\alpha+\beta)$
a) $\frac{9}{7}$ b) $\frac{7}{9}$ c) 7 d) 9 e) 16

15. Si: $\text{Sen } \alpha + \text{Cos } \beta = m$
$\text{Sen } \beta + \text{Cos } \alpha = n$
Calcular: $\text{Sen}(\alpha+\beta)$
a) m^2+n^2+2 b) m^2+n^2-2
c) $\frac{m^2+n^2+2}{2}$ d) $\frac{m^2+n^2+1}{2}$
e) $\frac{m^2+n^2-2}{2}$

16. Calcular:
$$P = \frac{\sqrt{3}\text{Cos}40° + \text{Sen}40°}{\text{Cos}20° \cdot \text{Cos}10° + \text{Sen}20° \cdot \text{Sen}10°}$$
a) 2 b) 1 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\sqrt{3}$

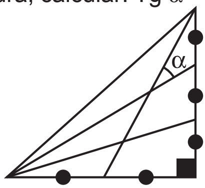
17. Hallar "x". Si: $\text{Tg } \alpha = 5$



a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

18. Si: $3\text{Cos}(\alpha-\beta) = 5\text{Cos}(\alpha+\beta)$
Hallar: $\text{Ctg } \alpha \cdot \text{Ctg } \beta$
a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

19. De la figura, calcular: $\text{Tg } \alpha$



a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{3}$
d) $\frac{3}{4}$ e) 1

20. Si:
$\text{Sen}(\alpha+2\beta) = 5\text{Sen } \alpha$
Halle:
$$\frac{\text{Tg}\beta}{\text{Tg}(\alpha+\beta)}$$
a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{2}$
d) 3 e) 5

CLAVES II				
1. d	2. a	3. b	4. e	5. c
6. a	7. e	8. d	9. d	10. c
11. c	12. c	13. d	14. a	15. e
16. a	17. b	18. d	19. b	20. b

Identidades trigonométricas para el arco doble

Seno del arco doble

$$\boxed{Sen2x = 2SenxCosx}$$

Demostración

Recordar que:

$$Sen(x + y) = Senx \cdot Cosy + Cosx \cdot Seny$$

Hacemos y = x, entonces tendremos:

$$Sen(x + x) = Senx \cdot Cosx + Cosx \cdot Senx$$

$$Sen2x = 2SenxCosx \qquad L.q.q.d$$

Ejemplos

- $Sen20º = Sen2(10º) = 2Sen10º \cdot Cos10º$
- $Sen4\alpha = Sen2(2\alpha) = 2Sen2\alpha \cdot Cos2\alpha$
- $2Sen7º30' \cdot Cos7º30' = Sen2(7º30') = Sen14º60' = Sen15º$
- $2 \cdot Sen\frac{\theta}{2} \cdot Cos\frac{\theta}{2} = Sen2\frac{\theta}{2} = Sen\theta$

Coseno del arco doble

$$\boxed{Cos2x = Cos^2x - Sen^2x}$$

Demostración

Recordar que:

$$Cos(x + y) = Cosx \cdot Cosy - Senx \cdot Seny$$

Hacemos y = x, entonces tendremos:

$$Cos(x + x) = Cosx \cdot Cosx - Senx \cdot Senx$$

$$Cos2x = Cos^2x - Sen^2x \qquad L.q.q.d$$

Ejemplos

- $Cos8\varphi = Cos2(4\varphi) = Cos^24\varphi - Sen^24\varphi$
- $Cos50º = Cos2(25º) = Cos^225º - Sen^225º$
- $Cos^2(A + B) - Sen^2(A + B) = Cos2(A + B) = Cos(2A + 2B)$
- $Cos^2\frac{\pi}{8} - Sen^2\frac{\pi}{8} = Cos2\left(\frac{\pi}{8}\right) = Cos\frac{\pi}{4}$

$\boxed{\text{Cos}2x = 1 - 2\text{Sen}^2x}$

Demostración
Recordar que:

$\text{Sen}^2x + \text{Cos}^2x = 1 \qquad \text{Cos}^2x = 1 - \text{Sen}^2x$

Reemplazando en:

$\text{Cos}2x = \text{Cos}^2x - \text{Sen}^2x \qquad \text{Cos}2x = (1 - \text{Sen}^2x) - \text{Sen}^2x$

$\text{Cos}2x = 1 - 2\text{Sen}^2x$ L.q.q.d

Ejemplos

- $\text{Cos}86º = \text{Cos}2(43º) = 1 - 2\text{Sen}^2 43º$
- $\text{Cos}y = \text{Cos}2\left(\dfrac{y}{2}\right) = 1 - 2\text{Sen}^2\dfrac{y}{2}$
- $1 - 2\text{Sen}^2 1º = \text{Cos}2(1º) = \cos 2º$
- $1 - 2\text{Sen}^2(45º - \theta) = \text{Cos}2(45º - \theta) = \text{Cos}(90º - 2\theta) = \text{Sen}2\theta$

$\boxed{\text{Cos}2x = 2\text{Cos}^2x - 1}$

Demostración
Recordamos que:

$\text{Sen}^2x + \text{Cos}^2x = 1 \qquad \text{Sen}^2x = 1 - \text{Cos}^2x$

Reemplazando en:

$\text{Cos}2x = \text{Cos}^2x - \text{Sen}^2x \qquad \text{Cos}2x = \text{Cos}^2x - (1 - \text{Cos}^2x)$

$\text{Cos}2x = 2\text{Cos}^2x - 1$ L.q.q.d

Ejemplos

- $\text{Cos}9º = \text{Cos}2\left(\dfrac{9º}{2}\right) = \text{Cos}2(4º30') = 2\text{Cos}^2 4º30' - 1$
- $\text{Cos}6\gamma = \text{Cos}2(3\gamma) = 2\text{Cos}^2 3\gamma - 1$
- $2\text{Cos}^2 11º15' - 1 = \text{Cos}2(11º15') = \cos 22º30'$
- $2\text{Cos}^2(30º + \alpha) - 1 = \text{Cos}2(30º + \alpha) = \text{Cos}(60º + 2\alpha)$

Degradación del exponente "2" o "cuadrado"

Las fórmulas expuestas a continuación son empleadas en expresiones trigonométricas, donde se presenten "senos" o "cosenos" de ciertos arcos elevados al exponente "2".

Degradación del "cuadrado" del seno de un arco simple "x"

Se ha demostrado que:

$\text{Cos}2x = 1 - 2\text{Sen}^2x \qquad \boxed{2\text{Sen}^2x = 1 - \text{Cos}2x}$

Ejemplos

- $2Sen^2 18º = 1 - Cos2(18)º = 1 - Cos36º$
- $Sen^2 2\alpha = \dfrac{2Sen^2 2\alpha}{2} = \dfrac{1 - Cos2(2\alpha)}{2} = \dfrac{1 - Cos4\alpha}{2}$
- $2Sen^2(a - b) = 1 - Cos2(a - b) = 1 - Cos(2a - 2b)$
- $2Sen^2 22º30' = 1 - Cos2(22º30') = 1 - Cos44º60' = 1 - Cos45º$
- $1 - Cos8\theta = 1 - Cos2(4\theta) = 2Sen^2 4\theta$
- $1 - CosA = 1 - Cos2\left(\dfrac{A}{2}\right) = 2Sen^2 \dfrac{A}{2}$
- $1 - Cos37º = 1 - Cos2\left(\dfrac{37º}{2}\right) = 2Sen^2\left(\dfrac{37º}{2}\right) = 2Sen^2 18º30'$

Degradación del "cuadrado" del coseno de un arco simple "x"

Se ha demostrado que:

$Cos2x = 2Cos^2x - 1$ $\qquad \boxed{2Cos^2x = 1 + Cos2x}$

Ejemplos

- $2Cos^2 3\varphi = 1 + Cos2(3\varphi) = 1 + Cos6\varphi$
- $Cos^2 75º = \dfrac{2Cos^2 75º}{2} = \dfrac{1 + Cos2(75º)}{2} = \dfrac{1 + Cos150º}{2}$
- $2Cos^2 \dfrac{\alpha}{2} = 1 + Cos2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = 1 + Cos\alpha$
- $4Cos^2 10º = 2[2Cos^2 10º] = 2[1 + Cos2(10º)] = 2[1 + Cos20º] = 2 + 2Cos20º$
- $1 + Cos40º = 1 + Cos2(20º) = 2Cos^2 20º$
- $1 + Cos10b = 1 + Cos2(5b) = 2Cos^2 5b$
- $1 + Cos(x + y) = 1 + Cos2\left(\dfrac{x + y}{2}\right) = 2Cos^2\left(\dfrac{x + y}{2}\right)$
- $1 + Cos53º = 1 + Cos2\left(\dfrac{53º}{2}\right) = 2Cos^2\left(\dfrac{53º}{2}\right) = 2Cos^2 26º30'$

Tangente del arco doble

$$\boxed{Tan\ 2x = \frac{2Tanx}{1 - Tan^2x}}$$

Demostración

Recordamos que:

$$Tan(x + y) = \frac{Tanx + Tany}{1 - Tanx \bullet Tanx}\text{ , hacemos } y = x$$

$$\text{Tan}(x+x)=\frac{\text{Tanx}+\text{Tanx}}{1-\text{Tanx}\bullet\text{Tanx}}$$

$$\text{Tan}2x=\frac{2\text{Tanx}}{1-\text{Tan}^2x}\qquad \text{L.q.q.d}$$

Ejemplos

- $\text{Tan}36^\circ=\text{Tan}2(18^\circ)=\dfrac{2\text{Tan}18^\circ}{1-\text{Tan}^2 18^\circ}$
- $\dfrac{2\text{Tan}8^\circ}{1-\text{Tan}^2 8^\circ}=\text{Tg}2(8^\circ)=\text{Tg}16^\circ$
- $\text{Tan}4\theta=\text{Tan}2(2\theta)=\dfrac{2\text{Tan}2\theta}{1-\text{Tan}^2 2\theta}$
- $\dfrac{2\text{Tan}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1-\text{Tan}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=\text{Tan}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\text{Tan}\alpha$

Cotangente, secante y cosecante del arco doble

Tomaremos las identidades recíprocas aplicadas al arco doble, es decir:

Como: $\text{Tan}2x\bullet\text{Cot}2x=1$ $\qquad$ $\text{Cot}2x=\dfrac{1}{\text{Tan}2x}$

Como: $\text{Cos}2x\bullet\text{Sec}2x=1$ $\qquad$ $\text{Sec}2x=\dfrac{1}{\text{Cos}2x}$

Como: $\text{Sen}2x\bullet\text{Csc}2x=1$ $\qquad$ $\text{Csc}2x=\dfrac{1}{\text{Sen}2x}$

Ejemplo

- Siendo: $\dfrac{\text{Sec}2x}{\text{Csc}2x}=1{,}2$; calcular el valor de “Cot 2x”.

Resolución

Sabemos: $\dfrac{\text{Sec}2x}{\text{Csc}2x}=1{,}2$ $\qquad$ $\dfrac{\frac{1}{\text{Cos}2x}}{\frac{1}{\text{Sen}2x}}=\dfrac{12}{10}$

$\dfrac{\text{Sen}2x}{\text{Cos}2x}=\dfrac{6}{5}$ $\qquad$ $\text{Tan}2x=\dfrac{6}{5}$

Luego: $\text{Cot}2x=\dfrac{1}{\text{Tan}2x}$ $\qquad$ $\text{Cot}2x=\dfrac{1}{\frac{6}{5}}=\dfrac{5}{6}$

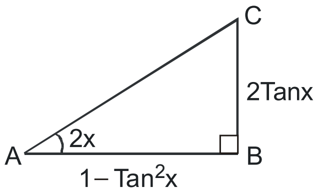
Especiales del arco doble

$$\boxed{\mathbf{Sen2x} = \frac{\mathbf{2Tanx}}{\mathbf{1+Tan^2x}}} \quad \text{y} \quad \boxed{\mathbf{Cos2x} = \frac{\mathbf{1-Tan^2x}}{\mathbf{1+Tan^2x}}}$$

Como Tangente del Arco Simple "x"
Recordemos que:

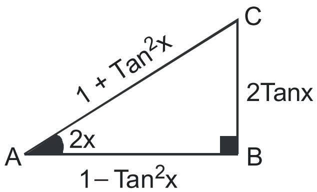
$$\text{Tan } 2x = \frac{2\text{Tanx}}{1-\text{Tan}^2x}$$

y suponiendo "2x" ángulo agudo, formamos el siguiente triángulo rectángulo ABC:



Calculamos luego la hipotenusa con aplicación del Teorema de Pitágoras, es decir:

$$\overline{AC}^2 = (2\text{Tanx})^2 + (1 - \text{Tan}^2x)^2$$
$$\overline{AC} = 1 + \text{Tan}^2x$$



Del ⊿ABC mostrado tenemos:

$$\mathbf{Sen2x} = \frac{\mathbf{2Tanx}}{\mathbf{1+Tan^2x}} \quad \text{y}$$

$$\mathbf{Cos2x} = \frac{\mathbf{1-Tan^2x}}{\mathbf{1+Tan^2x}}$$

Ejemplos

- $\dfrac{2\text{Tan}7^\circ 30'}{1+\text{Tan}^2 7^\circ 30'} = \text{Sen}2(7^\circ 30') = \text{Sen}15^\circ$
- $\dfrac{1-\text{Tan}^2 4\theta}{1+\text{Tan}^2 4\theta} = \text{Cos}2(4\theta) = \text{Cos } 8\theta^\circ$

Ejemplos

Si: Tanx = 3; hallar el valor de:

$$P = \text{Sen } 2x - \text{Cos } 2x$$

Resolución

* $\text{Sen2x} = \dfrac{2\text{Tanx}}{1+\text{Tan}^2x} = \dfrac{2(3)}{1+(3)^2} = \dfrac{6}{10}$ $\qquad$ $\text{Sen2x} = \dfrac{3}{5}$

* $\text{Cos2x} = \dfrac{1-\text{Tan}^2x}{1+\text{Tan}^2x} = \dfrac{1-(3)^2}{1+(3)^2} = \dfrac{-8}{10}$ $\qquad$ $\text{Cos2x} = \dfrac{-4}{5}$

Finalmente:

$$P = \text{Sen}2x - \text{Cos}2x = \left(\frac{3}{5}\right) - \left(\frac{-4}{5}\right) = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \qquad P = \frac{7}{5}$$

$\boxed{\text{Cotx} + \text{Tanx} = 2\text{Csc}2x}$ y $\boxed{\text{Cot x} - \text{Tanx} = 2\text{Cot}2x}$

Demostraremos que:

Cotx – Tanx = 2Csc2x, se efectuara de izquierda a dererecha

$$\text{Cotx} - \text{Tanx} = \frac{\text{Cosx}}{\text{Senx}} - \frac{\text{Senx}}{\text{Cosx}} = \frac{\text{Cos}^2x - \text{Sen}^2x}{\text{Senx} \bullet \text{Cosx}}$$

$$= \frac{2(\text{Cos}^2x - \text{Sen}^2x)}{(2\text{Senx} \bullet \text{Cosx})} = \frac{2\text{Cos}2x}{\text{Sen}2x}$$

Cotx – Tanx = 2Cot 2x L.q.q.d.

Análogamente se demuestra que:

Cotx + Tanx = 2Csc2x

Ejemplos

- Cot10º + Tan10º = 2Csc2(10º) = 2Csc20º
- Cot4α – Tan4α = 2Cot2(4α) = 2Cot8α
- 2Csc4θ = 2Csc2(2θ) = Cot2θ + Tan2θ
- 2Cot70º = 2Csc2(35º) = Cot35º – Tan35º

Problema Aplicativo

- Si: Cos2x = n; hallar : $W = \text{Cot}^2x - \text{Tan}^2x$

Resolución

* $W = \text{Cot}^2x - \text{Tan}^2x = (\text{Cotx} + \text{Tanx}) \bullet (\text{Cotx} - \text{Tanx})$

$$= (2\text{Csc}2x) \bullet (2\text{Cot}2x) = \left(2 \bullet \frac{1}{\text{Sen}2x}\right) \bullet \left(2 \bullet \frac{\text{Cos}2x}{\text{Sen}2x}\right)$$

$$= \frac{4\text{Cos}2x}{\text{Sen}^2 2x} = \frac{4\text{Cos}2x}{1 - \text{Cos}^2 2x}, \quad \text{Pero: } \text{Cos}2x = n$$

$$W = \frac{4n}{1 - n^2}$$

Resúmen de fórmulas

BÁSICAS:

* $\boxed{Sen2x = 2Senx \cdot Cosx}$

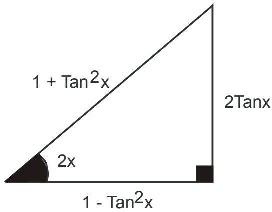
* $\boxed{Cos2x = Cos^2x - Sen^2x}$ → $\boxed{Cos2x = 1 - 2Sen^2x}$; $\boxed{Cos2x = 2Cos^2x - 1}$

Degradan “cuadrados”:

$\boxed{2Sen^2x = 1 - Cos2x}$

$\boxed{2Cos^2x = 1 + Cos2x}$

* $\boxed{Tan2x = \dfrac{2Tanx}{1 - Tan^2x}}$



* $\boxed{Sen2x = \dfrac{2Tanx}{1 + Tan^2x}}$

* $\boxed{Cos2x = \dfrac{1 - Tan^2x}{1 + Tan^2x}}$

Observaciones:

* $Cot\,2x = \dfrac{1}{Tan2x}$

* $Sec2x = \dfrac{1}{Cos2x}$

* $Csc2x = \dfrac{1}{Sen2x}$

Especiales:

* $Cotx + Tanx = 2Csc2x$

* $Cotx - Tanx = 2Cot2x$

* $Sec2x + 1 = \dfrac{Tan2x}{Tanx}$

* $Sec2x - 1 = Tan2x \cdot Tanx$

* $Sen^4x + Cos^4x = \dfrac{3 + Cos4x}{4}$

* $Sen^6x + Cos^6x = \dfrac{5 + 3Cos4x}{8}$

Problemas I

1 Si: $\text{Cos } x = \dfrac{2}{3}$; 0°< x < 90°
Calcule: Sen 2x

a) $\dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

d) $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$ e) $\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$

2. Si: $\text{Sen } x = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$
Calcular:
Cos 4x; 0° < x < 90°

a) $\dfrac{5}{9}$ b) $-\dfrac{5}{9}$ c) $\dfrac{31}{81}$

d) $-\dfrac{31}{81}$ e) $\dfrac{25}{81}$

3. Si: $\text{Sen } x - \text{Cos } x = \dfrac{1}{3}$
Halle: Sen 2x

a) $\dfrac{1}{9}$ b) $\dfrac{2}{9}$ c) $\dfrac{4}{9}$

d) $\dfrac{8}{9}$ e) 1

4. Halle el valor de:

$$\frac{2\text{Tgx}}{1-\text{Tg}^2x} \text{ ; para: } x = 4°$$

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $\dfrac{1}{7}$

d) 7 e) $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$

5. Reducir la expresión:

$$E = \frac{\text{Sen2x} \cdot \text{Cosx}}{\text{Cscx} - \text{Senx}}$$

a) 2Sen x b) 2Cos x c) 1–Cos 2x
d) 1+Cos 2x e) 2Tg x

6. Simplifique:

$$\left(\frac{\text{Sen}2\theta}{\text{Sen}\theta}\right)^2 + \left(\frac{\text{Sen}2\theta}{\text{Cos}\theta}\right)^2$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

7. Calcule el valor de:
$\text{Cos}^4 8° - \text{Sen}^4 8°$

a) $\dfrac{1}{7}$ b) 7 c) $\dfrac{24}{25}$

d) $\dfrac{7}{24}$ e) $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$

8. Reducir:

$$F = \frac{\text{Secx} \cdot \text{Cos2x}}{\text{Cosx} - \text{Senx}} - 1$$

a) Cos x b) Tg x c) Cot x
d) Sec x e) Csc x

9. Simplificar:

$$\frac{\text{Cos}\,2x + \text{Cosx} + 1}{\text{Sen2x} + \text{Senx}}$$

a) Sen x b) Cos x c) Tg x
d) Cot x e) Sec x

10. Reducir:

$$\sqrt{2 - \sqrt{2 + 2\text{Cos}80°}}$$

a) 2Sen 10° b) 2Cos 10°
c) 2Cos 20° d) 2Sen 20°
e) 2Sen 40°

11. Halle el valor de:
(Cot 42° + Tg 42°) Cos 6°

a) $\dfrac{1}{2}$ b) 1 c) $\dfrac{3}{2}$
d) 2 e) 3

12. Reducir:

$$A = \frac{(\text{Sen}\alpha + \text{Cos}\alpha)^2 - 1}{\text{Sen}4\alpha}$$

a) $\dfrac{1}{2}$ Sec 2α b) Sec 2α

c) $\dfrac{1}{2}$ Csc 2α d) Csc 2α

e) $\dfrac{1}{2}$ Cos 2α

13. Si: Tg x = 3.
Halle el valor de la expresión:
Sen(2x–y)·Cos y + Sen y·Cos(2x-y)

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{3}{5}$
d) $\frac{4}{5}$ e) 1

14. Reducir:
Sen θ·Cos θ·Cos 2θ·Cos 4θ·Cos 8θ

a) $\frac{1}{16}$ Sen 16θ b) $\frac{1}{32}$ Sen 16θ
c) $\frac{1}{16}$ Sen 32θ d) $\frac{1}{32}$ Sen 16θ
e) $\frac{1}{32}$ Sen 32θ

15. Calcular: Sen 2x
Si: 14Tg x = 5 + 5Tg²x

a) $\frac{5}{14}$ b) $\frac{14}{5}$ c) $\frac{7}{5}$
d) $\frac{5}{7}$ e) $\frac{19}{5}$

16. Si: α+β = 90°.
Reducir la expresión:
A= (Cos α + Cos β)(Cos α – Cos β)
a) Sen 2α b) Cos 3β c) Cos 2α
d) Sen 2β e) 1

17. Si: Tg α = 2; hallar: Tg(2α+45°)

a) $-\frac{1}{7}$ b) –7 c) 7
d) $\frac{1}{7}$ e) 5

18. Dado:
$(\text{Cos}^6x\ \text{Sen}^2x - \text{Sen}^6x\ \text{Cos}^2x)\cdot\text{Cos}2x = m$
Calcular: Cos 8x
a) m b) 1 – m c) 1 – 4m
d) 1–16m e) 1–32m

19. Si: Tg x + Cot x = a
Hallar: Sec 4x

a) a² b) $\frac{a^2}{2}$ c) $\frac{a^2}{a^2-8}$
d) $\frac{a^2+8}{a}$ e) $\frac{a+8}{a}$

20. Reducir:
(Sec x+1)(Sec 2x+1)(Sec 4x+1)(Sec 8x+1)

a) $\text{Tg}\frac{x}{2}\cdot\text{Tg } 8x$ b) $\text{Cot}\frac{x}{2}\cdot\text{Tg } 8x$
c) $\text{Tg}\frac{x}{2}\cdot\text{Tg } 16x$ d) $\text{Cot}\frac{x}{2}\cdot\text{Cot } 16x$
e) $\text{Tg}\frac{x}{2}\cdot\text{Cot } 16x$

CLAVES I				
1. e	2. d	3. d	4. c	5. c
6. d	7. c	8. b	9. d	10. d
11. d	12. a	13. c	14. a	15. d
16. c	17. a	18. e	19. c	20. b

Problemas II

1. Simplificar:
$$P = \sqrt{\frac{\text{Cos}^2 x - \text{Cos}2x}{2\text{Sen}2x\cdot\text{Cotx}}}\ ;\ 0° < x < 90°$$
a) $\frac{1}{2}$ b) $\text{Tan}\frac{x}{2}$ c) $\frac{\text{Tanx}}{2}$
d) $\text{Cot}\frac{x}{2}$ e) $\frac{\text{Cotx}}{2}$

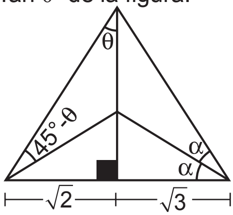
2. Hallar “A·B”, siendo:
A = 2Cos x (Cos x – Sen x) – 1
B = 1 – 2Sen x (Sen x – Cos x)
a) 1 b) –1 c) –Cos 4x
d) Cos 4x e) Sen 2x · Cos 2x

3. Calcular:
$M = 4\text{Sen } 9°\cdot\text{Cos } 9°\cdot\text{Cos } 18° + \text{Sen}^2 27° - \text{Cos}^2 27°$
a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0

4. Siendo:
$$\text{Sen}^2x - \text{Cos}^2y = m$$
Hallar:
$$Q = \text{Cos } 2x + \text{Cos } 2y$$
a) 2m b) –2m c) 2m+2
d) 2m–2 e) 2–2m

5. Indicar el equivalente de:
$$W = \frac{1+\text{Cos}20° - \text{Sen}20°}{1-\text{Cos}20° - \text{Sen}20°}$$
a) –Cot 10° b) Cot 10° c) –Tan 10°
d) Tan 10° e) –1

6. Hallar "Tan θ" de la figura:



a) $\frac{1}{2}$ b) 5 c) $\frac{1}{5}$
d) 6 e) $\frac{1}{6}$

7. Calcular:

$$P=\left[\frac{2\text{Tan}75°}{1+\text{Tan}^2 75°}\right]\cdot\left[\frac{1-\text{Tan}^2 67°30'}{1+\text{Tan}^2 67°30'}\right]$$

a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ b) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ c) $\frac{\sqrt{6}}{4}$
d) $-\frac{\sqrt{6}}{4}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

8. Reducir:

$$Z = 4\text{Cot } 2x + 3\text{Tan } x - 2\text{Csc } 2x$$

a) Cot x b) –Cot x c) 3Cot x
d) -3Cot x e) 0

9. Calcular "Csc 2x", si:

$$\text{Sen}(\pi\text{Senx})\cdot\text{Sec}(\pi\text{Cos } x) = 1$$

a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $-\frac{3}{4}$
d) $-\frac{4}{3}$ e) $\frac{3}{4}$

10. Calcular:

$$W = 8\text{Sen}\frac{\pi}{16}\cdot\text{Cos}^3\frac{\pi}{16} - 8\text{Sen}^3\frac{\pi}{16}\cdot\text{Cos}\frac{\pi}{16}$$

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\sqrt{2}$
d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $2\sqrt{2}$

11. Simplificar:

$$E=\frac{1-3\text{Sen}^2x+2\text{Sen}^4x}{2\text{Cos}^4x-3\text{Cos}^2x+1}$$

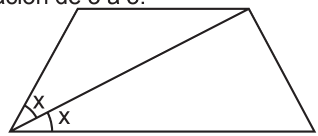
a) 1 b) Cot²x c) –Cot²x
d) Tan²x e) –Tan²x

12. Reducir: (0° < x < 90°)

$$M=\frac{\sqrt{2(1+\text{Cosx})}+\sqrt{2(1-\text{Cosx})}}{\sqrt{1+\text{Senx}}}$$

a) 1 b) 2 c) 1/2
d) $\sqrt{2}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

13. Hallar "Cot x" del trapecio isósceles mostrado, si las bases están en la relación de 3 a 5.



a) $\sqrt{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) 2 d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{4}$

14. Si: $\text{Tan}^2\theta + \text{Cot}^2\theta = 7$ y $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ luego el valor de "Csc 2θ" será:

a) 3 b) –3 c) $\frac{\sqrt{7}}{2}$
d) $\frac{3}{2}$ e) $-\frac{3}{2}$

15. Reducir:

$$M=\text{Tan}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)-\text{Tan}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$$

a) 0 b) –2Cot α c) 2Cot α
d) –2Tan α e) 2Tan α

16. Indicar el equivalente de:

$$A=\frac{(\text{Senx}+\text{Cosx}+1)(\text{Senx}+\text{Cosx}-1)}{\text{Cos}^4x-\text{Sen}^4x}$$

a) –Cot 2x b) –Tan 2x c) Tan 2x
d) Cot 2x e) 1

17. Si: $3\text{Sen } x = \sqrt{3}$; Hallar: Cos 4x

a) $\frac{2}{3}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{3}$
d) $\frac{7}{9}$ e) $-\frac{7}{9}$

18. Reducir:

$$A = Cos\frac{x}{2}\left(\sqrt{3}Cos\frac{x}{2} + Sen\frac{x}{2}\right) - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^{-1}$$

a) Sen(30°+x)
b) 2Cos(30°-x)
c) 2Cos(30°+x)
d) Cos(30°–x)
e) Cos(30°+x)

19. Si: Cos 4x = 0,333…; hallar:
$M=(Sen^3 2x+Cos^3 2x)^2+(Sen^3 2x–Cos^3 2x)^2$

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{4}{3}$
d) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{3}{4}$

20. La expresión equivalente a:

$$Tan\left(\frac{\pi + 2x}{4}\right) \text{ es:}$$

a) Sec x + Tan x
b) Sec x – Tan x
c) Csc x + Cot x
d) Csc x – Cot x
e) Sec x + Cot x

CLAVES II				
1. c	2. d	3. e	4. b	5. a
6. e	7. b	8. a	9. d	10. c
11. c	12. b	13. a	14. e	15. d
16. c	17. e	18. d	19. b	20. a

UNIDAD 11

Identidades trigonométricas para el arco mitad

Seno del arco mitad

$$\boxed{\operatorname{Sen}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\operatorname{Cos}x}{2}}}$$

Demostración

Recordar que:

$$\operatorname{Cos}2y = 1-2\operatorname{Sen}^2y \;\rightarrow\; 2\operatorname{Sen}^2y = 1-\operatorname{Cos}2y \;\rightarrow\; \operatorname{Sen}^2y=\frac{1-\operatorname{Cos}2y}{2}$$

$$\rightarrow \operatorname{Sen}y=\pm\sqrt{\frac{1-\operatorname{Cos}2y}{2}} \;\rightarrow\; \text{hacemos: } y=\frac{x}{2} \rightarrow 2y=x,\ \text{tendremos:}$$

$$\rightarrow \operatorname{Sen}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\operatorname{Cos}x}{2}} \quad \text{L.q.q.d}$$

Observación general

La elección del signo "+" ó "–" en las fórmulas expuestas que presentan radicales, dependerá del cuadrante al cual pertenece el arco "X/2", así como del operador trigonométrico que lo afecta.

Ejemplos

$$\operatorname{Sen}50^\circ=\operatorname{Sen}\left(\frac{100^\circ}{2}\right)=+\sqrt{\frac{1-\operatorname{Cos}100^\circ}{2}}$$

IC

$$\operatorname{Sen}200^\circ=\operatorname{Sen}\left(\frac{400^\circ}{2}\right)=-\sqrt{\frac{1-\operatorname{Cos}400^\circ}{2}}$$

IIIC

Coseno de arco mitad

$$\boxed{\text{Cos}\,\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\text{Cosx}}{2}}}$$

Demostración

Recordar que:

$\text{Cos2y} = 2\text{Cos}^2\text{y} - 1 \quad \rightarrow \quad 2\text{Cos}^2\text{y} = 1 + \text{Cos2y}$

$$\rightarrow \quad \text{Cos}^2\text{y}=\frac{1+\text{Cos2y}}{2}$$

$$\rightarrow \quad \text{Cosy}=\pm\sqrt{\frac{1+\text{Cos2y}}{2}}$$

$\rightarrow$ hacemos: $y=\dfrac{x}{2} \quad \rightarrow \quad 2y = x$, tendremos:

$$\rightarrow \quad \text{Cos}\,\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\text{Cosx}}{2}}$$ L.q.q.d

Ejemplos

$$\text{Cos}100^{\circ}=\text{Cos}\left(\frac{200^{\circ}}{2}\right)=-\sqrt{\frac{1+\text{Cos}200^{\circ}}{2}}$$

IIC

$$\text{Cos}300^{\circ}=\text{Cos}\left(\frac{600^{\circ}}{2}\right)=+\sqrt{\frac{1+\text{Cos}600^{\circ}}{2}}$$

IV

Tangente del arco mitad

$$\boxed{\text{Tan}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\text{Cosx}}{1+\text{Cosx}}}}$$

Demostración

Observar que:

$$\text{Tan}\frac{x}{2}=\frac{\text{Sen}\frac{x}{2}}{\text{Cos}\frac{x}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{1-\text{Cosx}}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\text{Cosx}}{2}}}=\sqrt{\frac{\frac{1-\text{Cosx}}{2}}{\frac{1+\text{Cosx}}{2}}}$$

$$\rightarrow \quad \text{Tan}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\text{Cosx}}{1+\text{Cosx}}}$$ L.q.q.d

Ejemplos

$$\mathrm{Tan}50° = \mathrm{Tan}\left(\frac{100°}{2}\right) = + \sqrt{\frac{1-\mathrm{Cos}100°}{1+\mathrm{Cos}100°}}$$

IC

$$\mathrm{Tan}300° = \mathrm{Tan}\left(\frac{600°}{2}\right) = - \sqrt{\frac{1-\mathrm{Cos}600°}{1+\mathrm{Cos}600°}}$$

IVC

$$\boxed{\mathrm{Tan}\frac{x}{2} = \mathrm{Cscx} - \mathrm{Cotx}}$$

Demostración

Notemos que también:

$$\mathrm{Tan}\frac{x}{2} = \frac{\mathrm{Sen}\frac{x}{2}}{\mathrm{Cos}\frac{x}{2}} = \frac{\mathrm{Sen}\frac{x}{2}}{\mathrm{Cos}\frac{x}{2}} \bullet \frac{2\mathrm{Sen}\frac{x}{2}}{2\mathrm{Sen}\frac{x}{2}} = \frac{2\mathrm{Sen}^2\frac{x}{2}}{2\mathrm{Sen}\frac{x}{2} \bullet \mathrm{Cos}\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1-\mathrm{Cos}2\left(\frac{x}{2}\right)}{\mathrm{Sen}2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-\mathrm{Cosx}}{\mathrm{Senx}} = \frac{1}{\mathrm{Senx}} - \frac{\mathrm{Cosx}}{\mathrm{Senx}}$$

$$\rightarrow \quad \mathrm{Tan}\frac{x}{2} = \mathrm{Cscx} - \mathrm{Cotx} \qquad \text{L.q.q.d}$$

Ejemplos

$$\mathrm{Tan}50° = \mathrm{Tan}\left(\frac{100°}{2}\right) = \mathrm{Csc}100° - \mathrm{Cot}100°$$

$$\mathrm{Tan}300° = \mathrm{Tan}\left(\frac{600°}{2}\right) = \mathrm{Csc}600° - \mathrm{Cot}600°$$

Cotangente del arco mitad

$$\boxed{\mathrm{Cot}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\mathrm{Cosx}}{1-\mathrm{Cosx}}}}$$

Demostración

Observar que:

$$\operatorname{Cot}\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{Cos}\frac{x}{2}}{\operatorname{Sen}\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{1+\operatorname{Cos}x}{2}}}{\sqrt{\frac{1-\operatorname{Cos}x}{2}}} = \sqrt{\frac{\frac{1+\operatorname{Cos}x}{2}}{\frac{1-\operatorname{Cos}x}{2}}}$$

$$\rightarrow \quad \operatorname{Cot}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\operatorname{Cos}x}{1-\operatorname{Cos}x}} \qquad \text{L.q.q.d}$$

Ejemplos

$$\operatorname{Cot}100° = \operatorname{Cot}\left(\frac{200°}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1+\operatorname{Cos}200°}{1-\operatorname{Cos}200°}}$$

IIC

$$\operatorname{Cot}200° = \operatorname{Cot}\left(\frac{400°}{2}\right) = +\sqrt{\frac{1+\operatorname{Cos}400°}{1-\operatorname{Cos}400°}}$$

IIIC

$$\boxed{\operatorname{Cot}\frac{x}{2} = \operatorname{Csc}x + \operatorname{Cot}x}$$

Demostración

Notemos que también:

$$\operatorname{Cot}\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{Cos}\frac{x}{2}}{\operatorname{Sen}\frac{x}{2}} = \frac{\operatorname{Cos}\frac{x}{2}}{\operatorname{Sen}\frac{x}{2}} \bullet \frac{2\operatorname{Cos}\frac{x}{2}}{2\operatorname{Cos}\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{Cos}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{Sen}\frac{x}{2}\operatorname{Cos}\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1+\operatorname{Cos}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{Sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1+\operatorname{Cos}x}{\operatorname{Sen}x} = \frac{1}{\operatorname{Sen}x} + \frac{\operatorname{Cos}x}{\operatorname{Sen}x}$$

$$\rightarrow \quad \operatorname{Cot}\frac{x}{2} = \operatorname{Csc}x + \operatorname{Cot}x \qquad \text{L.q.q.d}$$

Ejemplos

$$\operatorname{Cot}100° = \operatorname{Cot}\left(\frac{200°}{2}\right) = \operatorname{Csc}200° + \operatorname{Cot}200°$$

$$\operatorname{Cot}200° = \operatorname{Cot}\left(\frac{400°}{2}\right) = \operatorname{Csc}400° + \operatorname{Cot}400°$$

Secante del arco mitad

$$\boxed{\operatorname{Sec}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{2}{1+\operatorname{Cosx}}}}$$

Demostración

Sabemos que:

$$\operatorname{Cos}\frac{x}{2}\bullet\operatorname{Sec}\frac{x}{2}=1$$

$$\rightarrow\quad \operatorname{Sec}\frac{x}{2}=\frac{1}{\operatorname{Cos}\frac{x}{2}}=\frac{1}{\pm\sqrt{\frac{1+\operatorname{Cosx}}{2}}}$$

$$\rightarrow\quad \operatorname{Sec}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{2}{1+\operatorname{Cosx}}}\qquad \text{L.q.q.d}$$

Cosecante del arco mitad

$$\boxed{\operatorname{Csc}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{2}{1-\operatorname{Cosx}}}}$$

Demostración

Sabemos que:

$$\operatorname{Sen}\frac{x}{2}\bullet\operatorname{Csc}\frac{x}{2}=1$$

$$\rightarrow\quad \operatorname{Csc}\frac{x}{2}=\frac{1}{\operatorname{Sen}\frac{x}{2}}=\frac{1}{\pm\sqrt{\frac{1-\operatorname{Cosx}}{2}}}$$

$$\rightarrow\quad \operatorname{Csc}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{2}{1-\operatorname{Cosx}}}\qquad \text{L.q.q.d}$$

Ejemplos

Si: Cosx = 0,6 $\rightarrow 270º< x <360º$

Calcular los valores de " $\operatorname{Csc}\frac{x}{2}$ " y " $\operatorname{Sec}\frac{x}{2}$ "

Resolución

* Cosx = 0,6 $\rightarrow$ $\operatorname{Cosx}=\frac{6}{10}$ $\rightarrow$ $\operatorname{Cos} x=\frac{3}{5}$

* $270º < x < 360º$ $\rightarrow$ $135º<\frac{x}{2}<180º$ $\rightarrow$ " $\frac{x}{2}$ " $\rightarrow$ IIC

Entonces tenemos:

i) $$\underset{IIC}{Csc\frac{x}{2}} = +\sqrt{\frac{2}{1-Cosx}} = \sqrt{\frac{2}{1-\frac{3}{5}}} \rightarrow Csc\frac{x}{2} = \sqrt{5}$$

ii) $$\underset{IIC}{Sec\frac{x}{2}} = -\sqrt{\frac{2}{1+Cosx}} = -\sqrt{\frac{2}{1+\frac{3}{5}}} \rightarrow Sec\frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Resumen de fórmulas

Básicas

* $$\boxed{Sen\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-Cosx}{2}}}$$

* $$\boxed{Cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+Cosx}{2}}}$$

* $$\boxed{Tan\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-Cosx}{1+Cosx}} = \frac{1-Cosx}{Senx} = Cscx - Cotx}$$

* $$\boxed{Cot\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+Cosx}{1-Cosx}} = \frac{1+Cosx}{Senx} = Cscx + Cotx = \frac{1}{Tan\frac{x}{2}}}$$

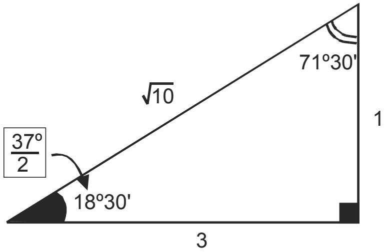
Observaciones

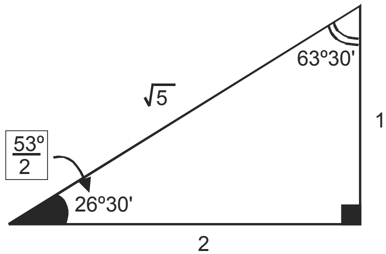
* $$\boxed{Sec\frac{x}{2} = \frac{1}{Cos\frac{x}{2}}} \rightarrow \boxed{Sec\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{2}{1+Cosx}}}$$

* $$\boxed{Csc\frac{x}{2} = \frac{1}{Sen\frac{x}{2}}} \rightarrow \boxed{Csc\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{2}{1-Cosx}}}$$

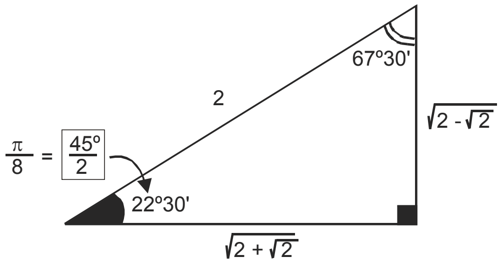
Notas

* ⊿s Notables Aproximados:





* ⊿s Notable Exacto:



Problemas I

1. Si:

$$\text{Cos}^2\theta = \frac{4}{9}\ ;\ \pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$$

Calcular:

$$\text{Sen}^2\frac{\theta}{2}$$

a) $\frac{25}{36}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{5}{6}$

d) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ e) $\frac{\sqrt{30}}{6}$

2. Si:

$$\text{Sec}\,x = 8\ ;\ 270° < x < 360°$$

Calcular:

$$2\text{Cos}\frac{x}{2}$$

a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{3}{2}$

d) $-\frac{3}{4}$ e) $-\frac{3}{2}$

3. Si:

$$\frac{\text{Tan}\,x}{2} = \frac{6}{5}\ ;\ 0° < x < 90°$$

Hallar:

$$\text{Tan}\frac{x}{2}$$

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{2}$ c) 1

d) $\frac{5}{6}$ e) $\frac{6}{5}$

4. Si:

$$\text{Sen}\,x = \frac{24}{25}\ ;\ 450° < x < 540°$$

Calcular:

$$\text{Csc}\frac{x}{2}$$

a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{5}{3}$ c) $-\frac{5}{4}$

d) $-\frac{5}{3}$ e) $\frac{25}{48}$

5. Calcular:

$$4\cdot\text{Cos}\frac{\pi}{8}$$

a) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ b) $2\sqrt{2-\sqrt{2}}$

c) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ d) $2\sqrt{2\sqrt{2}}$

e) $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$

6. Determinar el valor de:

$$2\text{Sen}\frac{\pi}{16}$$

a) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

c) $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ d) $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

e) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

7. Calcular:

$$\text{Tan}\ 37°30'$$

a) $\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+2$

b) $\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$

c) $\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+2$

d) $\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}-2$

e) $\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-2$

8. Hallar el valor aproximado de:

$$W = \frac{\text{Csc}18°30'}{\text{Sec}26°30'}$$

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{6}$

d) $\sqrt{8}$ e) $\sqrt{20}$

9. Si: A = 555°

Hallar:

$$\text{Cot}\left(\frac{3A}{2}\right)$$

a) $\sqrt{2}-1$ b) $1-\sqrt{2}$ c) $\sqrt{2}+1$

d) $-1-\sqrt{2}$ e) $-\frac{1}{2}$

10. Reducir:

$$M=\sqrt{\frac{1+\cos 20°}{2}}-2\cos 40°\sqrt{\frac{1-\cos 80°}{2}}$$

a) 0 b) Cos 10° c) Sen 10°
d) 2Cos 10° e) 2 Sen 10°

11. Si:

$$\sqrt{\frac{1+\text{Sen}200°}{1-\text{Sen}200°}}=\frac{\text{Cscx}}{\text{Secx}}$$

Hallar la medida del ángulo agudo "x".
a) 20° b) 35° c) 40°
d) 55° e) 70°

12. Reducir:

W = Cot 4θ + Csc 4θ - Csc 2θ

a) Tan θ b) –Tan θ c) Cot θ
d) –Cot θ e) 0

13. Indicar el equivalente de:

$$H=\frac{\text{Tanx}-\text{Sen}2\pi}{\text{Secx}+\text{Cos}\pi}$$

a) $\frac{\text{Cotx}}{2}$ b) $-\text{Tan}\frac{x}{2}$ c) $-\text{Cot}\frac{x}{2}$
d) $\text{Tan}\frac{x}{2}$ e) $\text{Cot}\frac{x}{2}$

14. Indicar el equivalente de:

$$P=\frac{2\text{Sen}\frac{x}{2}\cdot\text{Cos}\frac{x}{2}}{1+\text{Cos}^2\frac{x}{2}-\text{Sen}^2\frac{x}{2}}$$

a) $\text{Tan}\frac{x}{2}$ b) $\text{Cot}\frac{x}{2}$ c) $-\text{Tan}\frac{x}{2}$
d) $\text{Cot}\frac{x}{2}$ e) $\frac{\text{Tanx}}{2}$

15. En la siguiente igualdad:

$$\text{Cos}12°30' = \sqrt{\frac{1+\text{Sen}\phi}{2}}$$

Hallar la medida del ángulo agudo "ϕ'.
a) 12°30' b) 77°30' c) 50°
d) 25° e) 65°

16. Indicar el equivalente de:

$$M=\frac{1-\text{Cosx}+\text{Senx}}{1+\text{Cosx}+\text{Senx}}$$

a) 1 b) $\text{Sen}\frac{x}{2}$ c) $\text{Cos}\frac{x}{2}$
d) $\text{Tan}\frac{x}{2}$ e) $\text{Cot}\frac{x}{2}$

17. Si:
$\text{Cos}\frac{A}{2}\cdot\text{Cos A}+\text{Sen}\frac{A}{2}\cdot\text{Sen A}=\frac{1}{3}$
Calcular el valor de:

$$\text{Tan}\frac{A}{4}$$

a) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\pm\sqrt{2}$ c) $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$
d) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\pm\frac{1}{2}$

18. Si: Csc x + Cot x = 0,666...
Calcular:

$$\text{Tan}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$$

a) $-\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{5}$ c) –5
d) 5 e) $-\frac{1}{2}$

19. Si: $\text{Cot}\frac{x}{2}=\sqrt{5}$; 0° < x < 90°
Hallar:
Q = 3 Sen x – 2Tan x
a) 0 b) $5\sqrt{5}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
d) $\frac{\sqrt{5}}{6}$ e) $\sqrt{5}$

20. Si: 90° < x < 180° y

$$\text{Cot}^2\frac{x}{2}+\text{Tan}^2\frac{x}{2}=27$$

Calcular: Tan 2x
a) $\frac{20}{21}$ b) $-\frac{20}{21}$ c) $\frac{21}{20}$
d) $-\frac{21}{20}$ e) $-\frac{4}{5}$

CLAVES I				
1. c	2. e	3. a	4. c	5. e
6. c	7. e	8. d	9. b	10. a
11. d	12. b	13. e	14. a	15. e
16. d	17. a	18. a	19. a	20. b

Problemas II

1. Si:
   $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$; $0° < \alpha < 90°$

   Halle: $\text{Sen}\dfrac{\alpha}{2}$

   a) $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$ b) $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ c) $\dfrac{\sqrt{6}}{12}$

   d) $\sqrt{6}$ e) $\dfrac{\sqrt{6}}{5}$

2. Si:
   $\cos\theta = \dfrac{1}{8}$; $\dfrac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

   Calcule: $\cos\dfrac{\theta}{2}$

   a) $-\dfrac{9}{16}$ b) $\dfrac{9}{16}$ c) $-\dfrac{3}{4}$

   d) $\dfrac{3}{4}$ e) $\dfrac{1}{16}$

3. Si:
   $25\cos^2x - 4 = 0$; $180° < x < 270°$

   Calcule: $\text{Tan}\dfrac{x}{2}$

   a) $-\sqrt{7}$ b) $-\sqrt{3}$ c) $-\sqrt{\dfrac{7}{3}}$

   d) $-\sqrt{\dfrac{3}{7}}$ e) $-\sqrt{10}$

4. Calcule "x", si:

$$\sqrt{\frac{1-\cos 10°}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1+\cos 20°}{2}} = \frac{\text{Sen}20°}{x\cdot\cos 5°}$$

   a) 8 b) 4 c) 2

   d) 1 e) $\dfrac{1}{2}$

5. Reduce:

$$E = \frac{\text{Cot}\frac{x}{2} - 2\text{Cot}x}{\text{Tg}\frac{x}{2} + \text{Cot}x}$$

   a) $2\text{Sen}\dfrac{x}{2}$ b) $2\cos\dfrac{x}{2}$ c) $2\text{Tg}\dfrac{x}{2}$

   d) $2\text{Sen}^2\dfrac{x}{2}$ e) $2\cos^2\dfrac{x}{2}$

6. Calcule:

$$P = 5\sqrt{2}\cdot\text{Sen}26°30' \cdot \cos 18°30'$$

   a) 1 b) 2 c) 3
   d) 4 e) 5

7. Si:
   $\text{Sec }10° + \text{Tan }10° = k$
   Calcule: Cot 50°
   a) k b) 2k c) k^{-1}

   d) $2k^{-1}$ e) $\sqrt{k}$

8. Reduce:
$$M = \frac{\text{Csc}6° - \text{Cot}6°}{\text{Tan}3°} - \frac{\text{Sen}40°}{\text{Csc}40° + \text{Cot}40°}$$
   a) 1 b) Sen 40° c) Sen 50°
   d) Cos 80° e) Sen 80°

9. Halle:

$$Q = \frac{\text{Tg}\frac{\pi}{8} - 2\text{Sen}\frac{\pi}{4}}{\text{Ctg}\frac{\pi}{12} - 2\cos\frac{\pi}{6}}$$

   a) 1 b) $\dfrac{1}{2}$ c) –1

   d) $-\dfrac{1}{2}$ e) 2

10. Si se cumple:

$$\sqrt{\frac{1-\text{Sen}50°}{1+\text{Sen}50°}} = \text{Cot } x;\ (x \to \text{agudo})$$

   Halle: Sec(x–10°)

   a) 2 b) $\sqrt{2}$ c) 3

   d) 4 e) $\dfrac{5}{4}$

11. Simplificar:

$$R = Csc\frac{\theta}{4} - Csc\frac{\theta}{2} - Csc\,\theta - Ctg\,\theta$$

a) 0 b) $Ctg\frac{\theta}{4}$ c) $Ctg\frac{\theta}{8}$
d) $Tg\frac{\theta}{4}$ e) $Tg\frac{\theta}{8}$

12. Reducir:

$$R = \frac{Tan10° + Cot20°}{Cot10° - Cot20°}$$

a) 1 b) 2 c) –1
d) –2 e) $\frac{1}{2}$

13. Simplifique: (0°< x < 90°)

$$E = Cos\frac{x}{2}\sqrt{1+Cosx} - Sen\frac{x}{2}\sqrt{1-Cosx}$$

a) $\sqrt{2}$ Cos x b) 2Cos x
c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Cos x d) Cos x
e) 0

14. Reduce la expresión:

$$E = Tg^2\frac{x}{2} + \frac{Senx + Cosx - 1}{1 + Cosx} + Ctgx$$

a) Sen x b) Cos x c) Tg x
d) Sec x e) Csc x

15. Reduce: (90° < x < 180°)

$$E = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{\frac{1 + \sqrt{\frac{1+Cosx}{2}}}{2}}}{2}}$$

a) $\frac{Cosx}{8}$ b) $\frac{Senx}{8}$ c) $Cos\frac{x}{8}$
d) $Sen\frac{x}{8}$ e) $Sen\frac{x}{4}$

16. Reduce:

$$M = \frac{(1+Cos2x)(Csc2x - Cot2x)}{Sen2x(1+Cosx)\left(1+Tg^2\frac{x}{2}\right)}$$

a) $\sqrt{2}$ b) 1 c) $\frac{1}{2}$
d) $\frac{1}{4}$ e) 2

17. Reduce:

E = Csc x+Csc 2x+Csc 4x+Csc 8x

a) Cot 6x b) Cot 4x
c) Cot 2x d) $Cot\frac{x}{2}$ –Cot x
e) $Cot\frac{x}{2}$ –Cot 8x

18. Dada la siguiente identidad:

$(1+Sen\ x+Cos\ x)^2 + (1-Sen\ x+Cos\ x)^2 = WCot\frac{x}{2}$

Calcule: W

a) 2Sen x b) 3Sen x c) 4Sen x
d) Cos x e) 2Cos x

19. Si:

$Sen\ x = \frac{2ab}{a^2+b^2}$; a>b>0; x∈[90°;180°]

Calcule: $Tg\frac{x}{2}$

a) $-\frac{a}{b}$ b) $-\frac{b}{a}$ c) ab
d) $\frac{a}{b}$ e) $\frac{b}{a}$

20. Simplifique:

$$E = \frac{Ctg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) + Tgx}{Secx - Tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}$$

a) 1 b) –1 c) Csc x
d) –Csc x e) Sen x

CLAVES II				
1. b	2. c	3. c	4. b	5. d
6. c	7. c	8. c	9. d	10. a
11. e	12. a	13. a	14. e	15. d
16. c	17. e	18. c	19. d	20. c

Identidades trigonométricas para el arco triple

Seno del arco triple

$$\boxed{Sen3x = 3Senx - 4Sen^3x}$$

Demostración

Notamos que:

$$\begin{aligned}
Sen3x &= Sen\,(2x + x)\\
&= Sen2x \bullet Cosx + Cos2x \bullet Senx\\
&= (2Senx \bullet Cosx) \bullet Cosx + Senx \bullet Cos2x\\
&= 2Senx \bullet Cos^2x + Senx \bullet (1 - 2Sen^2x)\\
&= 2Senx \bullet (1 - Sen^2x) + Senx - 2Sen^3x\\
&= 2Senx - 2Sen^3x + Senx - 2Sen^3x\\
\rightarrow \quad Sen3x &= 3Senx - 4Sen^3x \qquad \text{L.q.q.d}
\end{aligned}$$

Ejemplos

- $Sen6\alpha = Sen3(2\alpha) = 3Sen2\alpha - 4Sen^32\alpha$
- $Sen27^o = Sen3(9^o) = 3Sen9^o - 4Sen^39^o$
- $3Sen40^o - 4Sen^340^o = Sen3(40^o) = Sen120^o$
- $3Sen\dfrac{\theta}{3} - 4Sen^3\dfrac{\theta}{3} = Sen3\left(\dfrac{\theta}{3}\right) = Sen\theta$

Coseno del arco triple

$$\boxed{Cos3x = 4Cos^3x - 3Cosx}$$

Demostración

Notamos que:

$$\begin{aligned}
Cos3x &= Cos(2x + x)\\
&= Cos2x \bullet Cos\,x - Sen2x \bullet Senx\\
&= Cosx \bullet Cos2x - (2Senx \bullet Cosx) \bullet Senx\\
&= Cosx \bullet (2Cos^2x - 1) - 2\,Cosx \bullet Sen^2x\\
&= 2Cos^3x - Cosx - 2Cosx(1 - Cos^2x)\\
&= 2Cos^3x - Cosx - 2Cosx + 2Cos^3x\\
\rightarrow \quad Cos3x &= 4Cos^3x - 3Cosx \qquad \text{L.q.q.d}
\end{aligned}$$

Ejemplos

- $Cos33º = Cos3(11º) = 4Cos^3 11º - 3Cos11º$
- $Cos9\beta = Cos3(3\beta) = 4Cos^3 3\beta - 3Cos3\beta$
- $4Cos^3(60º+\varphi) - 3Cos(60º+\varphi) = Cos3(60º+\varphi) = Cos(180º+3\varphi) = -Cos3\varphi$
- $4Cos^3 8º20' - 3Cos8º20' = Cos3(8º20') = Cos24º60' = Cos25º$

Degradación del exponente "3" ó "Cubo"

Las fórmulas expuestas a continuación son empleadas en las expresiones trigonométricas, donde se presenten "senos" o "cosenos" de un cierto arco elevado al exponente "3".

Degradación del "Cubo" del seno de un arco simple "x"

Se ha demostado que:

$Sen3x = 3Senx - 4Sen^3x \quad \rightarrow \quad \boxed{4Sen^3x = 3Senx - Sen3x}$

Ejemplos

- $4Sen^3 5º = 3Sen5º - Sen3(5º) = 3Sen5º - Sen15º$
- $4Sen^3 3\alpha = 3Sen3\alpha - Sen3(3\alpha) = 3Sen3\alpha - Sen9\alpha$
- $Sen^3 15º = \dfrac{4Sen^3 15º}{4} = \dfrac{3Sen15º - Sen3(15º)}{4} = \dfrac{3Sen15º - Sen45º}{4}$
- $3Sen2\theta - Sen6\theta = 3Sen2\theta - Sen3(2\theta) = 4Sen^3 2\theta$

Degradación del "Cubo" del coseno de un arco simple "x"

Se ha demostrado que:

$Cos3x = 4Cos^3x - 3Cosx \quad \rightarrow \quad \boxed{4Cos^3x = 3Cosx + Cos3x}$

Ejemplos

- $4Cos^3 5\varphi = 3Cos5\varphi + Cos3(5\varphi) = 3Cos5\varphi + Cos15\varphi$
- $4Cos^3 12º = 3Cos12º + Cos3(12º) = 3Cos12º + Cos36º$
- $Cos^3 2\beta = \dfrac{4Cos^3 2\beta}{4} = \dfrac{3Cos2\beta + Cos3(2\beta)}{4} = \dfrac{3Cos2\beta + Cos6\beta}{4}$
- $3Cos10º + Cos30º = 3Cos10º + Cos3(10º) = 4Cos^3 10º$

Tangente del arco triple

$$\boxed{Tan3x = \frac{3Tanx - Tan^3x}{1 - 3Tan^2x}}$$

Demostración

Notamos que:

$$Tan3x = Tan(x+2x) = \frac{Tanx + Tan2x}{1 - Tanx \bullet Tan2x} = \frac{Tanx + \left(\dfrac{2Tanx}{1 - Tan^2x}\right)}{1 - Tanx \bullet \left(\dfrac{2Tanx}{1 - Tan^2x}\right)}$$

Efectuando tenemos:

$$\rightarrow \ Tan3x = \frac{3Tanx - Tan^3x}{1 - 3Tan^2x} \qquad \text{L.q.q.d}$$

Ejemplos

- $Tan66º = Tan3(22º) = \dfrac{3Tan22º - Tan^3 22º}{1 - 3Tan^2 22º}$
- $Tan9\alpha = Tan3(3\alpha) = \dfrac{3Tan3\alpha - Tan^3 3\alpha}{1 - 3Tan^2 3\alpha}$
- $\dfrac{3Tan10º - Tan^3 10º}{1 - 3Tan^2 10º} = Tan3(10º) = Tan30º$

Cotangente, secante y cosecante del arco triple

Tomaremos las identidades recíprocas aplicadas el arco triple, es decir:

Como: $Tan3x \bullet Cot3x = 1 \quad \rightarrow \quad Cot3x = \dfrac{1}{Tan3x}$

Como: $Cos3x \bullet Sec3x = 1 \quad \rightarrow \quad Sec3x = \dfrac{1}{Cos3x}$

Como: $Sen3x \bullet Csc3x = 1 \quad \rightarrow \quad Csc3x = \dfrac{1}{Sen3x}$

Problema aplicativo

Siendo: $\dfrac{Sec3x}{Csc3x} = \sqrt{0{,}444...}$; calcular el valor de "Cot3x".

Resolución

Sabemos: $\dfrac{Sec3x}{Csc3x} = \sqrt{0{,}\overset{\frown}{4}} \quad \rightarrow \quad \dfrac{\dfrac{1}{Cos3x}}{\dfrac{1}{Sen3x}} = \sqrt{\dfrac{4}{9}}$

$\rightarrow \quad \dfrac{Sen3x}{Cos3x} = \dfrac{2}{3} \quad \rightarrow \quad Tan3x = \dfrac{2}{3}$

Finalmente: $\text{Cot}3x = \dfrac{1}{\text{Tan}3x}$ → $\text{Cot}3x = \dfrac{1}{\frac{2}{3}} = \dfrac{3}{2}$

Resumen de fórmulas

Básicas:

* $\text{Sen}3x = 3\text{Sen}x - 4\text{Sen}^3x$ →
* $\text{Cos}3x = 4\text{Cos}^3x - 3\text{Cos}x$ →
* $\text{Tan}3x = \dfrac{3\text{Tan}x - \text{Tan}^3x}{1 - 3\text{Tan}^2x}$

Degradan "cubos":

$4\text{Sen}^3x = 3\text{Sen}x - \text{Sen}3x$

$4\text{Cos}^3x = 3\text{Cos}x + \text{Cos}3x$

Observaciones:

* $\text{Cot}3x = \dfrac{1}{\text{Tan}3x}$
* $\text{Sec}3x = \dfrac{1}{\text{Cos}3x}$
* $\text{Csc}3x = \dfrac{1}{\text{Sen}3x}$

Especiales:

$\text{Sen}3x = \text{Sen}x(2\text{Cos}2x + 1)$

$\text{Cos}3x = \text{Cos}x(2\text{Cos}2x - 1)$ → $\text{Tan}3x = \text{Tan}x\left(\dfrac{2\text{Cos}2x + 1}{2\text{Cos}2x - 1}\right)$

$4\text{Sen}x \cdot \text{Sen}(60^\circ - x) \cdot \text{Sen}(60^\circ + x) = \text{Sen}3x$

$4\text{Cos}x \cdot \text{Cos}(60^\circ - x) \cdot \text{Cos}(60^\circ + x) = \text{Cos}3x$

$\text{Tan}x \cdot \text{Tan}(60^\circ - x) \cdot \text{Tan}(60^\circ + x) = \text{Tan}3x$

Notas

$\text{Sen}18^\circ = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}$

$\text{Csc}18^\circ = \sqrt{5} + 1$

$\text{Cos}36^\circ = \dfrac{\sqrt{5} + 1}{4}$

$\text{Sec}36^\circ = \sqrt{5} - 1$

Problemas I

1. Siendo:

$$\text{Cos } x = \frac{1}{4}$$

Calcular:

$$P = \text{Cos } 3x \cdot \text{Sec } x$$

a) $\frac{11}{4}$ b) $-\frac{11}{4}$ c) $\frac{7}{4}$
d) $-\frac{7}{4}$ e) $-\frac{5}{4}$

2. Siendo:

$\text{Cos } x = \sqrt{\frac{1}{3}}$; "x" es agudo;

Calcular: Tg 3x

a) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ b) $-\frac{\sqrt{2}}{5}$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$
d) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ e) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

3. Simplificar:

$$M = \frac{\text{Sen}3x}{\text{Sen}x} - 1$$

a) Cos x b) Cos 2x c) 2cos x
d) 2Cos 2x e) Cos^2x

4. Calcular:

$$J = \text{Sen } 10° \cdot \text{Sen } 50° \cdot \text{Sen } 70°$$

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{8}$
d) $\frac{1}{16}$ e) $\frac{1}{32}$

5. Señale el valor de:

$$Y = \text{Sec } 20° \cdot \text{Sec } 40° \cdot \text{Sec } 80°$$

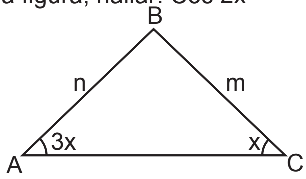
a) 8 b) 6 c) 16
d) 4 e) 32

6. Hallar "x", si:

$$\frac{\text{Tg}x}{\text{Tg}12°} = \frac{\text{Tg}72°}{\text{Tg}42°}$$

a) 36° b) 18° c) 24°
d) 54° e) 28°

7. De la figura, hallar: Cos 2x



a) $\frac{m-n}{2m}$ b) $\frac{m-n}{n}$ c) $\frac{m-n}{2n}$
d) $\frac{m-n}{m}$ e) $\frac{m+n}{2m}$

8. La siguiente igualdad es una identidad:

$$\frac{\text{Sen}3\phi}{\text{Sen}\phi} + \frac{\text{Cos}3\phi}{\text{Cos}\phi} = 2k\text{Cos}\phi$$

Hallar: k

a) 0 b) 1 c) 2
d) 4 e) 3

9. Calcular:

$$\text{Cos } 85°(1+2\text{Sen } 80°)$$

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
d) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ e) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

10. Calcular:

$$\text{Sec}\frac{2\pi}{9} + 8\text{Cos}^2\frac{2\pi}{9}$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 5 e) 6

11. Simplificar:

$$W = \frac{\text{Sen}3x \cdot \text{Csc}x}{0,75 - \text{Sen}^2x} + \frac{3\text{Cos}x + \text{Cos}3x}{3\text{Sen}x - \text{Sen}3x}$$

a) $4+\text{Cot}^3x$ b) Cot^3x c) 2Cot^3x
d) 3Cot^3x e) 4Cot^3x

12. Si:

$$P = 4 - 8\text{Sen}^2 9° - 3\text{Sec } 18°$$

Entonces una expresión equivalente para P será:

a) Tg 9° b) Tg 18° c) 2Tg18°
d) 2Tg 9° e) Tg 36°

13. Si: $3Tg^2x + 6Tg\,x - 1 = 2Tg^3x$
Calcular: Tg 6x

a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{2}$

d) $-\frac{1}{2}$ e) $\frac{2}{3}$

14. En la siguiente igualdad se tiene una identidad trigonométrica:

$$\frac{ASen4x + BCos2x}{Senx + Cosx} = Sen3x \cdot Cotx + Cos\,3x \cdot Tg\,x$$

Calcular: A+B

a) 1 b) 2 c) 3
d) 6 e) 4

15. Si:
$aCsc\,x = 3 - 4Sen^2x$ $\wedge$
$bSec\,x = 4Cos^2x - 3$
Calcular: a^2+b^2

a) –2 b) 0 c) 0,5
d) 1 e) 2

16. $Sen(60°-x) = \frac{1}{3}$
Calcular:

$$W = -Cos\,6x$$

a) $\frac{41}{47}$ b) $\frac{5}{67}$ c) $\frac{329}{729}$

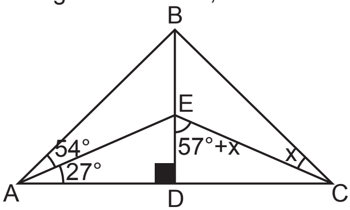
d) $\frac{63}{65}$ e) $\frac{121}{130}$

17. Calcular el valor de:

$$M = \frac{\sqrt[3]{1 + 6Cos20°}}{2Cos20°}$$

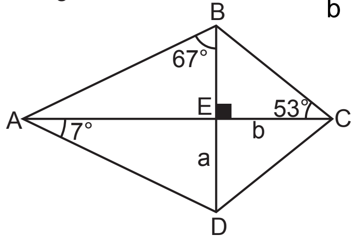
a) 1 b) 0 c) 0,5
d) 1,5 e) 3

18. En la figura mostrada, calcular "x".



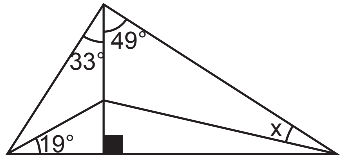
a) 10° b) 20° c) 15°
d) 25° c) 30°

19. En la figura mostrada, calcular: $\frac{a}{b}$



a) Tg 120° b) Tg 240° c) Tg 30°
d) Tg 54° e) Tg 21°

20. Calcular "x".



a) 40° b) 50° c) 30°
d) 37° e) 53°

CLAVES I				
1. b	2. b	3. d	4. c	5. a
6. a	7. c	8. c	9. d	10. e
11. a	12. c	13. a	14. e	15. d
16. c	17. a	18. e	19. e	20. c

Problemas II

1. Reduzca:

$$P = \frac{Sen3x + Sen^3x}{Cos^3x - Cos3x}$$

a) Tan x b) Cot x c) Tan 3x
d) Cot 3x e) 1

2. Simplifique:

$$\frac{Cos^3x - Cos3x}{Cosx} + \frac{Sen^3x + Sen3x}{Senx}$$

a) –1 b) –2 c) 1
d) 2 e) 3

3. Calcule el valor de:

$$\frac{3Sen15° - 4Sen^3 15°}{4Cos^3 20° - 3Cos20°}$$

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\sqrt{2}$

d) $\sqrt{3}$ e) $\frac{1}{2}$

4. Calcule el valor de: Sen 159°

a) $\frac{117}{225}$ b) $\frac{107}{225}$ c) $\frac{44}{225}$
d) $\frac{44}{125}$ e) $\frac{22}{225}$

5. Si: 2Sen 3x = 3Sen x; calcular:
"Cos 2x"
a) 0,20 b) 0,25 c) 0,30
d) 0,40 e) 0,50

6. Calcular:

$$\frac{Sen10°\cdot Sen50°\cdot Sen70°}{Tan20°\cdot Tan40°\cdot Tan80°}$$

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{1}{16}$
d) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{24}$

7. Reduzca:
$3Tan^2\theta\cdot \cdot Tan\,3\theta + 3Tan\,\theta - Tan^3\theta$
a) Tan θ b) Tan 3 θ c) Tan 6 θ
d) Cot θ e) Cot 3θ

8. Si: $Tan\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$; calcular:
"Tan 3x"

a) $-\frac{45\sqrt{3}}{28}$ b) $-\frac{15\sqrt{3}}{28}$ c) $-\frac{5\sqrt{3}}{28}$
d) $-\frac{5\sqrt{3}}{7}$ e) $-\frac{45\sqrt{3}}{14}$

9. Si: $4Cos^2\frac{x}{2} = 3 + 4Sen^2\frac{x}{2}$;
Calcule: Cos 3x

a) $-\frac{1}{4}$ b) $-\frac{3}{4}$ c) $-\frac{3}{16}$
d) $-\frac{9}{16}$ e) $-\frac{3}{8}$

10. Si: $0,\widehat{3}$ Csc α = Cos α; calcule:
"Sen 6α"

a) $\frac{22}{27}$ b) $\frac{11}{27}$ c) $\frac{2}{27}$
d) $\frac{9}{11}$ e) $\frac{1}{27}$

11. Reduzca:

$$16Cos^6x - 24Cos^4x + 9Cos^2x$$

a) 3Sen x b) 3Cos x c) Cos^23x
d) Cos^33x e) Cos^43x

12. Reducir:

$$E=\frac{Sen3x}{Senx}-3Cos^2x$$

a) $-Sen^2x$ b) $-2Sen^2x$ c) $-Cos^2x$
d) Sen^2x e) Cos^2x

13. Reducir:

$$M=\frac{Sen3x+Sen^3x}{Sen2x}$$

a) $\frac{3}{2}$ Cos x b) $\frac{3}{2}$ Sen x c) $\frac{1}{2}$ Cos x
d) $\frac{1}{2}$ Sen x e) $\frac{3}{4}$ Cos x

14. Reduzca:

$$W=\frac{Sen2\beta}{2}\left(\frac{Sen3\beta}{Sen^3\beta}+\frac{Cos3\beta}{Cos^3\beta}\right)$$

a) 3Tan β b) 6Cot β
c) 3Tan 2β d) 6Tan 2β
e) 6Cot 2β

15. ¿A qué es equivalente:
$\sqrt{3}$ +6Cos 10°?
a) Sen 10° b) $Sen^310°$
c) $8Sen^210°$ d) $8Cos^310°$
e) $8Sen^310°$

16. Indique el equivalente de:
$Tan^220° \cdot Tan^240° + Cot^280°$
a) 2Tan 10° b) 4Tan 10°
c) $2Tan^210°$ d) $4Tan^210°$
e) 2Tan 20°

17. ¿Cuántos valores enteros puede tomar la expresión:

$$\frac{1-Cos6x}{1-Cos2x}$$

a) 2 b) 3 c) 4
d) 7 e) 9

18. Si: $Sen^2\dfrac{\pi}{3} - Sen^2x = mSen\ 3x$.
Halle: "m"

a) $\dfrac{1}{4}$Sen x b) $\dfrac{1}{4}$Csc x c) $\dfrac{1}{4}$Cos x

d) $\dfrac{1}{2}$Sen x e) $\dfrac{1}{2}$Csc x

19. Reduzca:
Tan 10°+ Tan 60°+ Tan 40°
a) Tan 20° b) Tan 40° c) Tan 50°
d) Tan 70° e) Tan 80°

20. Si: $Tan\ 3x \cdot Cot\ x = n^3$
Calcule:

$$W = \frac{Cosx}{(n-1)\cdot Cos3x}$$

a) $\dfrac{n^2+n+1}{2}$ b) $\dfrac{n^2-n+1}{2}$

c) $\dfrac{n^3+n^2+1}{2}$ d) $\dfrac{n^2+n}{2}$

e) $\dfrac{n^2+n+1}{4}$

CLAVES II				
1. b	2. e	3. c	4. d	5. b
6. e	7. b	8. a	9. d	10. a
11. c	12. a	13. a	14. e	15. d
16. d	17. e	18. b	19. d	20. a

Transformaciones trigonométricas

De suma o diferencia a producto

Recordar que:

$\text{Sen}(x + y) = \text{Sen}x \bullet \text{Cos}y + \text{Cos}x \bullet \text{Sen}y$ .... (1)

$\text{Sen}(x - y) = \text{Sen}x \bullet \text{Cos}y - \text{Cos}x \bullet \text{Sen}y$ .... (2)

(1) + (2):

$\text{Sen}(x + y) + \text{Sen}(x - y) = 2\text{Sen}x \bullet \text{Cos}y$ .... (3)

Haciendo: $x + y = A \rightarrow x - y = B \rightarrow x = \dfrac{A+B}{2} \rightarrow y = \dfrac{A-B}{2}$

Reemplazando en (3):

$$\text{Sen}A + \text{Sen}B = 2\text{Sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \bullet \text{Cos}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Análogamente y en resumen tendremos:

$\text{Sen}A + \text{Sen}B = 2\text{Sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \bullet \text{Cos}\left(\frac{A-B}{2}\right)$
$\text{Sen}A - \text{Sen}B = 2\text{Cos}\left(\frac{A+B}{2}\right) \bullet \text{Sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$
$\text{Cos}A + \text{Cos}B = 2\text{Cos}\left(\frac{A+B}{2}\right) \bullet \text{Cos}\left(\frac{A-B}{2}\right)$
$\text{Cos}B - \text{Cos}A = 2\text{Sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \bullet \text{Sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$

Donde: $\boxed{A > B}$

Ojo:

$$\text{Cos}A - \text{Cos}B = -2\text{Sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \bullet \text{Sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Ejemplos

- $\text{Sen}6x + \text{Sen}2x = 2\text{Sen}\left(\frac{6x+2x}{2}\right) \bullet \text{Cos}\left(\frac{6x-2x}{2}\right) = 2\text{Sen}4x \bullet \text{Cos}2x$

- $\text{Sen}80^\circ - \text{Sen}40^\circ = 2\text{Cos}\left(\frac{80^\circ+40^\circ}{2}\right) \bullet \text{Sen}\left(\frac{80^\circ-40^\circ}{2}\right) = 2\text{Cos}60^\circ \bullet \text{Sen}20^\circ$
- $\text{Cos}12\theta + \text{Cos}4\theta = 2\text{Cos}\left(\frac{12\theta+4\theta}{2}\right) \bullet \text{Cos}\left(\frac{12\theta-4\theta}{2}\right) = 2\text{Cos}8\theta \bullet \text{Cos}4\theta$
- $\text{Cos}5^\circ - \text{Cos}55^\circ = 2\text{Sen}\left(\frac{55^\circ+5^\circ}{2}\right) \bullet \text{Sen}\left(\frac{55^\circ-5^\circ}{2}\right) = 2\text{Sen}30^\circ \bullet \text{Sen}25^\circ$
- $\text{Cos}55^\circ - \text{Cos}5^\circ = -2\text{Sen}\left(\frac{55^\circ+5^\circ}{2}\right) \bullet \text{Sen}\left(\frac{55^\circ-5^\circ}{2}\right) = -2\text{Sen}30^\circ \bullet \text{Sen}25^\circ$

De producto a suma o diferencia

Recordar que:

Senx•Cosy + Cosx•Seny = Sen(x + y) ... (1)
Senx•Cosy – Cosx•Seny = Sen(x – y)... (2)

(1) + (2):

2Senx•Cosy = Sen(x + y) + Sen(x – y)

Análogamente y en resumen tendremos:

2Senx•Cosy	= Sen(x + y) + Sen(x – y)
2Cosx•Seny	= Sen(x + y) – Sen(x – y)
2Cosx•Cosy	= Cos(x + y) + Cos(x – y)

Donde: $\boxed{x > y}$

Ojo:

2Senx•Seny	= Cos(x – y) – Cos(x + y)

Ejemplos

- 2Sen5x•Cosx = Sen(5x + x) + Sen(5x – x) = Sen6x + Sen4x
- 2Cos30º•Sen15º = Sen(30º+15º) – Sen(30º–15º) = Sen45º – Sen15º
- 2Cos75º•Cos5º = Cos(75º+5º) + Cos(75º – 5º) = Cos80º + Cos70º
- 2Sen6θ•Sen4θ = Cos(6θ – 4θ) – Cos(6θ + 4θ) = Cos2θ – Cos10θ

Problema aplicativo

Factorizar:

E = Cos5x • Sen2x + Cos2x • Senx

Resolución

Multiplicamos por (2) a ambos miembros:

2E = 2Cos5x • Sen2x + 2Cos2x • Senx

Transformamos a diferencia de senos:

2E = Sen7x – Sen3x + Sen3x – Senx
2E = Sen7x – Senx

Transformamos a producto:

2E = 2Cos4x • Sen3x
E = Cos4x • Sen3x

Problemas I

1. Calcular:

$$K=\frac{\operatorname{Sen}\frac{3\pi}{8}+\operatorname{Sen}\frac{\pi}{8}}{\operatorname{Sen}\frac{3\pi}{8}-\operatorname{Sen}\frac{\pi}{8}}$$

a) 1 b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{1}{2}$

d) $\sqrt{2}+1$ e) $\sqrt{2}-1$

2. Reducir:

$$P=\frac{\operatorname{Sen}12x+\operatorname{Sen}4x}{\operatorname{Cos}12x+\operatorname{Cos}4x}-\frac{\operatorname{Cos}11x-\operatorname{Cos}5x}{\operatorname{Sen}11x-\operatorname{Sen}5x}$$

a) 2Tan 8X b) 2 c) 1

d) 2Cot 8X e) 0

3. Siendo: $\phi=\frac{\pi}{19}$ rad

Hallar:

$$P=\frac{\operatorname{Sen}3\phi-\operatorname{Sen}23\phi}{\operatorname{Sen}4\phi+\operatorname{Sen}16\phi}$$

a) –1 b) 1 c) –2

d) 2 e) $\frac{1}{2}$

4. Simplificar:

$$Q=\frac{\operatorname{Cos}(150^\circ+x)+\operatorname{Cos}(150^\circ-x)}{\operatorname{Cos}(120^\circ-x)-\operatorname{Cos}(120^\circ+x)}$$

a) –Tan x b) Tan x c) –Cot x

d) Cot x e) 1

5. Hallar Cot 68°, si se cumple que:

Sen 12° + Sen 32° = m ;

Cos 12° + Cos 32° = n

a) m+n b) m–n c) mn

d) $\frac{m}{n}$ e) $\frac{n}{m}$

6. Calcular:

$$W=\frac{\operatorname{Cos}10^\circ+\operatorname{Cos}15^\circ+\operatorname{Cos}20^\circ}{\operatorname{Sen}10^\circ+\operatorname{Sen}15^\circ+\operatorname{Sen}20^\circ}$$

a) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $2\sqrt{3}$

d) $2-\sqrt{3}$ e) $2+\sqrt{3}$

7. Hallar "n" en la siguiente Identidad:

1 + Cos 2x + Cos 6x + Cos 8x

= n · Cos x · Cos 3x · Cos 4x

a) 4 b) -4 c) 2

d) -2 e) 1

8. Calcular:

$$T=\frac{\operatorname{Cos}10^\circ}{\operatorname{Cos}20^\circ}+\frac{\operatorname{Sen}40^\circ}{\operatorname{Sen}70^\circ}$$

a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\sqrt{3}$

9. Factorizar:

$Q = \operatorname{Sen}^2 3x - \operatorname{Sen}^2 2x$

a) Sen 5x · Cos x

b) Sen 5x · Sen x

c) Sen 3x · Sen 2x

d) Cos 5x · Sen x

e) Cos 5x · Cos x

10. Llevar a producto:

H = 1 + 2Sen 4y · Cos 4y

a) 2Sen(90°+8y)·Cos(90°–8y)

b) 2Sen(45°+4y)·Sen(45°–4y)

c) 2Cos(45°+4y)·Cos(45°–4y)

d) 2Cos(45°+4y)·Sen(45°–4y)

e) 2Sen(45°+4y)·Cos(45°–4y)

11. Factorizar:

M = 1 + 2Cos 5°

a) 4.Cos 65° · Cos 55°

b) 2Cos 32°30' · Cos 27°30'

c) 4Cos 32°30' · Cos 27°30'

d) 2Sen 32°30' · Sen 27°30'

e) 4Sen 32°30' · Sen 27°30'

12. Si:

$\operatorname{Cos}36^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ y

$\operatorname{Cos}72^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

Hallar el valor de:

P = 2Cos 18° · Sen 36°

a) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ c) $\sqrt{5}$

d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{4}$

13. Calcular:

Q = 6Cos 71°30' · Sen 18°30'

a) 0,3 b) 0,4 c) 0,6

d) 0,8 e) 1,2

14. Reducir:
$T = Cos^2(A+B)+Cos^2(A-B)-Cos\,2A \cdot Cos\,2B$
a) Cos A b) Cos B c) 2
d) 1 e) 0

15. Factorizar:
J = Cos 3x·Cos 5x – Sen x·Sen 3x
a) Sen 6x · Cos 2x
b) Cos 6x · Sen 2x
c) Cos 12x · Sen 4x
d) Sen 6x · Sen 2x
e) Cos 6x · Cos 2x

16. Calcular:
$$P = \frac{Sen40° \cdot Cos10° - Cos20° \cdot Sen10°}{Cos20° \cdot Cos10° - Sen40° \cdot Sen10°}$$
a) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $-\sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
d) $\sqrt{3}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

17. Hallar el valor de:
U = Cot 33°30' – Tan 3°30'
a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{6}{13}$ c) $\frac{12}{13}$
d) $\frac{8}{11}$ e) $\frac{16}{11}$

18. En triángulo PQR se cumple que:
Sen P – Cos Q = Cos P – Sen Q
Luego su ángulo interno "R" mide:
a) 90° b) 45° c) 60°
d) 30° e) 15°

19. Siendo:
7Sen x · Cos x = 5Sen y · Cos y
Hallar:
Tan (x+y) · Cot (x–y)
a) 1 b) 6 c) –6
d) $\frac{1}{6}$ e) $-\frac{1}{6}$

20. Simplificar:
$$W = \frac{SenA + SenB + Sen(A+B)}{1 + Cos(A+B) + CosA + CosB}$$
a) $Cot\left[\frac{A+B}{2}\right]$ b) $Tan\left[\frac{A+B}{2}\right]$
c) $\frac{Tan[A+B]}{2}$ d) $Tan\left[\frac{A-B}{2}\right]$
e) $Cot\left[\frac{A-B}{2}\right]$

CLAVES I				
1. d	2. a	3. b	4. c	5. d
6. e	7. a	8. e	9. b	10. e
11. c	12. a	13. c	14. d	15. e
16. c	17. e	18. a	19. c	20. b

Problemas II

1. Halle el valor de "P"; si:
PCos 70° – Sen 65° + Sen 25° = 0
a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
d) $\sqrt{3}$ e) 1

2. Simplifique:
$$\left(\frac{Cos3x + Cosx}{Cos3x - Cos5x}\right)Tan\ x$$
a) $\frac{1}{2}$ Sec x b) $\frac{1}{2}$ Csc x c) $\frac{1}{2}$ Sec 2x
d) $\frac{1}{2}$ Csc 2x e) Sec 2x

3. Reduzca:
$$\frac{Sen3x + Sen6x + Sen9x}{Cos3x + Cos6x + Cos9x}$$
a) Tan x b) Cot 3x c) Tan 6x
d) Cot 6x e) Tan 9x

4. Transforme a producto:
M = Cos α+Cos 5α+Cos 9α+Cos 15α
a) 4Cos α Cos 2α Cos 7α
b) 4Sen 2α Sen 5α Sen 7α
c) 4Cos 3α Cos 5α Cos 7α
d) 2Cos 3α Cos 7α Cos 9α
e) 2Cos α Cos 3α Sen 5α

5. Calcular:
$$\frac{(Cos40° + Sen24°)Csc77°}{(Cos20° - Sen10°)Sec40°}$$
a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{5}$
d) $\frac{6}{5}$ e) $\frac{8}{5}$

6. Reduzca:
2Sen 7x Cos 3x – Sen 4x
a) Sen 3x b) Sen 7x c) Sen 4x
d) Sen 10x e) Cos 10x

7. Transforme a producto:
$$A = \text{Sen } 5x \text{ Sen } x + \text{Cos } 7x \text{ Cos } x$$
a) 2Cos 6x · Cos x
b) 2Sen 6x · Sen 2x
c) 2Sen 2x · Cos 6x
d) Cos 2x · Cos 6x
e) Sen 2x · Sen 6x

8. Reduzca:
$$N = 2\text{Cos } 4x \cdot \text{Csc } 6x - \text{Csc } 2x$$
a) –Sec 3x b) –Csc 3x c) –Sec 6x
d) –Csc 6x e) Tan 6x

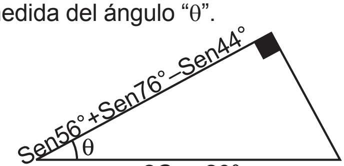
9. Simplificar:
$$A = \frac{\text{Sen}2x \cdot \text{Cos}3x - \text{Sen}x \cdot \text{Cos}4x}{\text{Cos}2x \cdot \text{Cos}5x - \text{Cos}4x \cdot \text{Cos}3x}$$
a) Cot x b) –Cot x c) Cot 5x
d) –Cot 2x e) Cot 2x

10. Simplifique:
$$\frac{\text{Sen}20°}{\sqrt{3} - 2\text{Sen}20°}$$
a) $\frac{1}{2}$ Cos 20° b) $\frac{1}{2}$ Sec 20°
c) $\frac{1}{4}$ Cos 40° d) $\frac{1}{4}$ Sec 40°
e) $\frac{1}{8}$ Sec 80°

11. Calcule el menor ángulo que cumple:
$$\text{Tan } x = \frac{2\text{Cos}20° - \text{Sen}50°}{\text{Sen}40°}$$
a) 15° b) 20° c) 30°
d) 45° e) 60°

12. Reducir:
$$\frac{1 - 4\text{Sen}10° \cdot \text{Sen}70°}{\text{Sen}5° \cdot \text{Cos}5°}$$
a) $\frac{1}{2}$ b) 2 c) $\frac{3}{2}$
d) 4 e) 5

13. En la figura mostrada, hallar la medida del ángulo "θ".



a) 16° b) 32° c) 36°
d) 54° e) 72°

14. La expresión equivalente de:
$$\frac{\text{Sen}\theta + \text{Cos}(2x - \theta)}{\text{Cos}\theta - \text{Sen}(2x - \theta)}$$
es:
a) $\text{Cot}(\frac{\pi}{4} - x)$ b) $\text{Tan}(\frac{\pi}{4} - x)$
c) $\text{Tan}(\frac{\pi}{8} + x)$ d) $\text{Cot}(\frac{\pi}{4} + x)$
e) $\text{Tan}(\frac{\pi}{8} - x)$

15. Determine el valor de "k", si:
$$k\text{Sen } 40° = \text{Sec } 40° + \text{Sec } 100°$$
a) $\sqrt{3}$ b) 2 c) $-\sqrt{2}$
d) $-2\sqrt{2}$ e) $-4\sqrt{3}$

16. Si: 2Sen 5α = 3Sen 3α
Calcular:
$$5\text{Cot } 4\alpha - \text{Cot } \alpha$$
a) -2 b) –1 c) 0 d) 1 e) 2

17. Transforme a producto:
$$R = 3\text{Sen } 3x + 2\text{Sen } x + \text{Sen } 5x$$
a) $8\text{Sen } x \cdot \text{Cos}^3x$
b) $16\text{Sen } x \cdot \text{Cos}^4x$
c) $12\text{Cos } x \cdot \text{Sen}^4x$
d) $16\text{Cos } x \cdot \text{Sen}^3x$
e) $32\text{Sen } x \cdot \text{Cos}^5x$

18. Halle el valor de "K", para que la siguiente igualdad, sea una identidad:
$$\frac{\text{Sen}3x - \text{Sen}x}{\text{Cos}3x + \text{Cos}x} + \frac{\text{Sen}3x + \text{Sen}x}{\text{Cos}3x - \text{Cos}x} = k\left(\frac{\text{Sen}6x + \text{Sen}2x}{\text{Cos}6x - \text{Cos}2x}\right)$$
a) –2 b) 2 c) –1 d) 1 e) 4

19. Simplifique:
$$A = \frac{2(\text{Sen}2\alpha + \text{Sen}2\beta)}{1 + \text{Cos}2\alpha + \text{Cos}2\beta + \text{Cos}2(\alpha - \beta)}$$
a) Tan α + Tan β b) Tan α – Tan β
c) Tan β – Tan α d) Tan α·Tan β
e) 1

20. Sabiendo que: Sen α + Sen β = a
Cos α + Cos β = b
Halle: $\text{Cos}(\alpha+\beta)\left[\frac{b^2 + a^2}{b + a}\right]$
a) b–a b) a–b c) a
d) b e) a+b

CLAVES II				
1. b	2. d	3. c	4. c	5. d
6. d	7. d	8. d	9. d	10. d
11. e	12. d	13. d	14. a	15. e
16. c	17. b	18. b	19. a	20. a

Resolución de triángulos oblicuángulos

Triángulos oblicuángulos

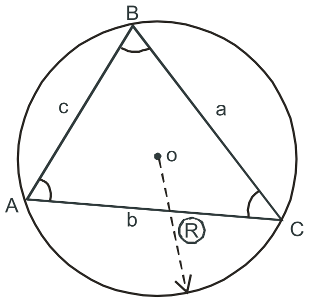
El triángulo que no contiene el ángulo recto se denomina OBLICUÁNGULO.

- Los elementos básicos de todo triángulo son sus tres lados y sus tres ángulos.
- Un triángulo está determinado si se conocen tres de sus elementos básicos (uno de ellos es nesariamente uno de los lados).
- Resolver un triángulo significa que dados tres elementos básicos, se puede calcular los otros tres elementos.

Leyes fundamentales

Ley de senos

"En todo triángulo las medidas de sus lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos".



En el ΔABC se cumple:

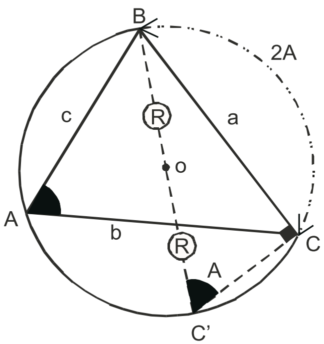
$$\boxed{\frac{a}{\text{SenA}} = \frac{b}{\text{SenB}} = \frac{c}{\text{SenC}} = 2R}$$

"R" →Circunradio, "O" →circuncentro

Observaciones:

a = 2R•SenA
b = 2R•SenB
c = 2R•SenC

Demostración



* En el ⊿BCD:

$$\text{SenA} = \frac{a}{2R} \quad \rightarrow \quad \frac{a}{\text{SenA}} = 2R$$

* En forma análoga:

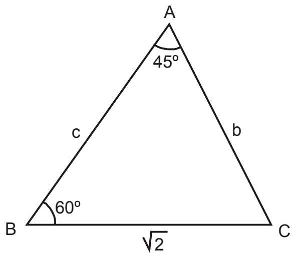
$$\frac{b}{\text{SenB}} = 2R \quad \rightarrow \quad \frac{c}{\text{SenC}} = 2R$$

Conclusiones

$$\frac{a}{SenA} = \frac{b}{SenB} = \frac{c}{Senc} = 2R \qquad \text{L.q.q.d}$$

Ejemplos

1. En un triángulo ABC; si se cumple que $a = \sqrt{2}u$, B = 60º y A = 45º, calcular el lado AC.



Resolución

Datos: a = $\sqrt{2}$u

B = 60º

A = 45º

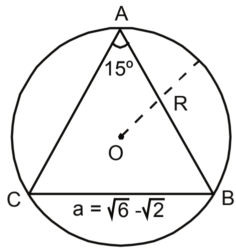
b = ??

Aplicando Ley de Senos

$$\frac{b}{Sen60º} = \frac{\sqrt{2}}{Sen45º} \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{2}Sen60º}{Sen45º} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}/2)}{\sqrt{2}/2}$$

$\rightarrow$ b = AC = $\sqrt{3}$ u

2. Hallar "R"



Resolución

Aplicamos: a = 2R•SenA

Según la figura:

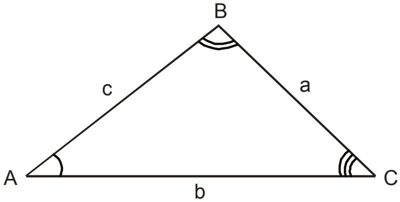
Reemplazando datos: $\sqrt{6} - \sqrt{2} = 2R•Sen15º$

$$\sqrt{6} - \sqrt{2} = 2R\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)$$

Luego: R = 2

Ley de cosenos

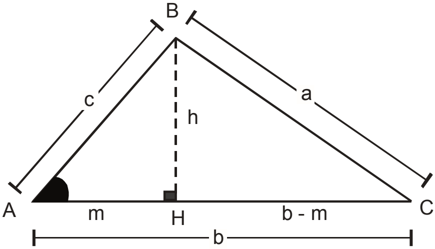
"En todo triángulo la medida de cualesquiera de sus lados al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble del producto de dichos lados por el coseno del ángulo que éstos forman".



En el ΔABC se cumple:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot CosA$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot CosB$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot CosC$

Demostración



Tenemos:

* En el ⊿AHB: $h^2 = c^2 - m^2$

* En el ⊿BHC: $h^2 = a^2 - (b - m)^2$ ... (2)

Igualando (1) y (2)

$$c^2 - m^2 = a^2 - b^2 + 2bm - m^2 \quad ... (3)$$

* En el ⊿AHB: $\dfrac{m}{c} = CosA$

$\rightarrow \quad m = cCosA$

Reemplazando en (3):

$$c^2 = a^2 - b^2 + 2b(cCosA)$$

En conclusión: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot CosA$ ...L.q.q.d

En forma análoga se demuestran las otras dos igualdades.

Observaciones:

De la ley de cosenos se deducen:

$$\boxed{CosA = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}} \quad \boxed{CosB = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}} \quad \boxed{CosC = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}$$

Ejemplos

1. En un ΔABC; si se tiene que $a = \sqrt{6}u$, b = 2u y C = 75º

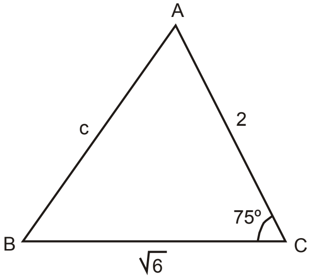
Resolución

Datos: $a = \sqrt{6}u$

$b = 2u$

$C = 75º$

$c = ??$



* Aplicando Ley de Cosenos:

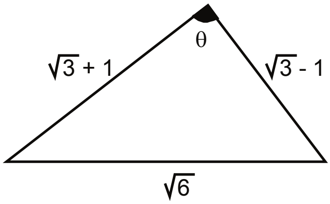
$$c^2 = (\sqrt{6})^2 + (2)^2 - 2(\sqrt{6})(2)\text{Cos}75^\circ$$

$$c^2 = 6 + 4 - 4\sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$$

→ $$c^2 = 4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}+1)^2$$

→ $$c = (\sqrt{3}+1)u$$

2. En la figura, encontrar "Cosθ" y "θ"



Resolución

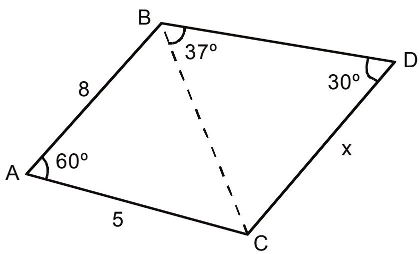
Aplicando la ley de Cosenos (Observaciones), tenemos del triángulo mostrado que:

$$\text{Cos}\theta = \frac{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2 - (\sqrt{6})^2}{2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$, efectuando tenemos:

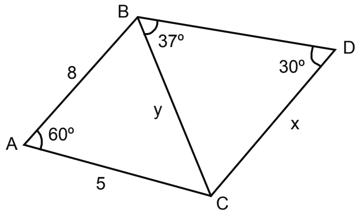
→ $\text{Cos}\theta = \dfrac{1}{2}$ → $\theta = 60^\circ$

Problema aplicativo

Hallar "x" en la figura:



Resolución



Hallamos "y" por ley de cosenos en el ΔABC

$$y^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \text{Cos}60º = 64 + 25 - 80º\frac{1}{2} = 89 - 40$$
$$y^2 = 49 \quad \rightarrow \quad y = 7$$

Hallamos "x" por ley de Senos en el ΔBOC

$$\frac{x}{\text{Sen}37º} = \frac{y}{\text{Sen}30º} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{3/5} = \frac{7}{1/2}$$

$$\rightarrow x = \frac{42}{5} = 8{,}4$$

Problemas I

1. En un triángulo ABC: $a=\sqrt{2}$; $\hat{B}=60°$, $\hat{A}=45°$. Hallar el lado "b".
   a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt{2}$ c) 1
   d) 2 e) $\sqrt{3}$

2. En un triángulo ABC, calcular "c", si: $a = 8$; $b = 5$ y $\hat{C} = 60°$.
   a) 3 b) 4 c) 6
   d) 7 e) 9

3. En un triángulo ABC: $\hat{A} = 37°$, $\hat{B} = 30°$; $a = x+1$, $b = x-1$
   Calcular: x
   a) 10 b) 9 c) 11
   d) 13 e) 15

4. En un triángulo ABC: a = 5, b = 3, c = 7; calcular: Cos A
   a) 1/14 b) 3/14 c) 5/14
   d) 9/14 e) 11/14

5. En un triángulo ABC, reducir:
   $$J=\frac{\text{SenB}}{b}-\frac{\text{SenC}}{c}$$
   a) 1 b) 2 c) ab
   d) 0 e) $\dfrac{2}{ab}$

6. En un triángulo ABC, reducir:
   $$E=\frac{a}{\text{SenA}}+\frac{2b}{\text{SenB}}-\frac{3c}{\text{SenC}}$$
   (R →Circunradio)
   a) 0 b) R c) 2R
   d) 3R e) 4R

7. En un triángulo ABC, los lados miden 5, 7 y 8. Calcular el Coseno del mayor de los ángulos interiores de dicho triángulo.
   a) 1/3 b) 1/4 c) 1/5
   d) 1/6 e) 1/7

8. En un triángulo ABC, se sabe que:
   $$\frac{a}{4}=\frac{b}{5}=\frac{c}{6}$$
   Determinar el coseno del menor ángulo interno.
   a) 1/2 b) 2/3 c) 3/4
   d) 4/5 e) 1/3

9. En un triángulo ABC, si:
   $$a^2 + b^2 + c^2 = 24, \text{ calcular:}$$
   E = bcCos A + acCos B + abCos C
   a) 6 b) 8 c) 10
   d) 12 e) 14

10. En un triángulo ABC, se cumple que:
    $$a^2 = b^2 + c^2 + bc$$
    Calcular $\hat{A}$.
    a) 30° b) 60° c) 120°
    d) 150° e) 135°

11. En un triángulo ABC, reducir:
    $$E = 2R\text{Sen}(B+C) - a$$
    (R →Circunradio)
    a) a b) b c) c
    d) 0 e) 1

12. En un triángulo ABC, reducir.
    $$E = bc\text{Sen }A(\text{Ctg }B + \text{Ctg }C)$$
    a) a^2 b) b^2 c) c^2
    d) abc e) 3abc

13. En un triángulo ABC, reducir:
    E = bCos C + cCos B
    + aCos B + bCos A – a
    a) b b) a c) c
    d) a+c e) a+b

14. En que tipo de triángulo ABC, se cumple:
    $$\frac{a}{\text{CosA}}=\frac{b}{\text{CosB}}=\frac{c}{\text{CosC}}$$
    a) Isósceles b) Equilátero
    c) Rectángulo d) Escaleno
    e) →tal triángulo

15. Encontrar la superficie de un triángulo en el cual dos de sus lados miden 40 y 30 cm. y el logaritmo decimal del Seno del ángulo comprendido entre dichos lados es:
    -0,30103 (Log 2 = 0,30103)
    a) 200 cm² b) 250 cm² c) 280 cm²
    d) 300 cm² e) 600 cm²

16. En un triángulo ABC, los lados están representados por 3 números enteros consecutivos, si el ángulo mayor es el doble del menor. Hallar el perímetro.
    a) 12 b) 15 c) 18
    d) 21 e) 24

17. En un triángulo ABC, reducir:

$$E = (a+b)^2 \cdot Sen^2\left(\frac{C}{2}\right) + (a-b)^2 \cdot Cos^2\left(\frac{C}{2}\right)$$

a) c b) 2c c) c²
d) 2c² e) $\left(\frac{1}{2}\right)c^2$

18. En un triángulo ABC:

$$\frac{a}{CosA} + \frac{b}{CosB} + \frac{c}{CosC} = R$$

Calcular:

$$E = Tg\,A \cdot Tg\,B \cdot Tg\,C$$

a) 1 b) 2 c) 1/2 d) 4 e) 1/4

19. En un triángulo ABC, en un triángulo ABC se cumple:
$a Cos\,A + b Cos\,B + c Cos\,C = 2R Sen\,A \cdot Sen\,B$
Hallar: Tg 2C

a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\pm\sqrt{3}$
d) $\frac{1}{2}$ e) $\pm\frac{1}{2}$

20. En un triángulo ABC:

$$\hat{C} = 2\hat{A} \quad y \quad 4c = 3a$$

entonces al calcular:

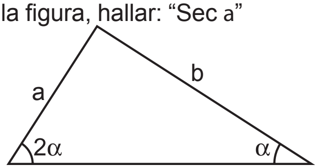
$$E = Cos\left(\frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}\right) Sec\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)$$

a) $\frac{1}{4}$ b) $-\frac{1}{4}$ c) 1
d) $\frac{1}{2}$ e) $-\frac{1}{2}$

CLAVES I				
1. e	2. d	3. c	4. e	5. d
6. a	7. e	8. c	9. d	10. c
11. d	12. a	13. c	14. b	15. d
16. b	17. c	18. c	19. c	20. b

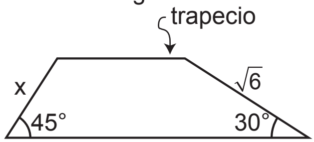
Problemas II

1. De la figura, hallar: "Sec a"



a) $\frac{a}{b}$ b) $\frac{b}{a}$ c) $\frac{b}{2a}$
d) $\frac{a}{2b}$ e) $\frac{2a}{b}$

2. Hallar "x" de la figura.



a) 2 b) 3 c) $\sqrt{2}$
d) 4 e) $\sqrt{3}$

3. En un triángulo ABC, se cumple que:
$b = \sqrt{2}\ \mu$, $c = \sqrt{3}\ \mu$; $m\angle C = 60°$.
Indicar la medida del ángulo A.
a) 30° b) 60° c) 15°
d) 75° e) 45°

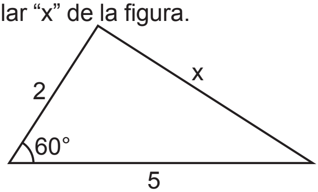
4. En un triángulo ABC, calcular el radio de la circunferencia circunscrita a partir de:

$$\frac{a+b}{SenA + SenB} + \frac{3c}{SenC} = 40$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

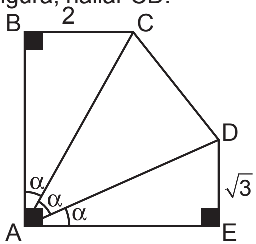
5. Dado un triángulo ABC simplificar:
2R[Sen(A+B)+Sen(A+C)+Sen(B+C)]
a) Área
b) Doble del área
c) Perímetro
d) Semiperímetro
e) Doble del perímetro

6. Hallar "x" de la figura.



a) $\sqrt{11}$ b) $\sqrt{13}$ c) $\sqrt{15}$
d) $\sqrt{17}$ e) $\sqrt{19}$

7. De la figura, hallar CD.



a) 5 b) 4 c) 2
d) 3 e) 1

8. En un triángulo ABC se cumple:

$$a^2 = b^2 + c^2 - \frac{2}{3}bc$$

Hallar: Tg A

a) $\frac{1}{3}$ b) 3 c) $2\sqrt{2}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ e) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

9. Se tiene un triángulo cuyos lados son proporcionales a 5; 6 y 7. Hallar el coseno del mayor ángulo de dicho triángulo.
a) 0,2 b) 0,3 c) 0,4
d) 0,5 e) 0,6

10. En un ΔABC, hallar m $\measuredangle$C.

Si: a = 1 u, b = 3 u y c = $\sqrt{7}$ u
a) 22°30’ b) 45° c) 15°
d) 30° e) 60°

11. Los lados de un triángulo están en progresión aritmética de razón 4m, si su mayor ángulo interno mide 120°, luego su perímetro es:
a) 30 m b) 60 m c) 15 m
d) 20 m e) 10 m

12. Dado un triángulo ABC donde se cumple:

$$\frac{a}{CosA} = \frac{b}{CosB} = \frac{c}{SenC}$$

Calcular: $Sen\frac{C}{3}$

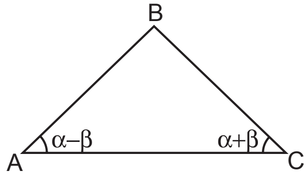
a) 0,4 b) 0,5 c) 0,7
d) 0,9 e) 0,3

13. En un triángulo ABC el perímetro es 24 m y el circunradio mide 5 m. Hallar:

$$N = Sen A + Sen B + Sen C$$

a) 1,2 b) 2,4 c) 2,8
d) 2,6 e) 1,8

14. De la figura adjunta:
Calcular: Tg α. Ctg β;
Si: $\overline{AB} = 17$, $\overline{BC} = 15$



a) 8 b) 14 c) 15
d) 16 e) 17

15. En un triángulo ABC, reducir:

$$Q = 2Sen^2\frac{A}{2}(b+c)^2+(b^2+c^2)\cdot Cos A - 2bc$$

a) a² b) b² c) c²
d) ab e) ac

16. Si los lados de un triángulo ABC están en progresión aritmética (a<b<c).
Calcular:

$$Q = \frac{SenA + SenC}{SenB}$$

a) 1 b) 2 c) 4

d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{4}$

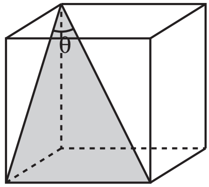
17. Dado un triángulo ABC, se cumple:

$$\frac{Cos A}{a} + \frac{CosB}{b} + \frac{CosC}{c} = \frac{a^2+b^2+c^2}{kabc}$$

Luego el valor de “k” es:
a) 1 b) 2 c) 3

d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{3}$

18. Hallar "Cos θ" si el sólido es un cubo.



a) $-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ b) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ e) $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

19. Dado un triángulo ABC, reducir:

$$W = \frac{a-b}{a+b} + Ctg\left(\frac{B+A}{2}\right) \cdot Tg\left(\frac{B-A}{2}\right)$$

a) 2 b) 1 c) 0
d) –1 e) –2

20. Dado un triángulo ABC, reducir:

$$N = (a+b)^2 \cdot Sen^2\frac{C}{2} + (a-b)^2 \cdot Cos^2\frac{C}{2}$$

a) 1 b) a^2 c) b^2
d) c^2 e) 2

CLAVES II				
1. e	2. e	3. d	4. e	5. c
6. e	7. c	8. c	9. a	10. e
11. a	12. b	13. b	14. d	15. a
16. b	17. b	18. c	19. c	20. d

UNIDAD 15

Funciones trigonométricas

Función trigonométrica

Se denomina FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA al conjunto de pares ordenados (x, y), tal que la primera componente "x" es la medida de un ángulo cualquiera en radianes y la segunda componente "y" es la razón trigonométrica de "x".

Es decir:

$$\boxed{F.T. = \{\, (x; y) \rightarrow y = R.T.(x) \,\}}$$

Dominio y rango de una función trigonométrica

Si tenemos una función trigonométrica cualquiera

$$y = R.T.(x)$$

- Se llama DOMINIO(DOM) de la función trigonométrica al conjunto de valores que toma la variable "x".

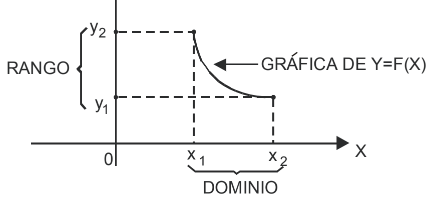
$$\boxed{DOM = \{x \rightarrow y = R.T.(x)\}}$$

- Se llama Rango(RAN) de la función trigonométrica al conjunto de valores que toma la variable "y".

$$\boxed{RAN = \{y \rightarrow y = R.T.(x)\}}$$

Recordar álgebra

La gráfica corresponde a una función y = F(x) donde su DOMINIO es la proyección de la gráfica al eje X y el RANGO es la proyección de la gráfica al eje Y.



$DOM(F) = [x_1 ; x_2]$

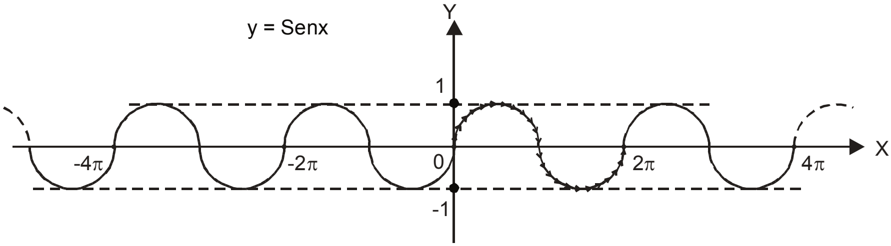
$RAN(F) = [y_1 ; y_2]$

Función Seno

Definición

$$\boxed{\text{Sen} = \{ (x; y) \rightarrow y = \text{Senx} \}}$$

Gráfico de la función seno



- El DOMINIO de la función seno es la proyección de su gráfica al eje x por lo tanto:

$$\text{DOM(Sen)} = \langle -\infty; +\infty \rangle \text{ o IR}$$

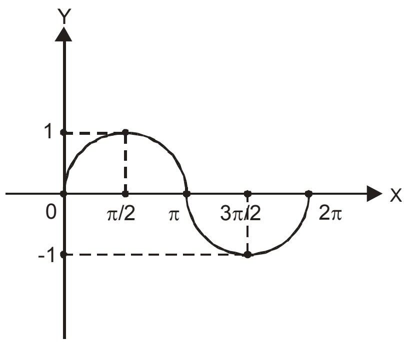
- El RANGO de la función seno es la proyección de su gráfica al eje y por lo tanto:

$$\text{RAN(Sen)} = [-1 ; 1]$$

Ojo al gráfico

Una parte de la gráfica de la función seno se repite por tramos de longitud 2π. Esto quiere decir que la gráfica de la función seno es PERIÓDICA de periodo 2π. Por lo tanto todo análisis y cálculo del dominio y rango se hace en el siguiente gráfico.

x	0	π/2	π	3π/2	2π
y = Senx	0	1	0	-1	0



Nota:

El periodo de una función se representa por la letra "T" por lo tanto el periodo de la función seno se denota así:

$$T(\text{Senx}) = 2\pi$$

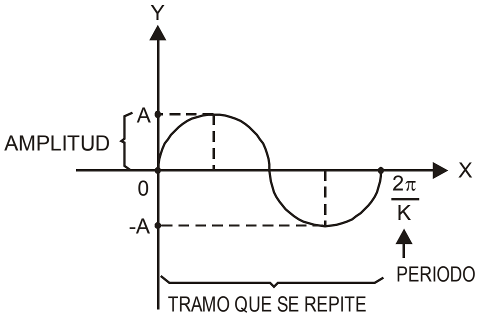
Propiedad

Si tenemos la función trigonométrica y = ±Asenkx entonces al número "A" se le va a llamar AMPLITUD y el periodo de esta función es 2π/k

Es decir:

$$y = \pm ASenkx \rightarrow \begin{cases} AMPLITUD = A \\ T(Senkx) = \dfrac{2\pi}{k} \end{cases}$$

Gráfico



Ejemplos

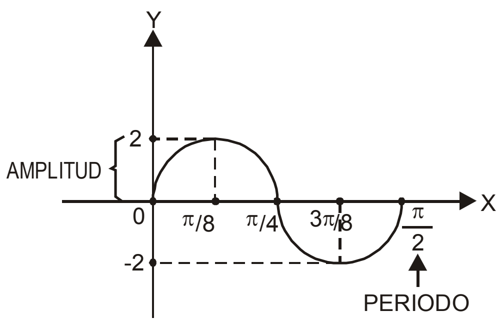
Graficar la función: y = 2Sen4x,

Indicar la amplitud y el periodo

Resolución

$$y = 2Sen4x \rightarrow \begin{cases} AMPLITUD = 2 \\ T(Sen4x) = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Graficamos la función:

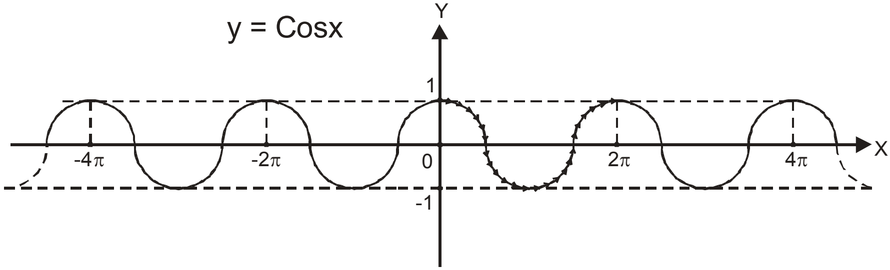


Función Coseno

Definición

$$\boxed{Cos = \{ (x ; y) \rightarrow y = Cosx \}}$$

Gráfico de la función coseno



- El DOMINIO de la función coseno es la proyección de su gráfica al eje X por lo tanto:

$$DOM(Cos) = \langle -\infty; +\infty \rangle \text{ o } IR$$

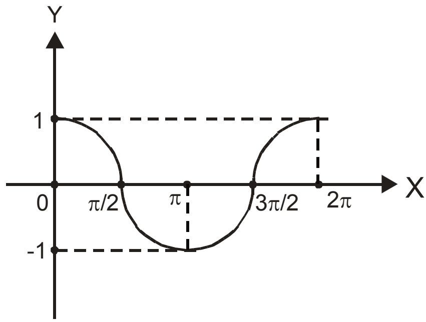
- El RANGO de la función coseno es la proyección de su gráfica al eje Y por lo tanto:

$$RAN(Cos) = [-1 ; 1]$$

Ojo al gráfico

Una parte de la gráfica de la función coseno se repite por tramos de longitud 2π. Esto quiere decir que la gráfica de la función coseno es el periodo 2π; por lo tanto, todo análisis y cálculo del dominio y rango se hace en el siguiente gráfico.

x	0	π/2	π	3π/2	2π
y = Cosx	1	0	-1	0	1



Nota:

El periodo de la función coseno se denota así:

$$T(Cosx) = 2\pi$$

Propiedad

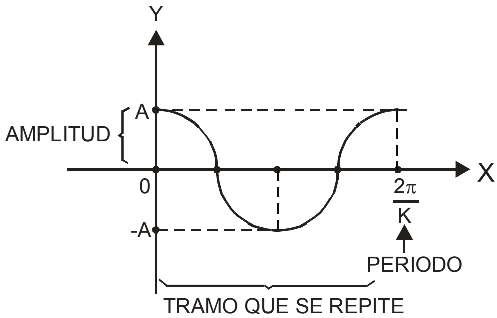
Si tenemos la función trigonométrica $y = \pm A\text{Cos}kx$, entonces al número "A" se le va a llamar AMPLITUD y el periodo de esta función es $2\pi/k$.

Es decir:

$$y = \pm A\text{Cos}kx \;\rightarrow\; \begin{cases} \text{AMPLITUD} = A \\ T(\text{Cos}kx) = \dfrac{2\pi}{k} \end{cases}$$

Gráfico

$y = A\text{Cos}kx$



Ejemplo

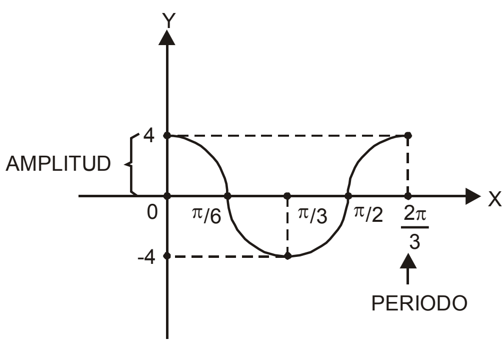
Graficar la función: $y = 4\text{Cos}3x$,

Indicar la amplitud y el periodo.

Resolución

$$y = 4\text{Cos}3x \;\rightarrow\; \begin{cases} \text{AMPLITUD} = 4 \\ T(\text{Cos}3x) = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$$

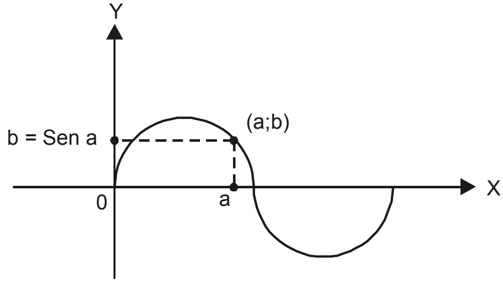
Graficamos la función



Propiedad fundamental para Seno y Coseno

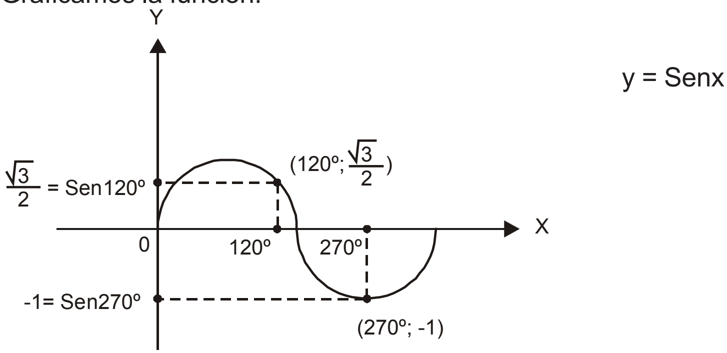
Para la función seno

Si (a; b) es un punto que pertenece a la gráfica de la función y = Senx, entonces se cumple que: b = Sena



Ejemplo

1. Graficamos la función:



2. Si $\left(\frac{\pi}{6}; 2n+1\right)$ pertenece a la gráfica de la función y = Senx;

   Hallar: "n"

Resolución

Aplicamos la propiedad, si $\left(\frac{\pi}{6}; 2n+1\right)$ pertenece a: y = Senx

$$\rightarrow \qquad 2n + 1 = \text{Sen}\frac{\pi}{6}$$

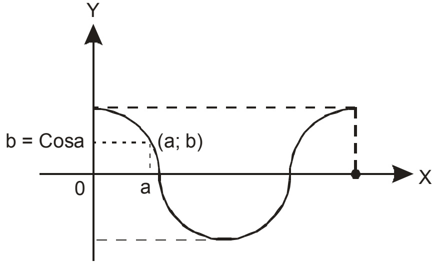
$$2n + 1 = \frac{1}{2}$$

$$2n = -\frac{1}{2}$$

$$n = -\frac{1}{4}$$

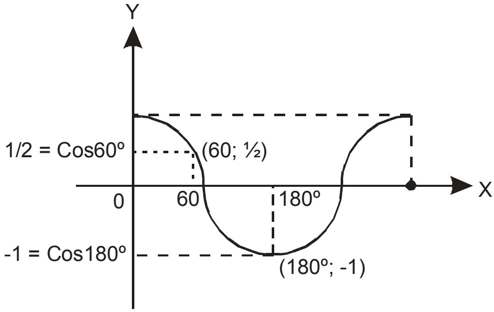
Para la función Coseno

Si (a; b) es un punto que pertenece a la gráfica de la función y = Cosx entonces se cumple que: b = Cosa



Ejemplo

1. Graficamos la función: y = Cosx



2. $\left(\dfrac{\pi}{4}; 2n+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$ pertenece a la gráfica de la función y = Cosx

   Hallar "n"

Resolución

Aplicamos la propiedad. Si $\left(\dfrac{\pi}{4}; 2n+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$ pertenece a: y = Cosx

$$\rightarrow \qquad 2n + \frac{\sqrt{2}}{4} = \mathrm{Cos}\frac{\pi}{4}$$

$$2n + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2n = \frac{\sqrt{2}}{4} \qquad \rightarrow \qquad n = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

Problemas I

1. Si el punto $P\left(\frac{2\pi}{3};5n\right)$ pertenece a la gráfica de la función: y = Cos x; halle "n".

   a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{5}{2}$ c) $-\frac{1}{10}$

   d) $-\frac{5}{2}$ e) $-\frac{1}{2}$

2. Si el punto $Q\left(\frac{\pi}{4};\frac{a-b}{a+b}\right)$ pertenece a la gráfica de la función: y = Sen x; halle $\frac{a}{b}$.

   a) $3+2\sqrt{2}$ b) $5\sqrt{2}$ c) $3-2\sqrt{2}$

   d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\sqrt{2}$

3. Determinar la amplitud y periodo de c/u de las siguientes funciones:

   i. $y = 4\text{Sen}(\frac{x}{4})$
   ii. $y = \sqrt{18}\ \text{Sen}(\pi x)$
   iii. $y = 6 - 5\text{Sen}(3x)$
   iv. $y = 2\text{Sen } x \cdot \text{Cos } x \cdot \text{Cos } 2x$

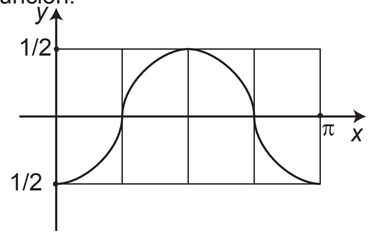
4. Determinar la amplitud y periodo de c/u de las siguientes funciones:

   i. $y = 0{,}5\text{Cos}(x\sqrt{2})$
   ii. $y = \pi\text{Cos}(\frac{x}{\pi})$
   iii. $y = 3+2\text{Cos}(x+60°)$
   iv. $y = (\text{Sen } x+\text{Cos } x)(\text{Sen } x-\text{Cos } x)$

5. Graficar las siguientes funciones:

   i. $y = 2\text{Sen}\frac{x}{2}$
   ii. $y = \sqrt{3}\ \text{Cos } 6x$
   iii. $y = -\text{Sen } 5x$
   iv. $y = -\frac{1}{3}\text{Cos}\frac{x}{4}$

6. El gráfico adjunto corresponde a la función:

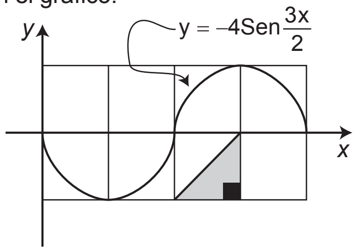


   a) –Cos x b) $-2\text{Cos}\frac{x}{2}$

   c) $2\text{Cos}\frac{x}{2}$ d) $-\frac{1}{2}\text{Cos } 2x$

   e) $\frac{1}{2}\text{Cos } 2x$

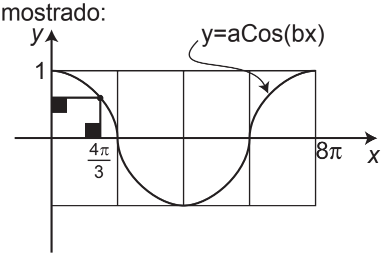
7. Halle el área de la región sombreada en el gráfico:



   a) $\frac{4\pi}{3}$ u² b) $\frac{2\pi}{3}$ u² c) $\frac{\pi}{3}$ u²

   d) $\frac{\pi}{6}$ u² e) $\frac{\pi}{12}$ u²

8. Halle "a/b" a partir del gráfico mostrado:

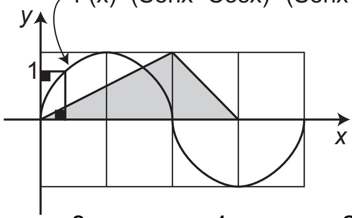


   a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1

   d) 2 e) 8

9. Halle el área de la región sombreada en el gráfico:

F(x)=(Senx+Cosx)²-(Senx-Cosx)²



a) $\frac{8\pi}{3}$ u² b) $\frac{4\pi}{3}$ u² c) $\frac{2\pi}{3}$ u²

d) $\frac{\pi}{3}$ u² e) $\frac{\pi}{6}$ u²

10. Hallar el rango, valores máximo y mínimo de la función:

$$Y = 5\text{Sen } x - 3$$

a) Ran.: $y \in [-8;2]$, Máx. = 2 , Mín.= –8
b) Ran.: $y \in [-2;8]$, Máx. = 8 , Mín.= –2
c) Ran.: $y \in [-8;-2]$, Máx. = –2 , Mín.= –8
d) Ran.: $y \in [2;8]$, Máx. = 8 , Mín.= 2
e) Ran.: $y \in [-1;1]$, Máx. = 1 , Mín.= –1

11. Halle el dominio de la función:

$$F(x) = \sqrt{\text{Cos}x - 1}$$

a) Dom.: $x = n\pi$; $n \in Z$
b) Dom.: $x = \frac{n\pi}{2}$; $n \in Z$
c) Dom.: $x = (2\pi+1)\pi$; $n \in Z$
d) Dom.: $x = 2\pi\, n$; $n \in Z$
e) Dom.: $x = \frac{n\pi}{4}$; $n \in Z$

12. Graficar las siguientes funciones:
i) $y = 4 + 3\text{Sen } 8x$
ii) $y = -2 - 4\text{Sen}(\frac{x}{5})$

13. Graficar las siguientes funciones:
i) $y = 2\text{Cos}(\frac{x}{4}) - 3$
ii) $y = -5\text{Cos } 6x + 1$

14. Halle la amplitud (A) y periodo (T) de la función:

$$y = 1 + 3\text{Cos}^2 2x$$

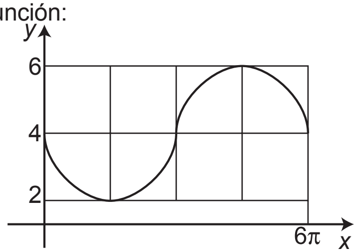
a) A = 3 ; T = π
b) A = $\frac{3}{2}$; T = 2π
c) A = $\frac{2}{3}$; T = $\frac{\pi}{2}$
d) A = $-\frac{3}{2}$; T = $\frac{\pi}{2}$
e) A = $\frac{3}{2}$; T = $\frac{\pi}{2}$

15. Halle la amplitud (A) y periodo (T) de la función:

$$y = 4\text{Sen}(\frac{x}{2}) - 3\text{Cos}(\frac{x}{2})$$

a) A = 5 ; T = $\frac{\pi}{2}$
b) A = 5 ; T = 4π
c) A = 1 ; T = 4π
d) A = 1 ; T = $\frac{\pi}{2}$
e) A = 5 ; T = 2π

16. El gráfico adjunto corresponde a la función:

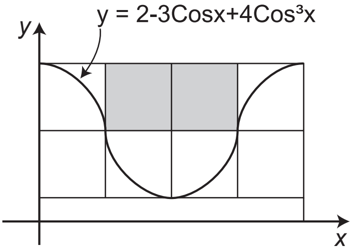


a) $2\text{Sen}\frac{x}{3}$ b) $2-4\text{Sen}\frac{x}{3}$

c) $4-2\text{Sen}\frac{x}{3}$ d) $2-4\text{Sen } 3x$

e) $4-2\text{Sen } 3x$

17. Halle el área de la región sombreada en el gráfico adjunto:



a) $\frac{8\pi}{3}$ u² b) $\frac{4\pi}{3}$ u² c) $\frac{2\pi}{3}$ u²

d) $\frac{\pi}{3}$ u² e) $\frac{\pi}{6}$ u²

18. Halle el rango de la siguiente función:

$F(x) = Sen^4x(1+Sen^2x) + Cos^4x(1+Cos^2x)$

a) [–1;1] b) $\left[\frac{3}{4};2\right]$ c) $\left[\frac{1}{4};1\right]$

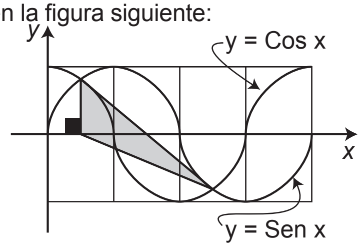
d) $\left[\frac{1}{2};1\right]$ e) $\left[\frac{1}{2};\frac{4}{3}\right]$

19. Indique el dominio y rango de la función:

$y = Sen\ 2x \cdot Sec\ x$

a) Dom.: $x \in R$; Ran.: $y \in [-2;2]$
b) Dom.: $x \in R-\{n\pi ; n \in Z\}$; Ran.: $y \in \langle -2;2 \rangle$
c) Dom.: $x \in R-\{(2n+1)\pi/2 ; n \in Z\}$; Ran.: $y \in [-2;2]$
d) Dom.: $x \in R-\{n\pi ; n \in Z\}$; Ran.: $y \in [-2;2]$
e) Dom.: $x \in R-\{(2n+1)\pi/2 ; n \in Z\}$; Ran.: $y \in \langle -2;2 \rangle$

20. Halle el área de la región sombreada en la figura siguiente:



a) $\pi\sqrt{2}$ u² b) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ u² c) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ u²

d) $\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$ u² e) $\frac{\pi\sqrt{2}}{16}$ u²

CLAVES I				
1. c	2. a	3.*	4.*	5.*
6. d	7. b	8. e	9. c	10. a
11. d	12.*	13.*	14. e	15. b
16. c	17. d	18. b	19. e	20. c

Problemas II

1. Si el punto $P\left(\frac{4\pi}{3};\frac{n}{2}\right)$, pertenece a la gráfica de la función: y=Sen x; halle “n”.

a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $-\sqrt{3}$ e) $-\frac{1}{2}$

2. Si el punto $M\left(\frac{\pi}{8};2n+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$; pertenece a la gráfica de la función: y = Cos 2x; halle: “n”

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{16}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

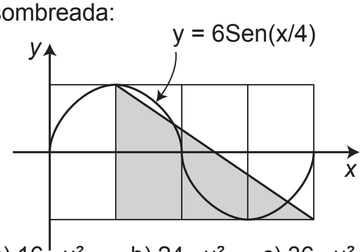
3. Determine la amplitud y el periodo de las siguientes funciones:

a) $y = 7Sen\ 4x$
b) $y = \sqrt{23}\ Cos\frac{9x}{2}+40$
c) $y = 59-\sqrt{2}\ \pi \cdot Sen(\sqrt{2}\ x-12)$
d) $y = 4Sen\ x \cdot Cos\ x(Cos^2x-Sen^2x)$

4. Determine la amplitud y el periodo de las siguientes funciones:
   a) $y = \text{Cos } 8x$
   b) $y = \text{Log } 100 \cdot \text{Sen}\left(\frac{x}{4}+2\right)-5$
   c) $y = 3 - 4\text{Sen}^3x + 3\text{Sen } x$
   d) $y = \text{Sen } x + \sqrt{3}\,\text{Cos } x$

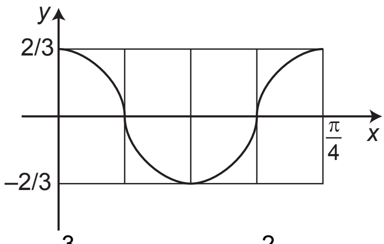
5. Grafique las siguientes funciones:
   i) $y = 6\text{Sen } 8x$
   ii) $y = -4\text{Sen}\left(\frac{x}{5}\right)$
   iii) $y = \sqrt{7}\,\text{Cos}\left(\frac{2x}{3}\right)$
   iv) $y = -\frac{5}{3}\text{Cos } 4x$

6. Calcule si área de la región sombreada:



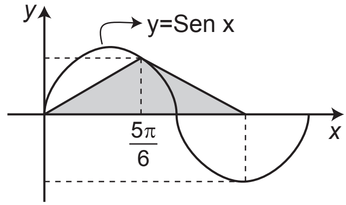
a) 16π u² b) 24π u² c) 36π u²
d) 48π u² e) 72π u²

7. La gráfica adjunta, corresponde a la función cuya regla de correspondencia es:



a) $y = \frac{3}{2}\text{Cos } 2x$ b) $y = \frac{2}{3}\text{Cos } 2x$
c) $y = \frac{3}{2}\text{Cos } 4x$ d) $y = \frac{3}{2}\text{Cos } 8x$
e) $y = \frac{2}{3}\text{Cos } 8x$

8. Calcule el área de la región sombreada:



a) $\frac{\pi}{8}$ u² b) $\frac{\pi}{4}$ u² c) $\frac{3\pi}{8}$ u²
d) $\frac{\pi}{2}$ u² e) $\frac{\pi}{16}$ u²

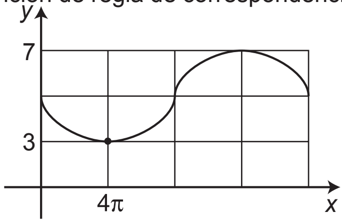
9. Grafique la función:
$$y = \text{Sen } 2x \cdot \text{Csc } x$$
e indique su dominio y rango.
   a) Dom = R ; Ran = [–2;2]
   b) Dom = R–$\frac{n\pi}{2}$; Ran = [–2;2]
   c) Dom = R–nπ ; Ran = [–2;2]
   d) Dom = R–nπ ; Ran =]–2;2[
   e) Dom = R–$\frac{n\pi}{2}$; Ran = [–1;1]

10. Grafique la función:
$$y = \frac{\text{Sen}5x + \text{Sen}3x}{\text{Sen}4x}$$
e indique su Dominio y Rango.

11. Si el punto $P\left(a;\frac{1}{2}\right)$ pertenece a la gráfica de la función: f(x)=3Sen x; halle el valor de la expresión:
$$E = \text{Csc } a + \text{Cot}^2 a$$
   a) 18 b) 24 c) 31
   d) 41 e) 45

12. Grafique las siguientes funciones:
   i) $y = 4 - 2\text{Sen } x$
   ii) $y = 3\text{Cos}\left(\frac{x}{4}\right) - 5$

13. La gráfica mostrada, corresponde a la función de regla de correspondencia:



a) $y = 3+\text{Sen}\,\dfrac{x}{2}$

b) $y = 3 - \text{Sen}\,\dfrac{x}{2}$

c) $y = 5 - 2\text{Sen}\,\dfrac{x}{8}$

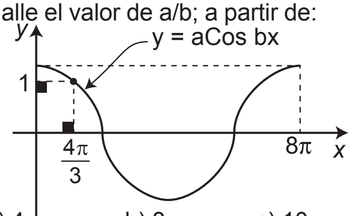
d) $y = 7 - 4\text{Sen}\,\dfrac{x}{4}$

e) $y = 4 - 2\text{Sen}\,\dfrac{x}{8}$

14. Determine el dominio y rango de la siguiente función:

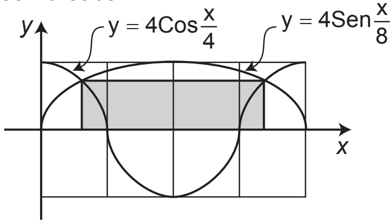
$$y = (\text{Csc}\,x - \text{Cot}\,x)\text{Cos}\,\frac{x}{2}$$

15. Halle el valor de a/b; a partir de:



a) 4 b) 8 c) 10
d) 12 e) 16

16. Calcule el área de la región sombreada:

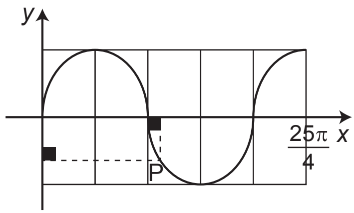


a) $\dfrac{8\pi}{3}$ u² b) $\dfrac{4\pi}{3}$ u² c) $\dfrac{16\pi}{3}$ u²

d) $\dfrac{32\pi}{3}$ u² e) $\dfrac{48\pi}{3}$ u²

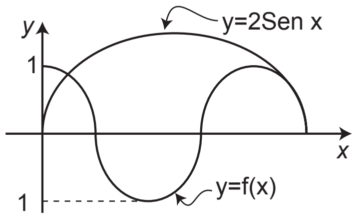
17. La ecuación de la gráfica adjunta es: y = Asen Bx ; además:

$P\left(\dfrac{10\pi}{3};-\sqrt{6}\right)$. Calcule: $\sqrt{2}\,A + 5B$



a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 10

18. Determine la regla de correspondencia de: y = f(x)



a) $y = \text{Cos}\,\dfrac{5x}{2}$

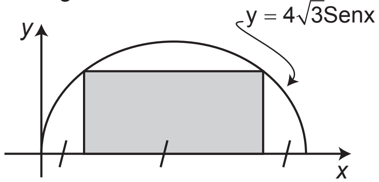
b) $y = 2\text{Cos}\,\dfrac{5x}{2}$

c) $y = \text{Cos}\,\dfrac{5x}{4}$

d) $y = \text{Sen}\,\dfrac{5x}{2}$

e) $y = \text{Cos}\,5x$

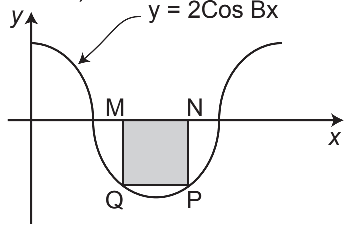
19. Del gráfico mostrado, determine la relación entre los lados de la región rectangular.



a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{8}$

d) $\frac{\pi}{9}$ e) $\frac{\pi}{18}$

20. Del gráfico mostrado, calcule el periodo de la función; cuyo gráfico se muestra, si el área de la región sombreada es de 3 u². (ABCD cuadrado)



a) $6\sqrt{3}$ b) $9\sqrt{3}$ c) $12\sqrt{3}$

d) $3\sqrt{3}$ e) $18\sqrt{3}$

CLAVES II				
1.d	2.c	3.*	4.*	5.*
6.c	7.e	8.c	9.d	10.*
11.d	12.*	13.c	14.*	15.b
16.d	17.c	18.a	19.e	20.a

UNIDAD 16

Ecuaciones trigonométricas

Ecuación trigonométrica

Una ecuación se llama TRIGONOMÉTRICA si ella contiene la incognita “x” sólo bajo los operadores trigonométricos.

Ejemplo

1. Senx = Cosx
2. Tanx – Cot2x = 0
3. $\text{Sen}\frac{x}{4} = \frac{1}{2}$
4. Tan2x = 3x – 1

Ojo:

La ecuación del ejemplo Nº 4 no se llama trigonométricas, por que en esta la incognita “x” se encuentra no solo bajo el operador TAN, si no también sin otro operador trigonométrico.

Ecuación trigonométrica elemental

Una ecuación trigonométrica se llama ELEMENTAL o BÁSICA o SIMPLE si tiene la siguiente estructura:

$$\boxed{\text{F.T.}(KX) = a}$$

Ejemplo

1) $\text{Senx} = \frac{1}{2}$

2) $\text{Cos}2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3) $\text{Tan}\frac{x}{3} = -\sqrt{3}$

Valor principal de una ecuación trigonométrica elemental

Se llama valor principal (VP) al menor ángulo positivo o mayor ángulo negativo que satisface una ecuación trigonométrica elemental, es decir:

Si: $\text{F.T.}\,\underbrace{(KX)}_{\text{ángulo}} = a \rightarrow$ VP = ángulo

Valor principal para: SenKX = a

La ecuación tendrá soluciones solamente cuando $-1 \leq a \leq 1$

- Si a es positivo entonces su VP es un ángulo agudo.
- Si a es negativo entonces su VP es el negativo del ángulo agudo.
- Si a es 1 entonces su VP es 90º.
- Si a es -1 entonces su VP es -90º.
- Si a es 0 entonces su VP es 0º.

Ejemplo

Calcular el VP de las siguientes ecuaciones

1. $\text{Sen}x = \dfrac{1}{2} \rightarrow \text{Sen}\underbrace{x}_{30^\circ} = \dfrac{1}{2} \rightarrow \text{VP} = 30^\circ$
2. $\text{Sen}x = -\dfrac{1}{2} \rightarrow \text{Sen}\underbrace{x}_{-30^\circ} = -\dfrac{1}{2} \rightarrow \text{VP} = -30^\circ$
3. $\text{Sen}4x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \text{Sen}\underbrace{4x}_{45^\circ} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \text{VP} = 45^\circ$
4. $\text{Sen}4x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \text{Sen}\underbrace{4x}_{-45^\circ} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \text{VP} = -45^\circ$
5. $\text{Sen}2x = 1 \rightarrow \text{Sen}\underbrace{2x}_{90^\circ} = 1 \rightarrow \text{VP} = 90^\circ$
6. $\text{Sen}2x = -1 \rightarrow \text{Sen}\underbrace{2x}_{-90^\circ} = -1 \rightarrow \text{VP} = -90^\circ$
7. $\text{Sen}\dfrac{x}{3} = 0 \rightarrow \text{Sen}\underbrace{\dfrac{x}{3}}_{0^\circ} = 0 \rightarrow \text{VP} = 0^\circ$
8. Sen3x = 2 (La ecuación no tiene soluciones).

Ojo: El valor principal no es la incógnita "x" ($\text{VP} \neq x$).

Valor principal para CosKX = a

La ecuación tendrá soluciones solamente cuando $-1 \leq a \leq 1$.

- Si a es positivo entonces su VP es un ángulo agudo.
- Si a es negativo entonces su VP es el suplemento del ángulo agudo.
- Si a es 1 entonces su VP es 0º.
- Si a es -1 entonces su VP es 180º.
- Si a es 0 entonces su VP es 90º.

Ejemplo

Calcular el VP de las siguientes ecuaciones:

1. $\text{Cosx} = \frac{1}{2}$ → $\text{Cos}\underbrace{x}_{60^\circ} = \frac{1}{2}$ → VP = 60º

2. $\text{Cosx} = -\frac{1}{2}$ → $\text{Cos}\underbrace{x}_{120^\circ} = -\frac{1}{2}$ → VP = 120º

3. $\text{Cos4x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ → $\text{Cos}\underbrace{4x}_{45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ → VP = 45º

4. $\text{Cos4x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ → $\text{Cos}\underbrace{4x}_{135^\circ} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ → VP = 135º

5. $\text{Cos2x} = 1$ → $\text{Cos}\underbrace{2x}_{0^\circ} = 1$ → VP = 0º

6. $\text{Sen}\frac{x}{3} = -1$ → $\text{Cos}\underbrace{2x}_{180^\circ} = -1$ → VP = 180º

7. $\text{Cos}\frac{x}{3} = 0$ → $\text{Cos}\underbrace{\frac{x}{3}}_{90^\circ} = 0$ → VP = 90º

8. Cos 3x = 3 (La ecuación no tiene solución)

Ojo: El valor principal no es la incógnita “x” (VP $\neq$ X)

Valor principal para TanKX = a

La ecuación tendrá soluciones para cualquier valor de “a”

- Si a es positivo entonces su VP es un ángulo agudo
- Si a es negativo entonces su VP es el negativo de ángulo agudo
- Si a es cero entonces su VP es 0º

Ejemplo

Calcular el VP de las siguientes ecuaciones:

1. $\text{Tanx} = \sqrt{3}$ → $\text{Tan}\underbrace{x}_{60^\circ} = \sqrt{3}$ → VP = 60º

2 $\text{Tanx} = -\sqrt{3}$ → $\text{Tan}\underbrace{x}_{-60^\circ} = -\sqrt{3}$ → VP = -60º

3. Tan3x = 1 → $\text{Tan}\underbrace{3x}_{45^\circ} = 1$ → VP = 45º

4. Tan3x = -1 → $\text{Tan}\underbrace{3x}_{-45^\circ} = -1$ → VP = -45º

5. Tanx = 0 → $\text{Tan}\underbrace{x}_{0^\circ} = 0$ → VP = 0º

6. $\text{Tan}\dfrac{x}{4} = 0$ → $\text{Tan}\underbrace{\dfrac{x}{4}}_{0^\circ} = 0$ → VP = 0º

Resolución de ecuaciones trigonométricas elementales

Resolver una ecuación trigonométrica elemental significa hallar todos los valores de la incógnita "x" que satisfacen dicha ecuación. Es decir, que reducen la ecuación a una igualdad después de la sustitución de la incógnita.

Así, por ejemplo la ecuación:

$$\text{Sen}\underbrace{2x}_{30^\circ} = \frac{1}{2}$$

$$2x = 30^\circ$$

$$x = 15^\circ$$

Tiene por solución 15º, pero no es la única solución, porque también satisfacen los siguientes valores: 75º; 195º; 255º; 375º; 435º, ...

El motivo de estos resultados es que las funciones trigonométricas son PERIÓDICAS a continuación citaremos para las ecuaciones que involucran seno; coseno y tangente a fin de hallar todas sus infinitas soluciones.

Resolución de SenKX = a

Se aplica la siguiente fórmula:

$$\boxed{\text{SenKX} = a \rightarrow \text{KX} = n(180^\circ) + (-1)^n \cdot \text{VP}} \quad \text{"n"} \rightarrow \mathbb{Z}$$

Denominándose CONJUNTO SOLUCIÓN o SOLUCIÓN GENERAL al resultado:

$$\boxed{x = \frac{n(180^\circ) + (-1)^n \cdot \text{VP}}{k}} \quad ; \text{"n"} \rightarrow \mathbb{Z}$$

Ejemplos

1. Resolver la ecuación y hallar las cuatro primeras soluciones positivas:

$$\text{Sen}2x = \frac{1}{2}$$

Resolución

Calculamos el valor principal: $VP = 30^o$

Aplicamos la fórmula: $2x = n(180^o) + (-1)^n \cdot VP$

$2x = n(180^o) + (-1)^n \cdot 30^o$

Despejamos "x": $x = \dfrac{n(180^o) + (-1)^n \cdot 30^o}{2}$

Obteniendo así el conjunto solución:

$$\boxed{x = n(90^o) + (-1)^n \cdot 15^o}$$

Para calcuar las cuatro primeras soluciones positivas damos valores enteros positivos a "n". En el conjunto solución.

Para n = 0: $x = 0(90^o) + (-1)^o \cdot 15^o \rightarrow x = 15^o$

Para n = 1: $x = 1(90^o) + (-1)^1 \cdot 15^o \rightarrow x = 75^o$

Para n = 2: $x = 2(90^o) + (-1)^2 \cdot 15^o \rightarrow x = 195^o$

Para n = 3: $x = 3(90^o) + (-1)^3 \cdot 15^o \rightarrow x = 255^o$

2. Resolver la ecuación y hallar las tres primeras soluciones positivas en radianes.

$$\text{Sen}3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Resolución

Calculamos el valor principal: $VP = -45^o = -\dfrac{\pi}{4}$

Aplicamos la fórmula: $3x = n(180^o) + (-1)^n \cdot VP$

Pasamos a radianes: $3x = n(\pi) + (-1)^n \cdot \left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

Despejamos "x": $x = \dfrac{n\pi - (-1)^n \cdot \dfrac{\pi}{4}}{3}$

Obteniendo el conjunto solución:

$$\boxed{x = \frac{n\pi}{3} - (-1)^n \cdot \frac{\pi}{12}}$$

Para calcular las tres primera soluciones positivas, damos valores enteros positivo a "n" en el conjunto solución

Para n = 0 $\rightarrow x = 0 \cdot \dfrac{\pi}{3} - (-1)^o \cdot \dfrac{\pi}{12} \rightarrow x = -\dfrac{\pi}{12}$ (no se toma)

Para n = 1 $\rightarrow x = 1 \bullet \frac{\pi}{3} - (-1)^1 \bullet \frac{\pi}{12} \rightarrow x = \frac{\mathbf{5\pi}}{\mathbf{12}}$

Para n = 2 $\rightarrow x = 2 \bullet \frac{\pi}{3} - (-1)^2 \bullet \frac{\pi}{12} \rightarrow x = \frac{\mathbf{7\pi}}{\mathbf{12}}$

Para n = 3 $\rightarrow x = 3 \bullet \frac{\pi}{3} - (-1)^3 \bullet \frac{\pi}{12} \rightarrow x = \frac{\mathbf{13\pi}}{\mathbf{12}}$

Resolución de Cos KX = a
Se aplica la siguiente fórmula

$$\boxed{\text{CosKX} = a \rightarrow KX = n(360º) \pm VP} \qquad \text{“n”} \rightarrow \mathbb{Z}$$

Denominándose CONJUNTO SOLUCIÓN o SOLUCIÓN GENERAL al siguiente resultado:

$$\boxed{x = \frac{n(360º) \pm VP}{k}} \qquad \text{“n”} \rightarrow \mathbb{Z}$$

Ejemplos

1. Resolver la ecuación y hallar las cinco primeras soluciones positivas

$$\text{Cos}2x = \frac{1}{2}$$

Resolución

Calculamos el valor principal: VP = 60º

Aplicamos la fórmula : 2x = n(360º) ± VP

Despejamos “x”: 2x = n(360º) ± 60º

Obtenemos el conjunto solución: x = n(180º) ± 30º

Para calcular las 5 primeras soluciones, damos valores enteros a “n” en el conjunto solución

Para n = 0 → x = 0.180º ± 30º → x = ±30º
→ x = 30º

Para n = 1 → x = 1(180º) ± 30º → x = 180º + 30º → x = 180º – 30º
→ x = 210º → x = 150º

Para n = 2 → x = 2(180º) ± 30º → x = 360º – 30º → x = 360º + 30º
→ x = 330º → x = 390º

2. Resolver la ecuación y hallar las tres primeras soluciones positivas en radianes

$$\text{Cos } 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Resolución

Calculamos el valor principal: $VP = 135º = \frac{3\pi}{4}$

Aplicamos la fórmula: $3x = n(360º) \pm VP$

Despejamos "x": $3x = n(2\pi) \pm \frac{3\pi}{4}$

Obtenemos el conjunto solución: $\boxed{x = n\left(\frac{2\pi}{3}\right) \pm \frac{\pi}{4}}$

Para calcular las tres primeras soluciones positivas, damos valores enteros a "n" en el conjunto solución.

Para n = 0 $\rightarrow$ $x = 0\left(\frac{2\pi}{3}\right) \pm \frac{\pi}{4}$ $\rightarrow$ $x = \pm\frac{\pi}{4}$

$\rightarrow$ $x = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

Para n = 1 $\rightarrow$ $x = 1\left(\frac{2\pi}{3}\right) \pm \frac{\pi}{4}$ $\rightarrow$ $x = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ $\rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$

$\rightarrow$ $x = \boldsymbol{\frac{5\pi}{12}}$ $\rightarrow$ $x = \boldsymbol{\frac{11\pi}{12}}$

Resolución de TanKX = a

Se aplica la siguiente fórmula:

$\boxed{\text{TanKX} = a \rightarrow KX = n(180º) + VP}$ "n" $\rightarrow \mathbb{Z}$

Denominándose CONJUNTO SOLUCIÓN o SOLUCIÓN GENERAL al resultado.

$$\boxed{x = \frac{n(180º) + VP}{K}} \; ; \text{"n"} \rightarrow \mathbb{Z}$$

Ejemplos

1. Resolver la ecuación y hallar las TRES primeras soluciones positivas

$$\text{Tan}2x = \sqrt{3}$$

Resolución

Calculamos el valor principal: $VP = 60º$

Aplicamos la formula: $2x = n(180º) + VP$

Despejamos "x": $2x = n(180º) + 60º$

Obtenemos el conjunto solución: $\boxed{x = n(90º) + 30º}$

Para calcular las 3 primeras soluciones positivas, damos valores enteros positivas a “n” en el conjunto solución

Para n = 0 → $x = 0(90^\circ) + 30^\circ$ → $x = 30^\circ$

Para n = 1 → $x = 1(90^\circ) + 30^\circ$ → $x = 120^\circ$

Para n = 2 → $x = 2(90^\circ) + 30^\circ$ → $x = 210^\circ$

2. Resolver la ecuación y hallar las tres primeras soluciones positivas en radianes.

$$\text{Tan } 3x = -1$$

Resolución

Calculamos el valor principal: $VP = -45^\circ = -\frac{\pi}{4}$

Aplicamos la fórmula: $3x = n(180^\circ) + VP$

Pasamos a radianes: $3x = n(\pi) + \left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Despejamos “x”: $3x = n\pi - \frac{\pi}{4}$

Obtenemos el conjunto solución: $\boxed{x = n\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}}$

Para calcular las tres primeras soluciones positivas, damos valores enteros positivas a “n” en el conjunto solución.

Para n = 0 → $x = 0 \bullet \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}$ → $x = -\frac{\pi}{12}$ (no se toma)

Para n = 1 → $x = 1 \bullet \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}$ → $x = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

Para n = 2 → $x = 2 \bullet \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}$ → $x = \boldsymbol{\frac{7\pi}{12}}$

Para n = 3 → $x = 3 \bullet \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}$ → $x = \boldsymbol{\frac{11\pi}{12}}$

Resolución de CotKX = a, SecKX = a, CscKX = a

Para resolver ecuaciones trignométricas elementales que involucran Cot, Sec y Csc se invierten y se obtienen Tan, Cos y Sen respectivamente.

Ejemplo

1. Resolver la ecuación:

$$\text{Cot } 2x = \sqrt{3}$$

Resolución

Invertimos: $\text{Cot}2x = \sqrt{3}$

$$\frac{1}{\text{Cot}2x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Tan}2x = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \rightarrow \quad VP = 30º$$

$$2x = n(180º) + VP$$

$$2x = n(180º) + 30º$$

$$x = \frac{n(180º) + 30º}{2}$$

$$\boxed{x = n(90º) + 15º}$$

2. Resolver la ecuación:

$$\text{Sec } 3x = 2$$

Resolución

Invertimos: $\text{Sec}3x = 2$

$$\frac{1}{\text{Sec}3x} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Cos}3x = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad VP = 60º$$

$$3x = n(360º) \pm VP$$

$$3x = n(360º) \pm 60º$$

$$x = \frac{n(360º) + 60º}{3}$$

$$\boxed{x = n(120º) \pm 20º}$$

3. Resolver la ecuación:

$$\text{Csc}\frac{x}{2} = \sqrt{2}$$

Resolución

Invertimos: $\text{Csc}\dfrac{x}{2} = \sqrt{2}$

$$\frac{1}{\text{Csc}\dfrac{x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Sen}\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad VP = 45^{\circ}$$

$$\frac{x}{2} = n(180^{\circ}) + (-1)^{n} \bullet VP$$

$$\frac{x}{2} = n(180^{\circ}) + (-1)^{n} \bullet 45^{\circ}$$

$$x = 2[n(180^{\circ}) + (-1)^{n} \bullet 45^{\circ}]$$

$$\boxed{x = n(360^{\circ}) + (-1)^{n} \bullet 90^{\circ}}$$

Resolución de ecuaciones trigonométricas

Para resolver ecuaciones trigonométricas, se reducen aplicando las identidades trigonométricas, identidades de transformación a ecuaciones elementales para luego seguir el procedimiento ya conocido.

Ejemplo

1. Resolver la ecuación y hallar la segunda solución positiva:

$$\text{Sen } x = \text{Cos}x$$

Resolución

$$\text{Sen}x = \text{Cos}x$$

$$\frac{\text{Sen}x}{\text{Cos}x} = 1$$

Identidades: $\text{Tan}x = 1 \quad \rightarrow \quad VP = 45^{\circ}$

$$x = n(180^{\circ}) + VP$$

$$\boxed{x = n(180^{\circ}) + 45^{\circ}}$$

Para $n = 0$ → $x = 0(180^{\circ}) + 45^{\circ}$ → $x = 45^{\circ}$
Para $n = 1$ → $x = 1(180^{\circ}) + 45^{\circ}$ → $x = 225^{\circ}$

2. Resolver la ecuación y hallar la suma de las dos primeras soluciones positivas

$$\text{Sen } 2x = \text{Cos}x$$

Resolución

$$\text{Sen}2x = \text{Cos}x$$

$$\text{Sen}2x - \text{Cos}x = 0$$

Arco doble: $2\text{Sen}x\text{Cos}x - \text{Cos}x = 0$

$$\text{Cos}x(2\text{Sen}x - 1) = 0$$

Igualando a cero cada factor, obtenemos dos ecuaciones elementales, por lo tanto dos conjuntos soluciones:

$\text{Cos } x = 0 \rightarrow VP = 90^o$ $\quad\rightarrow\quad$ $\text{Sen } x = \dfrac{1}{2} \rightarrow VP = 30^o$

$x = n(360^o) \pm VP$ $\quad\quad$ $x = n(180^o) + (-1)^n \cdot VP$

$x = n(360^o) \pm 90^o$ $\quad\quad$ $x = n(180^o) + (-1)^n \cdot 30^o$

El conjunto solución de la ecuación será la unión:

$\boxed{x = n(360^o) \pm 90^o}$ $\quad\rightarrow\quad$ $\boxed{x = n(180^o) + (-1)^n \cdot 30^o}$

Para n = 0 en el primer conjunto tenemos: $x = \pm 90^o$

$x = 90^o$

Para n = 0 en el segundo conjunto tenemos: $x = 30^o$

Luego la suma de las dos primeras soluciones positivas es:

$$30^o + 90^o = 120^o$$

3. Resolver la ecuación y hallar la tercera solución positiva:

$$2\text{Sen}^2x = \text{Cos}2x$$

Resolución

$$2\text{Sen}^2x = \text{Cos}2x$$

Arco doble: $1 - \text{Cos } 2x = \text{Cos}2x$

$$\text{Cos } 2x = 1 - \text{Cos } 2x$$

$$\text{Cos } 2x + \text{Cos } 2x = 1$$

$$2\text{Cos } 2x = 1$$

$$\text{Cos}2x = \frac{1}{2} \quad\rightarrow\quad VP = 60^o$$

$$2x = n(360º) \pm 60º$$

$$x = \frac{n(360º) \pm 60º}{2}$$

$$\boxed{x = n(180º) \pm 30º}$$

Para n = 0 → $x = 0(180º) \pm 30º$ → $x = -30º$ v $x = 30º$

Para n = 1 → $x = 1(180º) \pm 30º$ → $x = 180º-30º$ v $x = 180º+30º$

$x = 150º$ v $x = 210º$

Luego la tercera solución positiva es 210º.

Problemas I

1. Resolver:

$$2\text{Cos } x - \sqrt{2} = 0 \text{ ; } 0° < x < 360°$$

a) {45°;135°} b) {45°; 225°}
c) {45°; 315°} d) {135°; 225°}
e) {225°; 315°}

2. Resolver:
$4\text{Sen}^2x + 8\text{Sen } x + 3 = 0$; $x \in [0;2\pi]$

a) $\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}$
d) $\frac{\pi}{8}$ e) $\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}$

3. Hallar "x" que satisface:

$$2\text{Cos}^2x + 3\text{Sen } x = 3$$

a) 30° y 90° b) 60° y 90°
c) 45° y 60° d) 75° y 150°
e) 30° y 180°

4. Hallar el menor valor positivo de "x" que resuelva la ecuación:

$$\text{Sen } x = 1 + \sqrt{3}\text{ Cos } x$$

a) 30° b) 45° c) 75°
d) 90° e) 60°

5. Hallar el menor valor positivo de "x" que resuelva la ecuación:

$$\frac{1}{1+\text{Senx}} + \frac{1}{1-\text{Senx}} = 8$$

a) 30° b) 45° c) 60°
d) 30° e) 36°

6. Hallar el menor valor positivo de "x" que satisface la ecuación:

$$2\text{Cos } x = 3\text{Tan } x$$

a) $\frac{\pi}{11}$ b) $\frac{5\pi}{8}$ c) $\frac{\pi}{3}$
d) $\frac{2\pi}{3}$ e) $\frac{\pi}{6}$

7. Hallar "x" en la ecuación:
$\text{Tan}(45°+x)=3\text{ Tan } x + 2$; $0°<x<90°$
a) 15° b) 30° c) 45°
d) 60° e) 75°

8. Resolver "x" que satisface:
$2\text{Cos } x + \text{Cos } 2x = -1{,}5$; $90°<x<180°$
a) 120° b) 135° c) 127°
d) 143° e) 150°

9. Hallar la suma de valores de los ángulos "θ" comprendidos entre 0° y 360° que cumpla:

$$2\sqrt{3}\text{ Cos}^2\theta = \text{Sen } \theta$$

a) 60° b) 120° c) 180°
d) 270° e) 360°

10. Hallar la suma de soluciones comprendidas entre 0° y 360° que cumpla:

$$2\text{Tan}^2x + 3\text{Sec } x = 0$$

a) 180° b) 270° c) 120°
d) 540° e) 360°

11. Hallar el número de soluciones para: $x \in \langle 0°; 180° \rangle$ que cumpla:

$$\text{Tan}^2x - 3 = 0$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 0 e) 4

12. Hallar "x" que satisfaga:

$$\sqrt[8]{\text{Tanx}} + \sqrt[8]{\text{Cotx}} = 2$$

a) $\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}$ c) $\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}$
d) $\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}$ e) $\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{8}$

13. Hallar el número de soluciones de "θ" en el recorrido de 0 a 2π que cumpla:

$$(4\text{Cos}^2\theta-3)(\text{Csc } \theta + 2) = 0$$

a) 3 b) 2 c) 1
d) 4 e) 5

14. Resolver "x" que satisface:

$$\text{Tan}^2x - (1+\sqrt{3})\text{Tan } x + \sqrt{3} = 0$$

a) $\frac{\pi}{5};\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{4};\frac{4\pi}{3}$
c) $\frac{\pi}{8};\frac{5\pi}{8};\frac{\pi}{6};\frac{2\pi}{3}$ d) $\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}$
e) $\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}$

15. Hallar el menor ángulo positivo que cumpla:

$$\text{Sen}^2x-\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)\text{Sen }x+\frac{\sqrt{2}}{4}=0$$

a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{3}$
d) $\frac{5\pi}{12}$ e) $\frac{5\pi}{4}$

16. Resolver:

Cos x = $\sqrt{3}$ Sen x + $\sqrt{2}$; una solución es:

a) $-\frac{\pi}{2}$ b) $-\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{17\pi}{12}$
d) $\frac{\pi}{4}$ e) $\frac{\pi}{12}$

17. Hallar "α" que cumpla:

$$\text{Sen }\alpha+\text{Cos }\alpha+\sqrt{2}\cdot\text{Cos }2\alpha=0$$

a) $\frac{\pi}{16}$ b) $\frac{\pi}{18}$ c) $\frac{\pi}{10}$
d) $\frac{5\pi}{12}$ e) $\frac{\pi}{12}$

18. Hallar "x":

$$\sqrt{2+\text{Tanx}}+\sqrt{2-\text{Tanx}}=\sqrt{2}\text{Tanx}$$

a) 30° b) 60° c) 90°
d) 45° e) 53°

19. Siendo "x_1" una raíz de la ecuación:

3Sen x + 4Cos x = 5

en el intervalo: 0°<x<90

Hallar: x_1

a) 30° b) 37° c) 45°
d) 60° e) 53°

20. Hallar los valores de x en el recorrido dé $\langle 0;\pi\rangle$ que satisface:

$$\text{Sen }4x\cdot\text{Cos }x=\frac{1}{4}+\text{Sen}\frac{5x}{2}\cdot\text{Cos}\frac{5x}{2}$$

Indicar el cociente entre la mayor y la menor raíz.

a) 11 b) 13 c) 17
d) 5 e) $\frac{17}{18}$

CLAVES I				
1.c	2.e	3.a	4.d	5.c
6.e	7.b	8.a	9.c	10.e
11.b	12.d	13.d	14.b	15.b
16.c	17.d	18.b	19.b	20.c

Problemas II

1. Resolver la ecuación:

2Sen 12x – $\sqrt{3}$ = 0

a) 5° b) 8° c) 10°
d) 14° e) 15°

2. Resolver:

$\sqrt{2}$ Csc(x–8°) –1 = 0

a) 15° b) 30° c) 37°
d) 45° e) 53°

3. Resolver la siguiente ecuación:

5Sen(2x+87°) + 3 = 0

a) 25° b) 39° c) 50°
d) 65° e) 70°

4. Resolver:

25Cos(3x+29°) + 24 = 0

a) 18° b) 25° c) 36°
d) 45° e) 53°

5. Indicar una solución de la siguiente ecuación ecuación:

Tan(5x+10°) + 1 = 0

a) 10° b) 25° c) 28°
d) 30° e) 45°

6. Hallar las dos primeras soluciones positivas de la ecuación:

Sen x – $\sqrt{3}$ Cos x = 0

a) {15°; 195°} b) {30°; 210°}
c) {30°; 150°} d) {30°; 60°}
e) {60°; 240°}

7. Hallar la segunda solución positiva de la ecuación:

$$\text{Cos}^2x=\frac{1}{2}$$

a) 45° b) 90° c) 135°
d) 150° e) 315°

8. Calcular la segunda solución positiva de la ecuación:

Sen x – Cos x = 1

a) 75° b) 45° c) 90°
d) 150° e) 180°

9. Resolver:

$$\frac{\text{Sen}4x + \text{Sen}2x}{2\text{Cos}2x + 1} = \frac{1}{2}$$

a) $\frac{\pi}{12}$ b) $\frac{5\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{6}$
d) $\frac{5\pi}{6}$ e) $\frac{5\pi}{3}$

10. Resolver la ecuación y dar como respuesta la suma de las soluciones comprendidas en $[0;2\pi]$:

$$(1+\text{Tan } x)(1-\text{Tan } x) = 1$$

a) $\frac{\pi}{3}$ b) π c) $\frac{5\pi}{3}$
d) 3π e) 4π

11. Calcular la tercera solución positiva de la ecuación:

$$2\text{Cos}^2x - 7\text{Cos } x + 3 = 0$$

a) 60° b) 120° c) 240°
d) 300° e) 420°

12. Hallar el número de soluciones de la siguiente ecuación, para $x \in [0°; 180°]$:

$$\text{Sen } 3x + \text{Sen } x = 0$$

a) 1 b)2 c) 3
d) 4 e) 5

13. Calcular la suma de soluciones de la siguiente ecuación, para $x \in [0;2\pi]$.

$$\text{Sen } x - \text{Cos } 2x = 0$$

a) $\frac{3\pi}{2}$ b) $\frac{5\pi}{2}$ c) $\frac{7\pi}{2}$
d) π e) 2π

14. Resolver e indicar el número de soluciones para $x \in [0;2\pi]$ de:

$$\text{Sen}^2x + \text{Sen } x = \text{Cos}^2x$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

15. Hallar la menor solución positiva de la siguiente ecuación:

$$\text{Sen}18x+\text{Sen}10x+2\sqrt{3}\ \text{Sen}^2 2x=\sqrt{3}$$

a) $\frac{\pi}{12}$ b) $\frac{\pi}{8}$ c) $\frac{\pi}{22}$
d) $\frac{\pi}{42}$ e) $\frac{\pi}{52}$

16. Resolver la siguiente ecuación, para $x \in [0;2\pi]$.

$$\text{Sen } x + \text{Cos } x = 1 + \text{Sen } 2x$$

dar como respuesta la suma de soluciones.

a) π b) 2π c) 3π
d) 4π e) 5π

17. Si: $x \in]90°;180°[$, esolver:

$$\text{Tg}(x+45°) + \text{Tg}(x-45°) - 2\text{Ctg } x = 0$$

a) 105° b) 120° c) 135°
d) 150° e) 165°

18. Calcular la mayor solución positiva y menor a una vuelta de la ecuación:

$$\text{Tan } x + \text{Sen } x = 2\text{Cos}^2\frac{x}{2}$$

a) 150° b) 180° c) 45°
d) 225° e) 315°

19. Hallar el número de soluciones positivas y menores a una vuelta.

$$2\text{Sen } x + \text{Cot } x = \text{Csc } x$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

20. Si $x \in [0;2\pi]$; sumar las soluciones de la ecuación:

$$\text{Tg}^2x = \frac{1-\text{Cos}x}{1-\text{Sen}x}$$

a) $\frac{9\pi}{2}$ b) 3π c) $\frac{7\pi}{2}$
d) $\pi 2$ e) 2π

CLAVES II				
1. a	2. e	3. d	4. d	5. b
6. e	7. c	8. e	9. a	10.d
11.e	12.c	13.b	14.c	15.d
16.e	17.d	18.d	19.b	20.c