Índice

Presentación

El texto ha sido diseñado para brindar a los estudiantes de carreras de ciencias e ingeniería una revisión de conceptos básicos que serán requisitos para futuros cursos de cálculo en una y varias variables ; y cálculo aplicado. La finalidad del mismo es que el estudiante adquiera las herramientas necesarias para aplicar, en la resolución de ejercicios y problemas, los conceptos y propiedades básicas la Geometría analítica plana, Introducción al Algebra Lineal, iniciando de los Vectores en el plano y en el espacio, rectas y plano en el espacio; Matrices y Determinantes; y , de los Números complejos.

Este texto se caracteriza por brindar un tratamiento dinámico a los contenidos matemáticos lo que se refleja al anteponer, en lo posible, a las definiciones formales, situaciones que justifiquen su presentación y la formalización de los objetos matemáticos involucrados. Luego de este acercamiento a las definiciones y propiedades, se trabajan problemas de mayor complejidad para cuya solución se requiere la comprensión, conexión y aplicación de los resultados anteriores.

En los ejemplos desarrollados paso a paso a través de los cuales el estudiante identificará las técnicas a seguir para resolver los tipos de tareas propuestas, así como las justificaciones para cada una de ellas.

Capítulo 1

Geometría Analítica Plana

1.1 Sistemas de coordenadas cartesianas en el plano

En este capítulo se identificará cada punto del plano geométrico $\mathcal{P}$ con un par ordenado de $\mathbf{R}^2$, así como se asigna a cada punto de la recta un número real. Para ello se requiere definir algunos elementos.

En el plano $\mathcal{P}$ se consideran dos ejes perpendiculares entre sí, uno horizontal al que llamamos *eje de abscisas* y se denota por eje x; y otro vertical al que llamamos *eje de ordenadas* y se denota por eje y. En cada una de estas rectas se ubican los números reales. El punto de intersección de estas rectas se llama *origen de coordenadas* y corresponde al cero real en cada una de ellas.

La orientación de los ejes es la siguiente:

En el eje de abscisas el sentido positivo es a la derecha.

En el eje de ordenadas el sentido positivo es hacia arriba.

Así, el plano queda divido en cuatro regiones a las que se denominan cuadrantes: IC, IIC, IIIC y IVC.

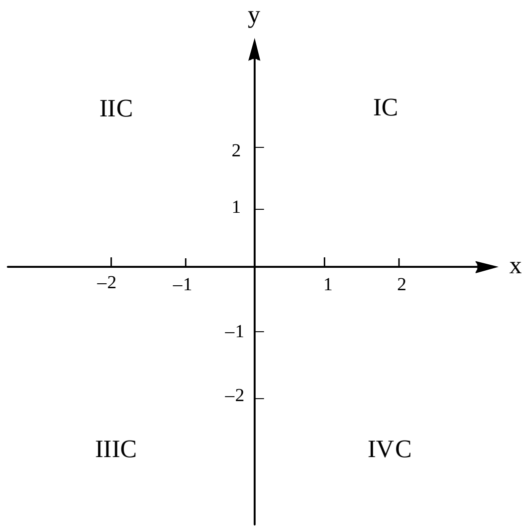


Figura 3.1 Cuadrantes del plano de coordenadas

Dado un punto $P \in \mathcal{P}$, por él se trazan rectas perpendiculares a los ejes x e y. La recta vertical determina un único punto de intersección x_0 en el eje de abscisas; análogamente, la recta horizontal determina en el eje de ordenadas un único punto, y_0.

Entonces al punto P se le hace corresponder el par ordenado $(x_0; y_0)$ .Esto es,

$$P \in \mathcal{P} \longmapsto (x_0; y_0) \in \mathbf{R}^2.$$

Así, el primer cuadrante, IC, es la región donde los puntos tienen abscisa y ordenada positivas.

El segundo cuadrante, IIC, es la región donde los puntos tienen abscisa negativa y ordenada positiva.

El tercer cuadrante, IIIC, es la región donde los puntos tienen abscisa y ordenada negativas.

El cuarto cuadrante, IVC, es la región donde los puntos tienen abscisa positiva y ordenada negativa.

Además, se puede asignar a cada par ordenado $(x_0; y_0) \in \mathbf{R}^2$ un único punto $P \in \mathcal{P}$ de la siguiente manera:

En el eje de abscisas ubicamos al punto de coordenada x_0; por este punto trazamos una perpendicular $\mathcal{L}_1$ al eje de abscisas. Procediendo de forma análoga con el eje de ordenadas y el número real $y_{0,}$ determinamos una recta $\mathcal{L}_2$. El punto de intersección de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ es el punto P que se quería determinar. De esta forma se tiene la función:

$$(x_0; y_0) \in \mathbf{R}^2 \longmapsto P \in \mathcal{P}.$$

Lo que se ha conseguido es establecer una correspondencia biunívoca entre un concepto geométrico (punto del plano) y un concepto algebraico (par ordenado de números reales). Esta correspondencia constituye el fundamento de la Geometría Analítica: establecer relaciones explícitas entre conceptos geométricos y algebraicos.

1.1.1 Distancia entre dos puntos del plano

Dados los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, la distancia entre los puntos P_1 y P_2 es el número real, $d(P_1,P_2)$ dado por:

$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

En efecto, si se ubican los puntos P_1 y P_2 en el plano como se muestra en la figura:

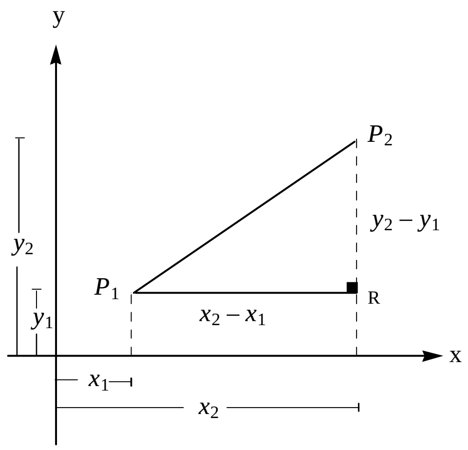


Figura 3.2 Distancia entre dos puntos

Al trazar por el punto P_1 una paralela al eje x y por P_2 una paralela al eje y, éstas se interceptan en el punto R, determinando el triángulo rectángulo P_1RP_2 , recto en R. Aplicando la relación pitagórica a las longitudes de los lados de dicho triángulo, se obtiene:

$$P_1P_2^2 = P_1R^2 + RP_2^2$$

Pero:

$$P_1R = x_2 - x_1 \quad \text{y} \quad RP_2 = y_2 - y_1$$

Luego,

$$d(P_{1,}P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Propiedades de la distancia entre dos puntos del plano

i) En la fórmula anterior se observa que la distancia entre dos puntos es siempre un valor no negativo: $d\,(P_1; P_2) \geq 0$.

ii) Nótese además que el orden en el cual se restan las coordenadas de los puntos P_1 y P_2 no afecta el valor de la distancia pues $(x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2$. Es decir, $d\,(P_1; P_2) = d\,(P_2; P_1)$.

iii) Si el segmento rectilíneo determinado por los puntos P_1 y P_2 es paralelo al eje x entonces:

$$|P_1P_2| = |x_2 - x_1|\,, \text{ puesto que } y_1 = y_2$$

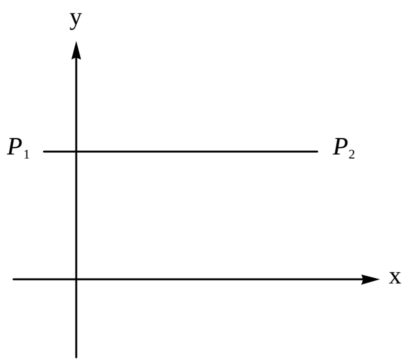
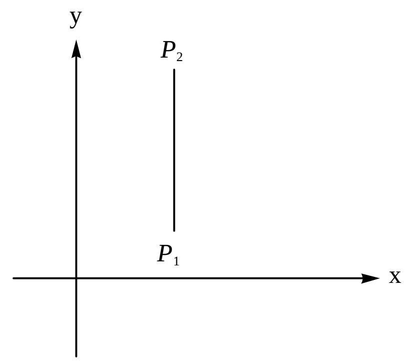


Figura 3.3 Caso particular: dos puntos con igual ordenada

Igualmente, si dicho segmento es paralelo al eje y , entonces:



$$|P_1P_2| = |y_2 - y_1| \text{, puesto que } x_2 = x_1$$

Figura 3.4 Caso particular: dos puntos con igual abscisa

iv) $d(P_1, P_3) \leq d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)$ .En particular, la igualdad se verifica si y solo si, los puntos P_1, P_2 y P_3 son colineales.

1.1.2 División de un segmento en una razón dada

Decimos que un punto P_3 está entre P_1 y P_2 si

$$d(P_1, P_2) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)$$

Dados los puntos $P_1 = (x_1; y_1)$ y $P_2 = (x_2; y_2)$, el punto $M = (x; y)$ del segmento $\overline{P_1P_2}$

que satisface la siguiente condición:

$$\frac{d\left(P_1, M\right)}{d\left(M, P_2\right)} = r \geq 0,$$

tiene coordenadas

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \\ & \text{si } r \neq -1 \\ y = \dfrac{y_1 + ry_2}{1 + r}, \end{cases}$$

En efecto, ubiquemos los puntos P_1, P_2 y M en el siguiente gráfico:

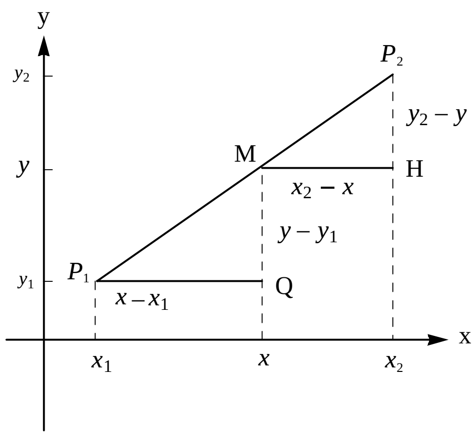


Figura 3.5 El punto M divide al segemento P_1P_2 en una razón r dada

Luego, los triángulos P_1QM y MHP_2 son semejantes. En ellos se cumple:

$$\frac{d\left(P_1;M\right)}{d\left(M;P_2\right)} = \frac{d\left(P_1;Q\right)}{d\left(M;H\right)}$$

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, r \neq -1$$

$$\frac{d\left(P_1;M\right)}{d\left(M;P_2\right)} = \frac{d\left(Q;M\right)}{d\left(H;P_2\right)} = r$$

$$r = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}, r \neq -1$$

1.1.3 Punto medio de un segmento

Dados dos puntos $P_1(x_1; y_1)$ y $P_2(x_2; y_2)$, el *punto medio* del segmento de recta que une P_1 y P_2 se define como el punto M tal que

$$d(P_1; M) = d(M; P_2)$$

Y en la expresión general $x = \dfrac{x_1 + rx_2}{1+r}$, $\quad y = \dfrac{y_1 + ry_2}{1+r}$ se reemplaza r por 1 y se obtiene que el punto medio M del segmento $\overline{P_1P_2}$ tiene coordenadas:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Ejemplo 1.1 *Considerar el paralelogramo $ABCD$ con vértices $A(1;1), B(3;9), C(9;11)$ y $D(d_1; d_2)$. Los puntos M y N son puntos medio de los lados $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$, respectivamente.Determinar las coordenadas de los puntos P y Q, siendo P punto de intersección de $\overline{BM}$ con la diagonal $\overline{AC}$ y Q punto de intersección de $\overline{BN}$ con la diagonal $\overline{AC}$.*

Solución

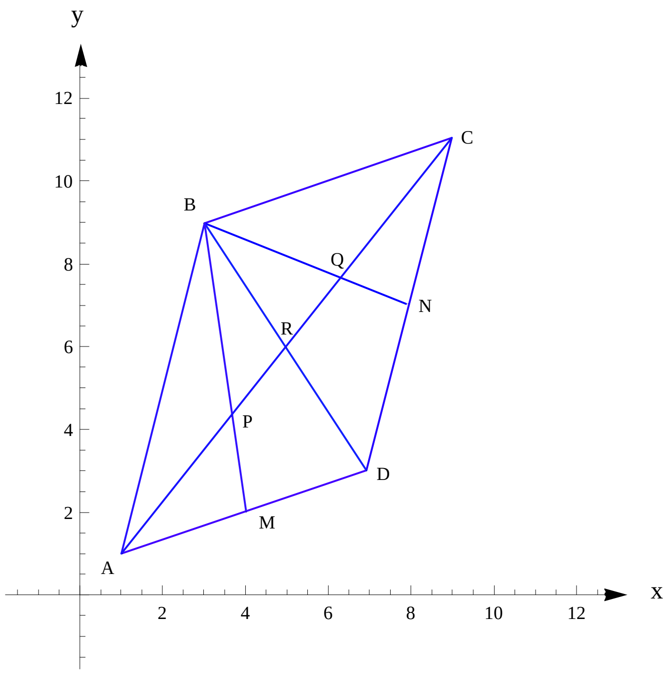


Figura 3.6 Ubicación de los puntos dados en el enunciado del ejemplo

Determinación del punto O (punto medio de $\overline{AC}$) : $O(5;6)$
Determinación de las coordenadas del punto D:

$$\begin{aligned} \frac{d_1 + 3}{2} &= 5, \text{entonces } d_1 = 7 \\ \frac{d_2 + 9}{2} &= 6, \text{entonces } d_2 = 3 \end{aligned}$$

entonces $D(7;3)$
Determinación del punto M punto medio de $\overline{AD}$: $M(4;2)$
Determinación del punto N punto medio de $\overline{CD}$: $N(8;7)$
En el triángulo ABD :
$\overline{BM}$es mediana relativa al lado $\overline{AD}$,
$\overline{AO}$ es mediana relativa al lado $\overline{BD}$

por tanto P es el Baricentro (intersección de las medianas)
En el triángulo BCD :
$\overline{BN}$ es mediana relativa al lado $\overline{CD}$,
$\overline{CO}$ es mediana relativa al lado $\overline{BD}$
por tanto Q es el Baricentro (intersección de las medianas)
$\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QC}$ Por tanto P y Q son puntos de trisección de $\overline{AC}$
Determinación de P

$$\frac{AP}{PC} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \begin{cases} x_P = \frac{1+\frac{9}{2}}{1+\frac{1}{2}} & \Longrightarrow \quad x_P = \dfrac{11}{3} \\ y_P = \frac{1+\frac{11}{2}}{1+\frac{1}{2}} & \Longrightarrow \quad y_P = \dfrac{13}{3} \end{cases}$$

Por tanto $P\left(\frac{11}{3}; \frac{13}{3}\right)$
Determinación de Q :

$$\frac{AQ}{QC} = \frac{2}{1} \Longrightarrow \begin{cases} x_Q = \frac{1+2(9)}{1+2} & \Longrightarrow \quad x_Q = \frac{19}{3} \\ y_Q = \frac{1+2(11)}{1+2} & \Longrightarrow \quad y_Q = \frac{23}{3} \end{cases}$$

Por lo tanto, $Q\left(\frac{19}{3}; \frac{23}{3}\right)$.

1.2 Lugar geométrico en el plano

Uno de los más importantes logros de la Geometría Analítica es haber conseguido la integración del Álgebra con la Geometría a través del planteamiento de dos problemas fundamentales:

a)Dada la ecuación $E(x;y) = 0$ de una curva, interpretarla geométricamente. Es decir, construir su gráfica.

Por ejemplo, dada la ecuación $x - y = 0$, concluir que su gráfica es una recta que pasa por el origen.

(b)Dada la condición geométrica que deben cumplir los puntos de una misma curva (lugar geométrico), determinar su ecuación.

Por ejemplo, si se tiene como condición geométrica:
Es el conjunto de puntos del plano que distan 5 unidades del origen de coordenadas
concluir que la condición algebraica que satisfacen dichos puntos es:

$$x^2 + y^2 = 25$$

Así, el lugar geométrico será el conjunto de puntos del plano que distan 5 unidades del origen de coordenadas y la ecuación de dicho lugar geométrico será $x^2 + y^2 = 25$.

Ejemplo 1.2 *Determinar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x;y)$ del plano cartersiano que equidistan (se encuentran a la misma distancia) de los puntos $A(1;0)$ y $B(0;2)$.*

Solución
Según la condición del problema, el punto P está situado en el plano de manera que:

$$d(P;A) = d(P;B)$$

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2}.$$

Elevando al cuadrado se obtiene:

$$x^2-2x+1+y^2=x^2+y^2-4y+4,$$

Y simplificando,

$$2x+4y+3=0,$$

Así, esta ecuación corresponde a la condición algebraica que satisfacen los puntos $(x;y)$ de la mediatriz del segmento $\overline{AB}$. Es la ecuación del lugar geométrico pedido.

Ejemplo 1.3 *Sea $\overline{AP}$ un segmento de longitud 10 unidades y $B(x;\ y)$ un punto tal que A es el punto medio del segmento $\overline{PB}$. Si el segmento $\overline{AP}$ se desplaza de manera que el extremo A se encuentra en el eje X y el extremo P se encuentra en el eje Y,*

a)hallar las coordenadas de B cuando el extremo A está en $(6;0)$ y P está en la parte positiva del eje Y.

b)hallar la ecuación del lugar geométrico descrito por B.

Solución

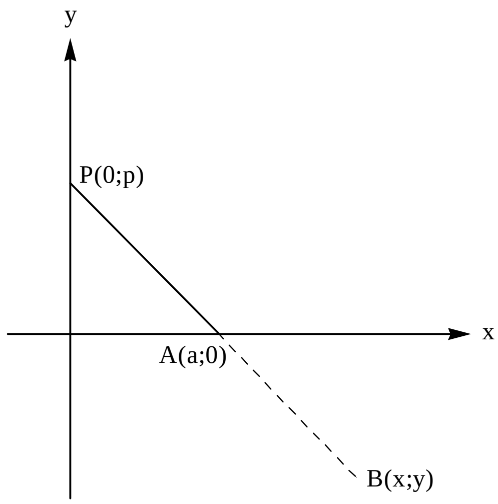


Figura 3.7 Ubicación de los puntos dados en el enunciado del ejemplo

a) Si $A(6;0)$, entonces como

$$a^2+p^2=100,\ p>0,$$

se tiene que $p=8$ y $P(0;8)$.

Como A es el punto medio entre P y B, entonces $B(12,-8)$

b) Tenemos que

$$a^2+p^2=100$$

De las fórmulas del punto medio:

$$a=\frac{x}{2} \quad \text{y} \quad 0=\frac{p+y}{2}$$

Luego $a = \dfrac{x}{2}$ y $p = -y$

Reemplazando:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + (-y)^2 = 100$$

Simplificando, se tiene la ecuación del lugar geométrico $(L.G)$ descrito por B es:

$$x^2 + 4y^2 = 400$$

Ejemplo 1.4 *El trapecio $OPQR$, recto en O, tiene lados paralelos $\overline{OP}$ y $\overline{RQ}$. Se sabe además que O es el origen de coordenadas, $P(4;0)$ y el vértice Q se encuentra sobre la curva $x = y^2$. Hallar la ecuación del lugar geométrico del punto medio de la base media de dicho trapecio.*

Solución

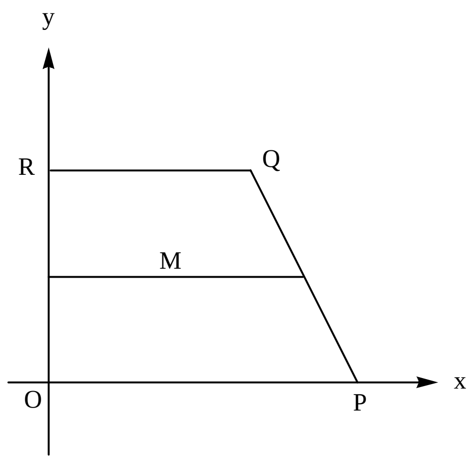


Figura 3.8 Ubicación de los puntos dados en el enunciado del ejemplo

Entonces $0(0;0)$, $P(4;0)$, $R(0;q_y)$ y $Q(q_y^2;q_y)$.
Punto medio de $\overline{OR}$: $(0;\frac{q_y}{2})$
Punto medio de $\overline{QP}$: $(\frac{4+q_y^2}{2};\frac{0+q_y}{2})$
Luego, si $M(x;y)$ entonces

$$x = \frac{4+q_y^2}{4},\ y = \frac{q_y+q_y}{4}$$

Pero la relación que se pide es entre las coordenadas de M, luego debe obtenerse una ecuación que relacione x e y :

$$4x - 4 = q_y^2 \qquad , \qquad 4y = 2q_y$$

Luego,

$$4x - 4 = (2y)^2 \Rightarrow x - 1 = y^2$$

Ejemplo 1.5 *En un triángulo ABC se cumplen las siguientes condiciones:$A(-1;0)$, el vértice C tiene ordenada 4, el lado $\overline{AB}$ mide 4 unidades y el lado $\overline{BC}$ es paralelo a la recta $x = 5$. Hallar la ecuación del lugar geométrico que describe el punto medio de la mediana trazada desde A.*

Solución

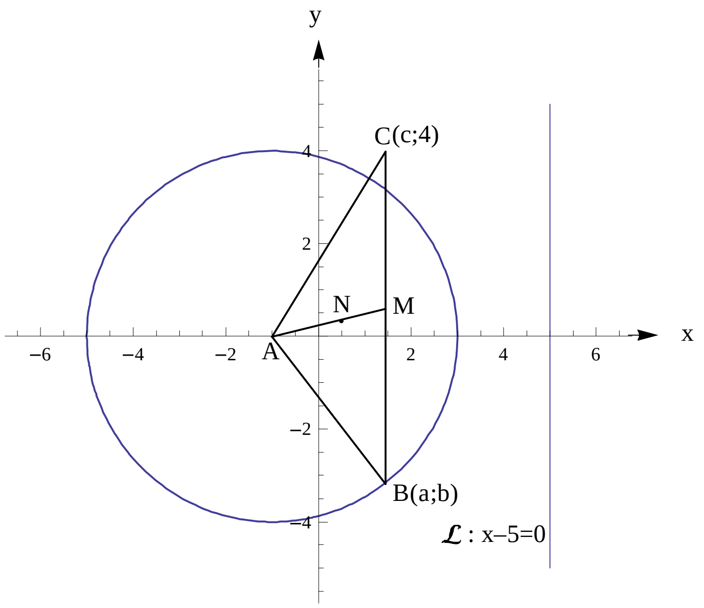


Figura 3.9 Ubicación de los puntos dados en el enunciado del ejemplo

Sean:
$\overline{M}$ el punto medio del lado $\overline{BC}$
O el punto medio de la mediana $\overline{AM}$
Sea O el punto medio de la mediana $\overline{AM}$.
Sean $B(a;b)$ y $C(c;4)$.
Consideremos $O(x;y)$ el punto cuyo lugar geométrico queremos hallar.
El punto $B(a;b)$cumple

$$\sqrt{(a+1)^2+(b-0)^2} = 4.$$

Es decir:

$$(a+1)^2 + b^2 = 16 \,....(I)$$

$C(c;4)$ cumple que $\overline{BC}$ es paralela a la recta $x = 5$. Luego $\overline{BC}$ es vertical y por lo tanto $a = c$. Así, $C\,(a,4)$.

$$M = \left(a;\frac{b+4}{2}\right) \Longrightarrow \quad x = \frac{a-1}{2} \quad \text{ y } \quad y = \frac{0+\frac{b+4}{2}}{2}$$

De lo anterior se tiene que:

$$a = 2x+1 \;\; \text{y} \quad b = 4y-4$$

Reemplazando en la ecuación (I) : se tiene que la ecuación del LG del punto M es:

$$(2x+1+1)^2 + (4y-4)^2 = 16$$

$$(2x+2)^2+(4y-4)^2=1616$$

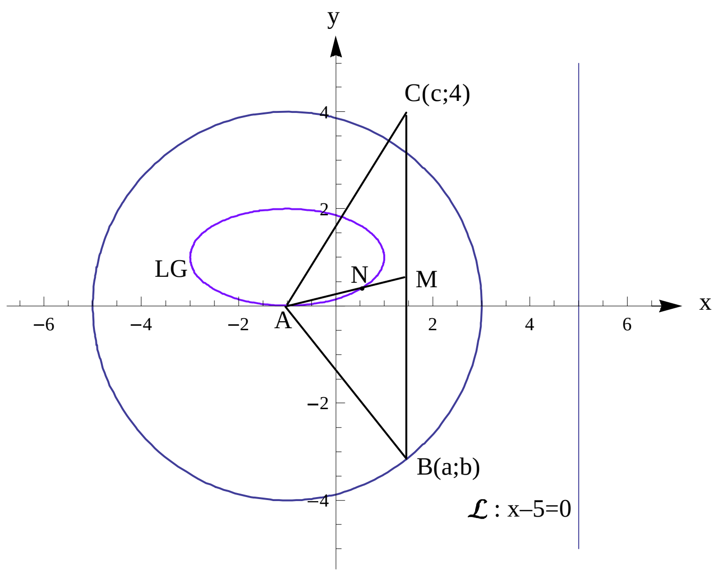


Figura 3.10 Trazo del lugar geométrico descrito por M

1.2.1 Problemas propuestos

1) El lado de un rombo $ABCD$ mide $5\sqrt{2}$ y dos de sus vértices opuestos son los puntos $A(3;-4)$ y $B(1;2)$.Calcular los otros vértices y la longitud de la altura de dicho rombo.

2) La base de un triángulo tiene por extremos a los puntos $A(0;0)$ y $B(6;0)$. Hallar la ecuación del lugar geométrico del tercer vértice C de dicho triángulo si se sabe que éste tiene ordenada positiva y se mueve de modo que el producto de las tangentes de los ángulos ABC y CAB (ángulos interiores del triángulo) es siempre igual a 4. Notar que los ángulos de la base del triángulo son agudos.

3) Se tienen los vértices $P(-1;-4)$, $Q(1;2)$ y $R(a;4)$ del paralelogramo $PQRS$. Se sabe además que R se encuentra sobre la curva de ecuación $y=x^2$.

a)Hallar las coordenadas del vértice S. Luego, mostrar gráficamente su ubicación.

b)Considerando el valor de $a<0$, determinar cuál de los puntos medios de los lados del paralelogramo $PQRS$ se encuentra más cerca del origen de coordenadas.

4) Sea AOC un triángulo de área unitaria, donde A se encuentra en el eje X, O es el origen de coordenadas y C se encuentra en el eje Y. Si M es el punto medio del lado $\overline{AC}$ de dicho triángulo, hallar la ecuación del lugar geométrico de M .

1.3 La recta

Una recta es un conjunto de puntos que satisfacen la condición de estar alineados. Para hallar la ecuación de este lugar geométrico necesitamos conocer dos puntos de paso distintos, $P_1\ (x_1;y_1)$ y $P_2\ (x_2;y_2)$.

i) Si $x_1=x_2$, se tratará de una recta vertical . Para caracterizarla solo debemos dar como información la abscisa de los puntos por los que ella pasa, así, el punto $P(x;y)$ se encontrará en la recta que pasa por $P_1\ (x_1;y_1)$ y $P_2\ (x_2;y_2)$ si y solo si, $x=x_1$.

ii) Si $x_1 \neq x_2$, entonces la recta no será vertical y para que el punto $P(x; y)$ se encuentre en la recta que pasa por $P_1\ (x_1; y_1)$ y $P_2\ (x_2; y_2)$ se debe cumplir que :

el ángulo que forma el segmento P_1P con el semieje x positivo=el ángulo que forma el segmento P_1P_2 con el semieje x positivo

1.3.1 Ángulo de inclinación y pendiente de una recta

Se llama *ángulo de inclinación de la recta* $\mathcal{L}$, al ángulo $\theta \in [0; \pi[$ medido en sentido antihorario desde el semieje positivo de las abscisas hasta la recta $\mathcal{L}$.

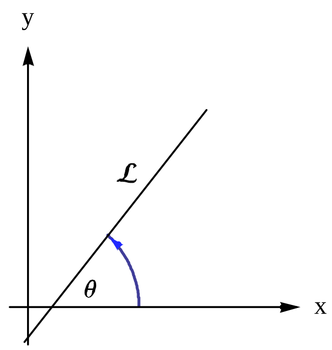


Figura 3.11 Recta que forma un ángulo θ con el semieje x positivo

Si $\mathcal{L}$ es una recta no vertical, la *pendiente* de la recta $\mathcal{L}$, denotada por m, se define como el valor de la tangente de su ángulo de inclinación. Es decir,

$$m = \tan \theta$$

Teorema 1.1 *Si $\mathcal{L}$ es una recta no vertical que pasa por los puntos $P_1\,(x_1; y_1)$ y $P_2\,(x_2; y_2)$, entonces la* pendiente *de la recta $\mathcal{L}$ es*

$$m_{\mathcal{L}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Entonces regresando a la condición de ii):

el ángulo que forma el segmento P_1P con el semieje x positivo=el ángulo que forma el segmento P_1P_2 con el semieje x positivo

y empleando la fórmula para la pendiente, se tiene que:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Esta es la ecuación de la recta que pasa por $P_1\,(x_1; y_1)$ y $P_2\,(x_2; y_2)$.

Observación:

La pendiente de una recta puede ser positiva, negativa o cero, según el ángulo de inclinación de la recta, así:

Si θ= 0^o entonces $m = 0$:

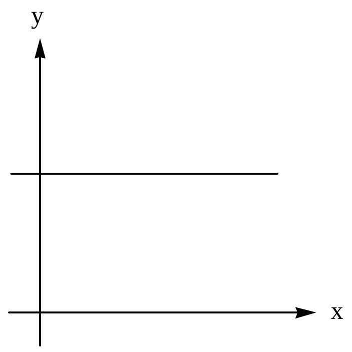


Figura 3.12 Recta horizontal

Si $0^o < \theta < 90^o$ entonces $m > 0$:

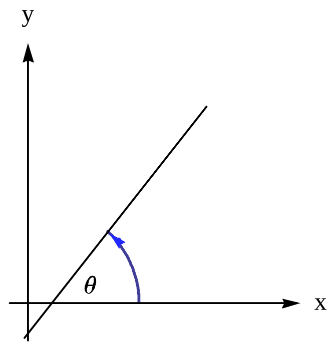


Figura 3.13 Recta con pendiente positiva

Si $90^o < \theta < 180^o$ entonces $m < 0$:

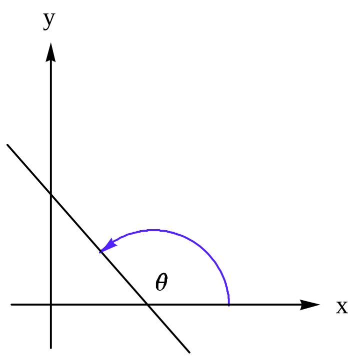


Figura 3.14 Recta con pendiente negativa

1.3.2 Ecuación de una recta si se conoce la pendiente (Ecuación punto pendiente)

Sea $\mathcal{L}$ la recta que pasa por el punto dado $P_0\,(x_0; y_0)$ y tiene pendiente m.

Si $P\,(x;y)$ es cualquier punto de $\mathcal{L}$ con $P \neq P_0$ entonces:
P está en $\mathcal{L}$ si y sólo si,

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = m$$

Esta ecuación se puede escribir en la forma:

$$y - y_0 = m\,(x - x_0)$$

$$\mathcal{L} : y - y_0 = m\,(x - x_0)$$

1.3.3 Ordenada en el origen de una recta

Si una recta $\mathcal{L}$ interseca al eje Y en el punto $(0;b)$, el número b se llama *ordenada en el origen* .

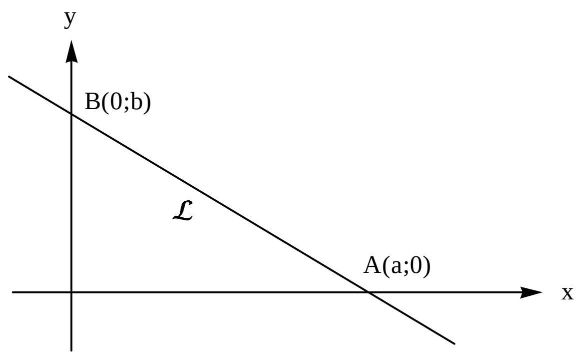


Figura 3.15 Punto de corte de una recta con el eje vertical

Si una recta $\mathcal{L}$ de pendiente m y pasa por el punto $(0;b)$, su ecuación se puede presentar de la siguiente forma:

$$y - b = m\,(x - 0)$$

$$\mathcal{L} : y = mx + b$$

1.3.4 Ecuación general de la recta

Se ha visto que las rectas verticales tienen ecuación de la forma: $x = a$, con a constante.
Mientras que las rectas no verticales tienen ecuación de la forma : $y = mx + b$.

Estas dos condiciones algebraicas se pueden representar en una sola expresión :

$$Ax + By + C = 0$$

Recíprocamente, si se tiene una ecuación de primer grado en dos variables,

$$Ax + By + C = 0 \text{ en donde } A, B, C \in \mathbf{R} \text{ y además } A \neq 0 \text{ ó } B \neq 0$$

entonces esta corresponderá a la ecuación de una recta, pues:

a) Si $B = 0$, la ecuación tiene la forma:

$$Ax + C = 0,$$

que representa una recta vertical.
b)Si $B \neq 0$ la ecuación se puede escribir

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

la cual es la ecuación de una recta no vertical.
Por lo tanto, una ecuación de la forma

$$Ax + By + C = 0 \text{ con } A, B, C \in \mathbf{R} \text{ ; } A \neq 0 \text{ ó } B \neq 0,$$

se llama *ecuación general de la recta.*

Observación:
Para hallar el punto en el que las dos rectas secantes se cortan, se deberá resolver el sistema lineal formado por las ecuaciones de las dos rectas.

Ejemplo 1.6 *Encontrar el punto de intersección de las rectas*

$$y - 12 = \frac{12}{5}(x - 17)$$

y

$$5x + 12y - 60 = 0$$

Solución
Para encontrar el punto de intersección de las rectas dadas, se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} 5x + 12y - 60 = 0 & (1) \\ 12x - 5y - 144 = 0 & (2) \end{cases}$$

Para ello, se multiplica por 5 la ecuación (1) y se le suma la ecuación (2) multiplicada por 12. Así:

$$\begin{cases} 25x + 60y - 300 = 0 \\ \underline{144x \ - \ 60y \ - \ 1728 \ = \ 0} \\ 169x - 2028 = 10 \end{cases}$$

de donde $x = 12$ es la abscisa del punto de intersección.
Reemplazando el valor de x así obtenido en cualquiera de las ecuaciones (1) ó (2) se obtiene $y = 0$ como la ordenada del punto de intersección entre las rectas. Es decir $(12; 0)$ es el punto de intersección pedido.

1.3.5 Ángulos entre dos rectas

Si $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son dos rectas cualesquiera (pero ninguna de ellas vertical) que se interceptan en el punto Q entonces $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ forman dos ángulos suplementarios θ y $\pi - \theta$.

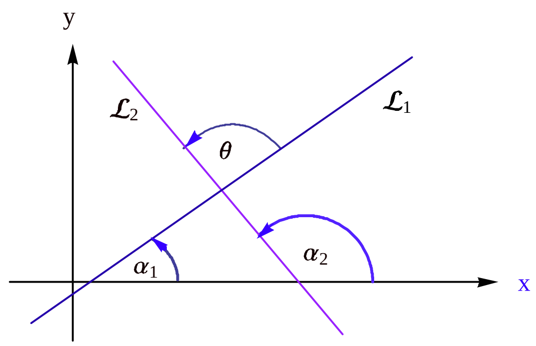


Figura3.16 Ángulo medido desdeL_1 hacia L_2 en sentido antihorario

Sean α_1 y α_2 los ángulos de inclinación de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ con el eje x positivo, respectivamente.

El *ángulo que forma la recta* $\mathcal{L}_1$ *y la recta* $\mathcal{L}_2$, se define como el ángulo θ positivo obtenido al rotar desde la recta $\mathcal{L}_2$ hacia $\mathcal{L}_1$ en torno al punto Q,en sentido antihorario

En este caso, el ángulo entre $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ está dado

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

siendo m_1 y m_2 las pendientes de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, respectivamente.

En efecto, como se verifica que :

$$\theta = \alpha_2 - \alpha_1$$

Entonces

$$\tan\theta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_2 \tan\alpha_1}$$

Como $m_1 = \tan\alpha_1$ y $m_2 = \tan\alpha_2$, se tiene

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Ejemplo 1.7 *Considerar las rectas* $\mathcal{L}_1$ *y* $\mathcal{L}_2$ *cuyas ecuaciones son:* $y = 2x + 3$ *y* $y = -x + 10$*, respectivamente. Hallar el ángulo medido desde* $\mathcal{L}_1$ *hacia* $\mathcal{L}_2$ *en sentido antihorario.*

Solución

Si el ángulo medido desde $\mathcal{L}_1$ hacia $\mathcal{L}_2$ en sentido antihorario, se denota por θ, entonces se verifica que:

$$\tan(\theta) = \frac{m_{L_2} - m_{L_1}}{1 + m_{L_2} m_{L_1}}$$

$$\tan(\theta) = \frac{-1 - 2}{1 + (-1)(2)} = 3$$

Luego, el ángulo entre $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ mide $\arctan(3)$.

1.3.6 Posiciones relativas de dos rectas

Considerar las rectas $\mathcal{L}_1 : y = m_{\mathcal{L}_1}x + b_1$ y $\mathcal{L}_2 : y = m_{\mathcal{L}_2}x + b_2$,ninguna de ellas recta vertical.

a)$\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son *paralelas* si y sólo si, sus pendientes son iguales. Es decir, si $m_{\mathcal{L}_1}$y $m_{\mathcal{L}_2}$ son las pendientes de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, respectivamente:

$$\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow m_{\mathcal{L}_1} = m_{\mathcal{L}_2}$$

b)$\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son *perpendiculares* si y sólo si, el producto de sus pendientes es igual a -1. Es decir, si $m_{\mathcal{L}_1}$y $m_{\mathcal{L}_2}$ son las pendientes de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, respectivamente:

$$\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow m_{\mathcal{L}_1} m_{\mathcal{L}_2} = -1$$

Ejemplo 1.8 *Encontrar la ecuación de la recta que contiene el punto $P(17; 12)$ y es perpendicular a la recta de ecuación*

$$5x + 12y - 60 = 0$$

Solución

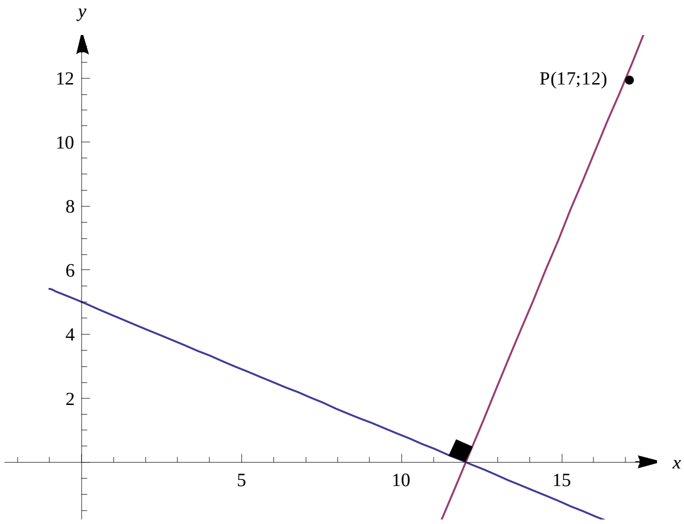


Figura 3.17 Ubicación de los puntos dados en el enunciado del ejemplo

Como la pendiente de la recta de ecuación 5x + 12y − 60 = 0 es $m = -\frac{5}{12}$, entonces, si $m_1$denota la pendiente de la perpendicular se sigue que $m_1 = \frac{12}{5}$.

Asi que de la recta que se busca, se conoce su pendiente $m_1 = \frac{12}{5}$ y el punto P(17, 12). En consecuencia, la ecuación de dicha recta viene dada por:

$$y - 12 = \frac{12}{5}(x - 17)$$

ó

$$12x - 5y - 144 = 0,$$

que es la ecuación general de la recta pedida.

Ejemplo 1.9 *Considerar la recta $\mathcal{L}$ cuya ecuación en su forma general está dada por: $3x + 4y - 5 = 0$. Determinar:*

a)La ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1;2)$ y es paralela a $\mathcal{L}$.
b)La ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1;2)$ y es perpendicular a $\mathcal{L}$.

Solución
Sean $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ las rectas paralela y perpendicular a $\mathcal{L}$, respectivamente, que pasan por el punto $P(1;2)$. Sean m_1, m y m_2 las pendientes de $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}$ y $\mathcal{L}_2$, respectivamente.

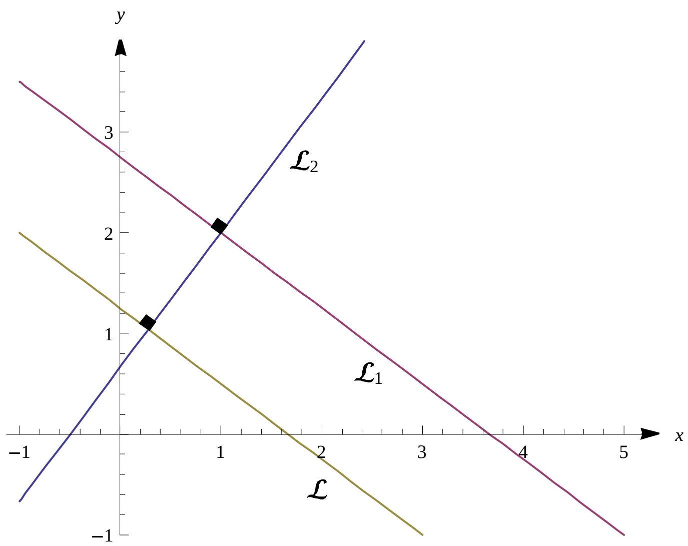


Figura 3.18 Ubicación de las rectas dadas

Como $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son paralelas entonces $m_1 = m$ y puesto que $m = -3/4$ se sigue que $m_1 = -3/4$. Ahora, usando la forma punto–pendiente (Sección 4.4.3.) de la ecuación de la recta, se tiene para

$$\mathcal{L}_1 : y - 2 = \frac{1-3}{-2-1}(x-1)$$

$$\mathcal{L}_1 : y - 2 = -\frac{3}{4}(x-1)$$

y simplificándola se puede escribir en la forma general $\mathcal{L}_1 : 3x + 4y - 11 = 0$
b) Como $\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2$, entonces $m_2 = -1/m$ y como $m = -3/4$, se sigue que $m_2 = 4/3$.
Usando nuevamente la forma punto - pendiente se tiene para

$$\mathcal{L}_2 : y - 2 = \frac{4}{3}(x-1)$$

y simplificando se puede escribir en la forma general: $4x - 3y + 2 = 0$ y $3x + 4y - 11 = 0$.

Ejemplo 1.10 *Considerar el trapecio ABCD (con vértices en sentido antihorario) de bases BC y AD, recto en B y de 48 u^2 de área.*

Se sabe que:

- $L_1 : y = \frac{1}{2}x - 1$ y $L_2 : y = 2x - \frac{5}{2}$ son dos rectas dadas.
- A es punto de intersección de las rectas L_1 y L_2.
- B, de abscisa positiva, está en la bisectriz del ángulo agudo formado por L_1 y L_2.
- D está en la bisectriz del ángulo obtuso formado por L_1 y L_2.
- La longitud del segmento AD es el doble de la longitud del segmento AB
- Los segmentos AB y BC tienen la misma longitud.

Con la información anterior, hallar las coordenadas de los vértices de dicho trapecio.

Solución

El punto de intersección de las rectas L_1 y L_2 es $(1; -\frac{1}{2})$.

Sea L la bisectriz del ángulo formado por las rectas dadas y m la pendiente de L. Usando la definición de bisectriz, se verifica que el ángulo que forman la bisectriz y L_1 es igual al ángulo que forman L_2 y la bisectriz.

Escribiendo esta condición en una ecuación, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{m}{2}} = \frac{2 - m}{1 + 2m}$$

Y al resolverla se obtienen dos soluciones:

$$m = 1 \ \text{ y } \ m = -1$$

De esta manera se obtienen las ecuaciones de las dos bisectrices:

$L_4 : x + y - \frac{1}{2} = 0$, bisectriz del ángulo obtuso
$L_3 : x - y - \frac{3}{2} = 0$, bisectriz del ángulo agudo y la que, por dato, se debe considerar para hallar el vértice B.

Como el vértice B se encuentra en la bisectriz L_3, sus coordenadas son de la forma $B(b; b - \frac{3}{2})$

Por otro lado, el área del trapecio se obtiene con el siguiente cálculo:

$$\text{Área del trapecio} = \frac{1}{2}(d(A; D) + d(B;\ C))d(A;\ B) = \frac{3}{2}d(A;\ B)^2 = 48$$

Luego , se tiene que :

$$d(A;\ B) = \sqrt{32}$$

$$(b - 1)^2 + (b - \frac{3}{2} + \frac{1}{2})^2 = 32$$

$$|b - 1| = 4$$

$$b = 5 \ \text{ ó } \ b = -3$$

Como la absicisa de B es positiva, B$(5; \frac{7}{2})$.

Se traza una recta que pase por B y que sea paralela a L_4 para hallar $C(1; \frac{15}{2})$

Finalmente, en la recta L_4 se encuentra el vértice $D(-8; \frac{15}{2})$.

1.3.7 Distancia de un punto a una recta

Dada la ecuación general de una recta $\mathcal{L}: Ax+By+C=0$, se puede hallar a qué distancia se encuentra un punto $P(x_1;y_1)$ cualquiera del plano de la recta $\mathcal{L}$. Para ello se procede de la siguiente manera:

Paso 1
Sea H el pie de la perpendicular bajada de P a $\mathcal{L}$. La longitud del segmento $\overline{PH}$ será la *distancia del punto P a la recta $\mathcal{L}$.*

$$d(P;\mathcal{L}) = d(P;H)$$

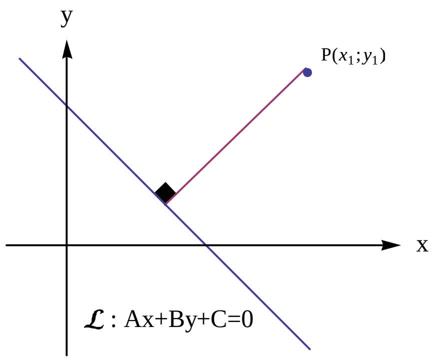


Figura 3.19 Ubicación de un punto cualquiera y de una recta cualquiera

Luego para hallar $d(P;\mathcal{L})$,bastará hallar H y luego calcular la distancia entre los puntos $d(P;H)$.

Paso 2
Como $m_{\mathcal{L}_1} = \frac{B}{A}$, encontramos que

$$\mathcal{L}_1 : Bx - Ay + (Ay_1 - Bx_1) = 0;$$

y el punto $H\,(x', y')$ se obtiene resolviendo el sistema

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0, \\ Bx - Ay + (Ay_1 - Bx_1) = 0. \end{cases}.$$

Así,

$$H = \left(\frac{B^2x_1 - BAy_1 - CA}{A^2+B^2}, \frac{A^2y_1 - ABx_1 - BC}{A^2+B^2} \right)$$

Paso 3
$d\,(P;\mathcal{L}) = \sqrt{\left(x_1 - \frac{B^2x_1 - BAy_1 - CA}{A^2+B^2}\right)^2 + \left(y_1 - \frac{A^2y_1 - ABx_1 - BC}{A^2+B^2}\right)^2}$,
$d\,(P;\mathcal{L}) \ = \sqrt{\frac{(Ax_1+By_1+C)^2}{A^2+B^2}}$
De donde, por propiedad del valor absoluto,

$$d\,(P;\mathcal{L}) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Caso particular:
Dadas dos rectas paralelas

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &: Ax+By+C_1=0\\ \mathcal{L}_2 &: Ax+By+C_2=0,\end{aligned}$$

la distancia entre ellas se puede calcular a través de la siguiente fórmula:

$$d(\mathcal{L}_1;\mathcal{L}_2)=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Ejemplo 1.11 *Encontrar la distancia del punto P(17;12) a la recta*

$$5x+12y-60=0$$

Solución

Usando la fórmula de distancia de un punto a una recta, se obtiene:

$$\frac{|5(17)+12(12)+(-60)|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\frac{|85+144-60|}{13}=\frac{169}{13}=13$$

A continuación se presentan más ejemplos relacionados con rectas.

Ejemplo 1.12 *Los puntos $A(1;3)$ y $B(2;4)$ son dos vértices consecutivos del rectángulo $ABCD$. Si M es el punto de intersección de las diagonales de dicho rectángulo y está situado en el eje X, hallar:*

a)Las coordenadas del punto M.
b)Las coordenadas de los vértices C y D.

Solución

$$\begin{aligned}d(M;A) &= d(M;B)\\ (m-1)^2+3^2 &= (m-2)^2+4^2 \Longrightarrow m=5\end{aligned}$$

Así, $M(5;0)$.

$$\begin{aligned}C(c_x;c_y) &: \frac{c_x+1}{2}=5, \frac{c_y+3}{2}=0\Longrightarrow C(9;-3)\\ D(d_x;d_y) &: \frac{d_x+2}{2}=5, \frac{d_y+4}{2}=0\Longrightarrow D(8;-4)\end{aligned}$$

$$\text{Ecuación del lado } \overline{AB}: y-3=x-1$$

$$\text{Ecuación del lado } \overline{CD}: y+3=x-9$$

$$\text{Ecuación del lado } \overline{BC}: y-4=-x+2$$

$$\text{Ecuación del lado } \overline{AD}: y-1=-x+3$$

Ejemplo 1.13 *La recta que aparece en la figura muestra la relación entre el precio p de un producto y la cantidad q en (millares) que los consumidores comprarían a ese precio. Calcular e interpretar la pendiente.*

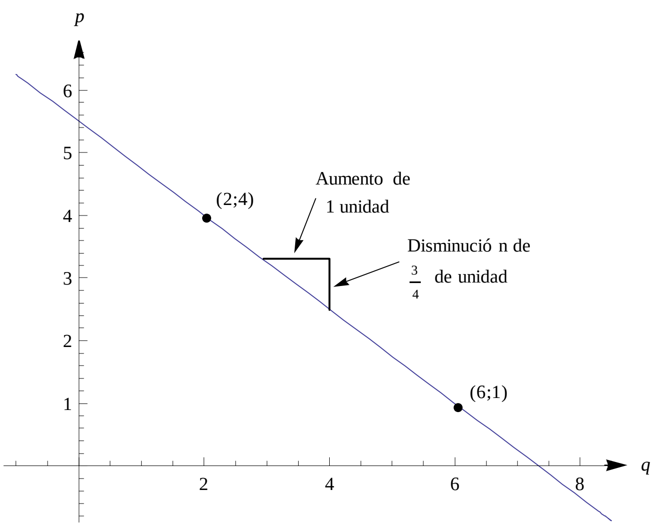


Figura 3.20 Interpretación geométrica de la pendiente de una recta

Solución

Se reemplazan en la fórmula de la pendiente los valores de x por los de q, y los de y por los de p. Se puede elegir cualquier punto de la figura como el $(q_1; p_1)$. Haciendo que $(2;4) = (q_1; p_1)$ y $(6;1) = (q_2; p_2)$, se tiene que:

$$m = \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1} = \frac{1-4}{6-2} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}.$$

La pendiente es negativa, $-\frac{3}{4}$. Esto significa que para cada aumento unitario en la cantidad (mil productos), se ocasiona una disminución en el precio de $\frac{3}{4}$ (unidades monetarias por producto). Debido a esta reducción, la recta desciende de izquierda a derecha.

Ejemplo 1.14 *Dado el triángulo ABC con* $A(-2;4), B(3;-2)$ *y* $C(1;6)$*, hallar:*

a)las ecuaciones de las mediatrices correspondientes a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.
b)el ángulo interior del vértice A.

Solución

Como la mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al segmento que pasa por su punto medio, se calculan los puntos medios de los segementos respectivos y las pendientes de las rectas perpendiculares, respectivas, obteniéndose:
$m_{AC} = \frac{2}{3}$, punto medio de $\overline{AC}$ $\left(-\frac{1}{2}; 5\right)$
Luego, la mediatriz de $\overline{AC}$:

$$y - 5 = \frac{-3}{2}(x + 1/2) \rightarrow 4y + 6x = 17$$

$m_{AB} = -\frac{6}{5}$, punto medio de $\overline{AB}$ $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$

Luego, la mediatriz de $\overline{AB}$:

$$y - 1 = 5/6(x - 1/2) \rightarrow 12y - 10x = 7$$

b)Ángulo α medido de $\overline{AB}$ a $\overline{AC}$:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{m_{AC} - m_{AB}}{1 + m_{AC}m_{AB}} = \frac{2/3 + 6/5}{1 + (2/3)(-6/5)} = \frac{28}{3} \\ \alpha &= \arctan(28/3). \end{aligned}$$

Ejemplo 1.15 *Considerar la siguiente figura en la que $\mathcal{L}_1$ es perpendicular a la recta $\mathcal{L}_2$ en el punto A, $\mathcal{L}_1$ es paralela a la recta $\mathcal{L}_3$ y en donde el punto A tiene coordenadas $(6;0)$.*

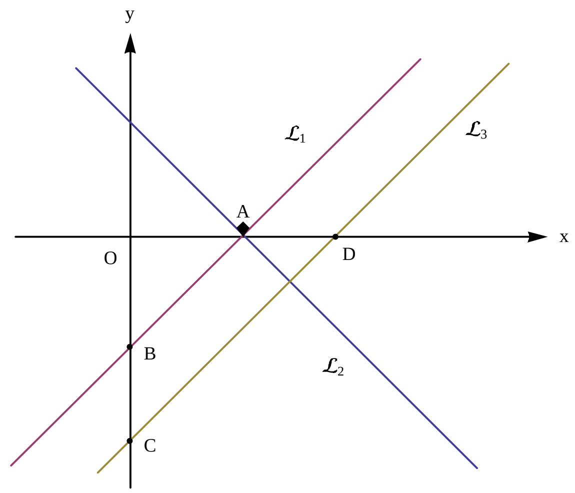


Figura 3.21 Ubicación de las tres rectas del enunciado del ejemplo

Si el área del triángulo AOB es 15u^2, hallar:
a)Las ecuaciones de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$.
b)La ecuación de la recta $\mathcal{L}_3$, sabiendo además que el área del trapecio $ABCD$ es 45u^2.

Solución
a) Si $B(0;b)$ entonces
área del triángulo $AOB = \frac{6(-b)}{2} = 15 \quad \rightarrow \quad b = -5$
Como $\mathcal{L}_1$ pasa por $(6;0)$ y por $(0;-5) \rightarrow \quad L_1$: $y = \frac{5}{6}x - 5$
Como $\mathcal{L}_2$ pasa por $(6;0)$ y es perpendicular a $\mathcal{L}_1$ entonces

$$\mathcal{L}_2 : y = -\frac{6}{5}x + \frac{36}{5}$$

b)Sea $C(0;\, c)$ y $D(d;0)$ entonces
área del triángulo $COD = 60 = \dfrac{d(-c)}{2}$
Además,

$$m_{\overline{DC}} = m_{\mathcal{L}_1} \Longrightarrow \frac{0 - c}{d - 0} = \frac{5}{6}$$

reemplazando se obtiene que $d = 12$ y $c = -10$.

Luego,

$$\mathcal{L}_3 : y = \frac{5}{6}x - 10.$$

Ejemplo 1.16 *Considerar el paralelogramo $ABCD$ con lados paralelos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ en el que se verifica que:*

i)El lado $\overline{AB}$ está contenido en la recta de ecuación $y = x + 2$.
ii)El lado $\overline{BC}$ está contenido en la recta de ecuación $y = (-1/2)x + 5$.
iii)La suma de las ordenadas en el origen de las ecuaciones de las rectas que contienen a los lados $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$ sea 4.
Encontrar la ecuación del lugar geométrico descrito por el vértice D.
Solución

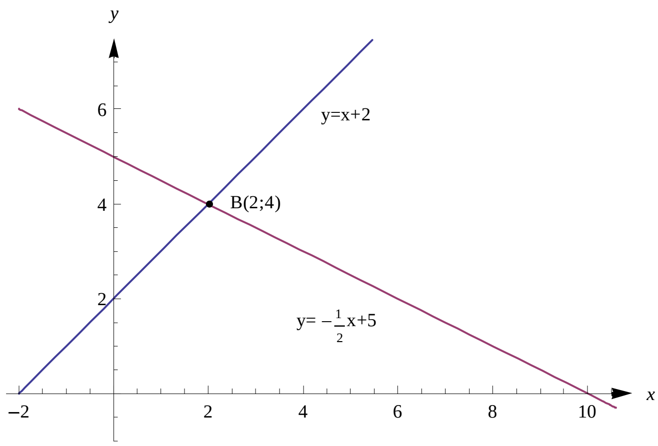


Figura 3.22 Ubicación de los datos del ejemplo

Primero graficar las dos rectas obtener las coordenadas del punto de intersección, $B(2;4)$:
Luego, ubicar en el plano el punto D de coordenadas (x; y) de modo que $\overline{DA}$ sea perpendicular a $\overline{DB}$.
Denotemos al vértice D por $(d_1; d_2)$, entoncese verifica que:
La recta $\overleftrightarrow{AD}$ tiene ecuación $y = (-1/2)x + m$
La recta $\overleftrightarrow{DC}$ tiene ecuación $y = x + n$
Como $(d_1; d_2)$ satisface ambas ecuaciones, se verifica que:

$$\begin{aligned} d_2 &= (-1/2)d_1 + m \\ d_2 &= d_1 + n \end{aligned}$$

Por dato, $m + n = 4$, entonces, sumando las ecuaciones anteriores y reemplazando se obtiene que:

$$2d_2 = (1/2)d_1 + 4.$$

Ejemplo 1.17 *Dados:*

el segmento $\overline{AD}$ donde $A(1;4)$ y $D(5;8)$,

la recta $\mathcal{L}_1$ que pasa por A y forma un ángulo de 45^0 con la recta (medido desde $\mathcal{L}_1$ hacia),

la recta $\mathcal{L}_2$ que pasa por B punto medio de $\overline{AD}$ y que forma un ángulo de 135^0 con la recta $\mathcal{L}_1$ (medido desde $\mathcal{L}_1$ hacia $\mathcal{L}_2$),

Hallar las ecuaciones de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$.

Solución

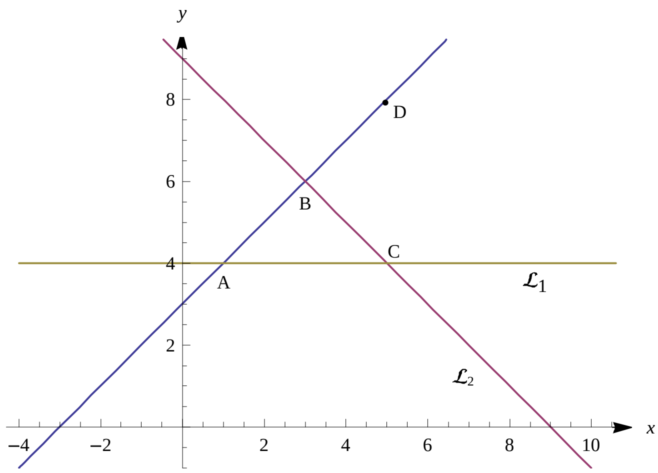


Figura 3.23 Ubicación de los datos del ejemplo

Ecuación de la recta que contiene al lado $\overline{AD}$:

$$y - 4 = \frac{8-4}{5-1}(x-1) \Longrightarrow y = x + 3$$

Como el ángulo entre $\mathcal{L}_1$ y $\overline{AD}$ es 45^0 y éste ha sido medido desde $\mathcal{L}_1$ hacia $\overline{AD}$:

$$\tan 45^0 = \frac{m_{AD} - m_{L_1}}{1 + m_{AD} m_{L_1}}$$

entonces $m_{\mathcal{L}_1} = 0$

Por lo tanto

$$\mathcal{L}_1 : y = 4.$$

Como el ángulo entre $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ medido desde $\mathcal{L}_1$ hacia $\mathcal{L}_2$ es135°, el ángulo medido desde $\mathcal{L}_2$ hacia $\mathcal{L}_1$ mide 45°.

$$\tan 45^{\circ} = \frac{m_{L_1} - m_{L_2}}{1 + m_{L_2} m_{L_1}}$$

entonces $m_{\mathcal{L}_2} = -1$. Por lo tanto,

$$\mathcal{L}_2 : y = -x + 9$$

Ejemplo 1.18 *Dos lados consecutivos de un rectángulo están contenidos en las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$. La ecuación de $\mathcal{L}_1$ es $2x - y + 1 = 0$ y $\mathcal{L}_2$ tiene ordenada en el origen igual a 1. Si uno de los vértices de dicho rectángulo es $A(7;0)$,*

a)hallar los otros vértices del rectángulo b)hallar el ángulo agudo formado por las diagonales del rectángulo.

Solución
a)

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 : 2x - y + 1 = 0 \\ \mathcal{L}_2 : y = -\frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$$

$C = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = (0; 1)$ es el vértice opuesto a A.
Sean $\mathcal{L}_3$ y $\mathcal{L}_4$ las rectas que contienen a los otros lados del rectángulo.
$\mathcal{L}_3$ tiene pendiente $m_3 = m_1 = 2$ y punto de paso $A(7, 0)$ entonces

$$\mathcal{L}_3 : y = 2(x - 7)$$

$\mathcal{L}_4$ tiene pendiente $m_4 = m_2 = -1/2$ y punto de paso $A(7, 0)$ entonces

$$\mathcal{L}_4 : y = -\frac{1}{2}(x - 7)$$

$B = \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_3$ y resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 1 \\ y = 2(x - 7) \end{cases}$$

se obtiene $B(6; -2)$
$D = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_4$ y resolviendo el sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ y = -\frac{1}{2}(x - 7) \end{cases}$$

se obtiene $D(1; 3)$
b) La pendiente de$\overline{BD}$ es -1
La pendiente de $\overline{AC}$ es $-1/7$
Sea α el ángulo agudo formado por las diagonales, aplicando la fórmula tenemos:

$$\tan\alpha = \frac{-1/7 - (-1)}{1 + (-1/7)(-1)} = 3/4$$

Por lo tanto $\alpha = \arctan(3/4)$

Ejemplo 1.19 *Desde el punto $Q(-1; -1)$ se trazan rectas L que cortan simultáneamente a las rectas*

$$\mathcal{L}_1 : 3x + 2y = 6, \mathcal{L}_2 : y = 3,$$

en los puntos A y B, respectivamente. Si M es el punto medio del segmento $\overline{AB}$, hallar la ecuación del lugar geométrico del punto M.

Solución 1
Como A pertenece a $\mathcal{L}_1$: $A\left(r; \frac{6-3r}{2}\right)$
Como B pertenece a $\mathcal{L}_2$: $B(s; 3)$
Como $M(x; y)$ es punto medio del segmento $\overline{AB}$, entonces

$$x = \frac{r + s}{2}, y = \frac{\frac{6-3r}{s} + 3}{2} \cdots (\divideontimes)$$

Se requiere otra relación entre r y s, entonces empleemos el hecho que A, B y Q están alineados:

$$m_{AQ} = m_{BQ} \Longrightarrow \frac{\frac{6-3r}{2}+1}{r+1} = \frac{3+1}{s+1},$$

de donde $s = \dfrac{11r}{8-3r}$

Regresando a (⋇):

$$2x = r+s, 4y = 12-3r$$

$$2x = r + \frac{11r}{8-3r}, r = \frac{12-4y}{3}$$

$$2x = \frac{19r-3r^2}{8-3r}$$

Reemplazando, se obtiene:

$$2x = \frac{(y-3)(4y+7)}{3(1-y)}$$

Solución 2

Sean $A = (r,s), B = (p,3)$ y $M = (x_o, y_o)$

$$L : y+1 = \left(\frac{y_o+1}{x_o+1}\right)(x+1)$$

Además A pertenece a la intersección de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}_1$

$$\begin{cases} 3r+2s = 6 \\ (yo+1)r - (xo+1)s = xo - yo \end{cases}$$

resolviendo

$$r = \frac{8x_o - 2y_o + 6}{3x_o + 2y_o + 5}, \quad s = \frac{-3x_o + 9y_o + 6}{3x_o + 2y_o + 5}$$

y como B pertenece a la intersección de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}_2$

$$4(xo+1) = (yo+1)(p+1)$$

de donde

$$p = \frac{4x_o - y_o + 3}{y_o + 1}$$

M punto medio.

Entonces

$$y_o = \frac{s+3}{2} = \frac{9y_o - 3x_o + 6 + 9x_o + 6y_o + 15}{6x_o + 4y_o + 10}$$

de donde operando y cambiando (xo, yo) por (x, y).

se tiene el LG pedido

$$6xy + 4y^2 - 5y - 6x - 21 = 0.$$

Ejemplo 1.20 *Dadas las rectas* $\mathcal{L}_1 : 38x - 41y + 199 = 0$ *y* $\mathcal{L}_2 : 2x + y + 1 = 0$,

a)Hallar la ecuación de la recta bisectriz L_3 del ángulo agudo formado por L_1 y L_2.

b)Por el punto $B(11;12)$ se traza la recta $\mathcal{L}_4$, perpendicular a $\mathcal{L}_3$. Hallar el perímetro del triángulo determinado por las rectas $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_4$.

Solución

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 38x - 41y = -199 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$$

obtenemos $A(-2;3)$

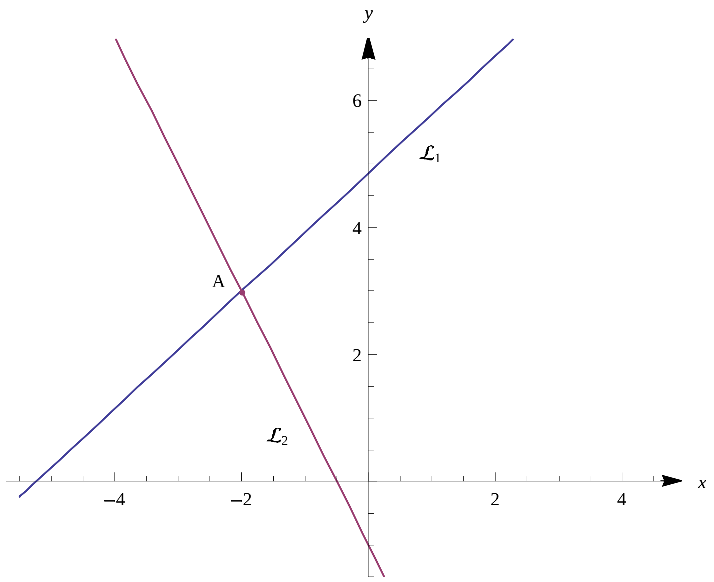


Figura 3.24 Ubicación de los datos del ejemplo

$$\frac{-2-m}{1-2m} = \frac{m - \frac{38}{41}}{1 + m\frac{38}{41}},$$

entonces

$$\frac{2+m}{2m-1} = \frac{41m - 38}{41 + 38m},$$

luego

$$22m^2 - 117m - 22 = 0,$$

al resolver la ecuación cuadrática $m = \frac{11}{2} \quad \vee \quad m = -\frac{2}{11}$
$m = \frac{11}{2}$ pues es de pendiente positiva.
La ecuación de la recta bisectriz es $L : 11x - 2y + 28 = 0$
La ecuación de

$$\mathcal{L}_4 : y - 12 = -\frac{2}{11}(x - 11)$$

Intersectando $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$: $A(-2;3)$
Intersectando $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_4$: $B(33/4;25/2)$
Intersectando $\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_4$: $C(-33/4;31/2)$.
Luego, el perímetro:

$$p = d(A;B) + d(A;C) + d(B;C)$$

donde
$d(A;B) = \sqrt{\left(\frac{33}{4}+2\right)^2 + \left(\frac{25}{2}-3\right)^2} = \frac{25}{4}\sqrt{5},$

$d(A;C) = \sqrt{\left(-\frac{33}{4}+2\right)^2 + \left(\frac{31}{4}-3\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{493}$
$d(B;C) = \sqrt{\left(-\frac{33}{4}-\frac{33}{4}\right)^2 + \left(\frac{31}{4}-\frac{25}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{4717}$
Por tanto,

$$p = \frac{25}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{493} + \frac{1}{4}\sqrt{4717}$$

1.3.8 Problemas propuestos

1)Los puntos $A(4;4), B(8;3)$ y $C(6;7)$ son los puntos medios de los lados $\overline{PR}$, $\overline{PQ}$,$\overline{QR}$ respectivamente, del triángulo PQR.

a)Hallar las coordenadas de los vértices P, Q y R.

b) Considerar que M, N y O son los puntos medios de los lados $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $\overline{AB}$ respectivamente, del triángulo ABC.

c)Demostrar que el perímetro del triángulo MNO es la cuarta parte del perímetro del triángulo PQR.

2)El punto $A(-4,5)$ es un vértice de un cuadrado una de cuyas diagonales está en la recta $\mathcal{L} : 7x - y + 8 = 0$. Hallar la ecuación de la segunda diagonal y los otros vértices del cuadrado.

3)Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $A(2;-1)$ y forman un ángulo $\theta = \arctan \frac{3}{4}$ con la recta que pasa por los puntos $B(-1;2)$ y $C(5;6)$.

4)En el triángulo ABC se conocen el vértice $A(-1,6)$ y las ecuaciones de la altura $3x + 2y = 0$ y de la mediana $x + y = 0$, trazadas desde otro vértice. Hallar las ecuaciones de los lados del triángulo.

5)El área del triángulo ABC es $10u^2$, la recta $\mathcal{L}_1 : 3x - y - 10 = 0$ contiene al lado $\overline{AC}$. El lado $\overline{AB}$ es perpendicular a la recta $\mathcal{L}_1$, donde $B(2,6)$.

a)Hallar los vértices A y C

b)Hallar el punto D, intersección de la recta $\overline{BC}$de pendiente positiva, con el eje X

c)Hallar la distancia del punto D a la recta $\overline{AB}$

6)Sea $ABCD$ un trapecio isósceles que cumple las tres condiciones siguientes:

i)la base menor $\overline{AB}$ está contenida en la recta $\mathcal{L}_1 : x - y + 6 = 0$, su punto medio está en el eje Y y la abscisa de B es 2;

ii)la base mayor $\overline{CD}$ está contenida en la recta $\mathcal{L}_2 : x - y - 2 = 0$;

iii)cada lado no paralelo del trapecio mide $\sqrt{34}$.

Hallar las ecuaciones de las rectas que contienen a los lados no paralelos del trapecio.

7)Dado el triángulo ABC con $A(-2;4), B(3;-2)$ y $C(1;6)$, hallar:

a)las ecuaciones de las mediatrices correspondientes a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

b)el ángulo interior del vértice A.

8)Hallar el área del triángulo ABC cuyos lados están contenidos en las rectas dadas:

$\overline{AB}$ está contenido en la recta $\mathcal{L}_1 : 2x + y - 13 = 0$.

$\overline{AC}$ está contenido en la recta perpendicular a la recta $5y = x$ que pasa por $(2;3)$.

$\overline{BC}$ está contenido en la recta paralela a la recta $5y = x$ que pasa por $(-3;2)$.

9)Los lados iguales de un triángulo isósceles ABC, con base $\overline{AB}$, miden $2\sqrt{10}$ y dos de sus vértices son A(-1; -1) y B(3; 3). Si C tiene abscisa negativa, hallar:

a)las coordenadas del vértice C.

b)la ecuación del lugar geométrico determinado por los puntos $P(x;\, y)$ cuya distancia al vértice C es igual a la distancia a la mediatriz de $\overline{AC}$.

10)Escribir la ecuación de las rectas $\mathcal{L}, m, n,$ y r indicadas en la figura.

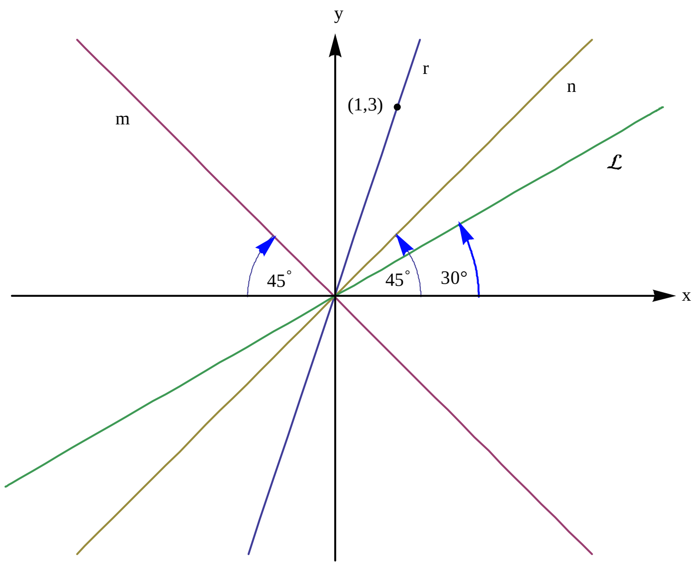


Figura 3.25 Rectas con un punto de paso común

11)Escribir la ecuación de las rectas $\mathcal{L}, m, n$ y r indicadas en la figura

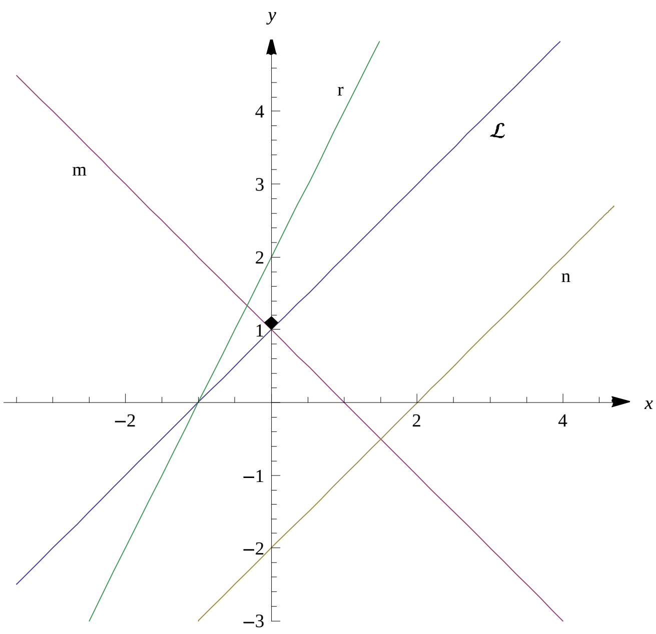


Figura 3.26 Rectas con distintos puntos de intersección

Cada una de las figuras geométricas que pueden obtenerse como la intersección de un cono circular recto de dos hojas con un plano, se llaman secciones cónicas o simplemente cónicas. Estas gráficas corresponden a lugares geométricos que tienen aplicaciones en distintas áreas.

En efecto, las cónicas son herramientas importantes para las investigaciones sobre el espacio exterior y para el estudio de las particulas atómicas. En la física se demuestra que si una partícula se mueve bajo la influencia de un campo de fuerza proporcional al inverso del cuadrado de la distancia, entonces su trayectoria puede describirse por medio de una curva cónica. Los campos gravitacional y electrostático son ejemplos de este tipo. Las orbitas de los planetas son elípticas. Si la elipse es muy "delgada" la curva semeja la trayectoria de un cometa. La trayectoria de una partícula alfa en el campo eléctrico de un núcleo atómico puede ser descrita por una hipérbola.

En las siguientes secciones estudiaremos las cónicas con detalle.

1.4 La circunferencia

La *circunferencia* $\mathcal{C}$ es el conjunto de puntos de un plano que dista una distancia fija r de un punto fijo $C(h;\ k)$. El punto dado se llama el *centro* de la circunferencia y la distancia constante el *radio*.

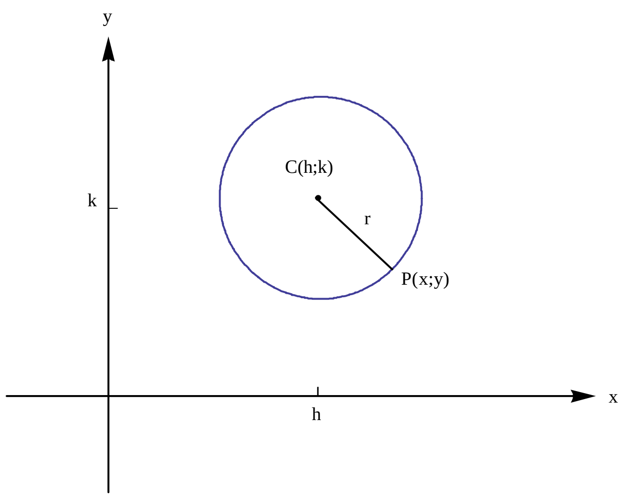


Figura 3.27 Conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo

-

Para el caso particular en que el centro es el origen de coordenadas $(0;0)$, la ecuación toma la forma:

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

que es conocida como la *forma canónica* de la ecuación de la circunferencia.

Observaciones:

a)Si se desarrolla la ecuación de la circunferencia

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

se obtiene:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \cdots (*)$$

donde:

$$\begin{cases} D = -2h, \\ E = -2k, \\ F = h^2 + k^2 - r^2. \end{cases}$$

Por lo tanto, la ecuación de cualquier circunferencia puede escribirse en la forma $(*)$, llamada *forma general* de la ecuación de la circunferencia.

b)Dada la ecuación

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

agrupando téminos resulta:

$$\left(x^2 + Dx\right) + \left(y^2 + Ey\right) = -F$$

Y completando cuadrados en las variables x e y, tenemos:

$$\left(x^2 + Dx + \frac{D^2}{4}\right) + \left(y^2 + Ey + \frac{E^2}{4}\right) = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

de donde

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}. \cdots (**)$$

Del valor del segundo miembro de $(**)$ depende el que $(**)$ corresponda o no a la ecuación de una circunferencia.

Hay tres casos a considerar:

Caso 1. Si $D^2 + E^2 - 4F > 0$, entonces $(**)$ representa una circunferencia con centro $C(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$ y radio $r = \frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$.

Caso 2. Si $D^2 + E^2 - 4F = 0$, entonces la ecuación $(**)$ representa un sólo punto de coordenadas $C(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$.

Caso 3. Si $D^2 + E^2 - 4F < 0$, la ecuación $(**)$ no representa, en este caso, a ningún punto del plano. Su gráfica es el vacío.

Ejemplo 1.21 *Dadas las rectas $L_1 : x - 2y - 1 = 0$ y $L_2 : 2x - y - 1 = 0$, hallar la ecuación de la circunferencia de radio 2 que pasa por el punto $\left(\frac{14}{3}; 2\right)$ y cuyo centro se encuentra en la bisectriz del ángulo que forman las rectas L_1 y L_2.*

Solución

Sea $C(h; k)$ el centro de la circunferencia

$$\mathcal{C} : (x - h)^2 + (y - k)^2 = 4$$

Como C está en la bisectriz entonces

$$\begin{aligned} d(C; \mathcal{L}_1) &= d(C; \mathcal{L}_2) \\ \frac{|h - 2k - 1|}{\sqrt{5}} &= \frac{|2h - k - 1|}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

entonces $k = -h \vee k = h - 2/3$

De las dos opciones elegimos $k = h - 2/3$ pues para $k = -h$ al tener h y k distinto signo, no es posible que disten 2 unidades del punto $(14/3; 2)$.

Luego

$$\begin{aligned}(x-h)^2 + (y-h+2/3)^2 &= 4\\ (14/3-h)^2 + (2-h+2/3)^2 &= 4\end{aligned}$$

de donde $h = 2$ y $h = 14/3$

$k = 4/3$ y $k = 4$,

entonces las circunferencias son:

$$\mathcal{C} : (x-2)^2 + (y-4/3)^2 = 4,\ \mathcal{C}' :\ (x-14/3)^2 + (y-4)^2 = 4$$

1.4.1 Elementos de la circunferencia

Existen varias rectas y puntos especiales en la circunferencia.

Un segmento que une dos puntos de la circunferencia se llama cuerda.

A las cuerdas de longitud máxima (aquellas que pasan por el centro) se les llama diámetros.

Se conoce como radio del círculo a cualquier segmento que une el centro con la circunferencia, así como a la longitud de los mismos.

Una recta que atraviesa la circunferencia, cortándola en dos puntos, se le llama secante, mientras que una recta que toca a la circunferencia en un sólo punto se denomina tangente. El punto de contacto de la tangente con la circunferencia se llama punto de tangencia. El radio que une el centro con el punto de tangencia es perpendicular a la tangente.

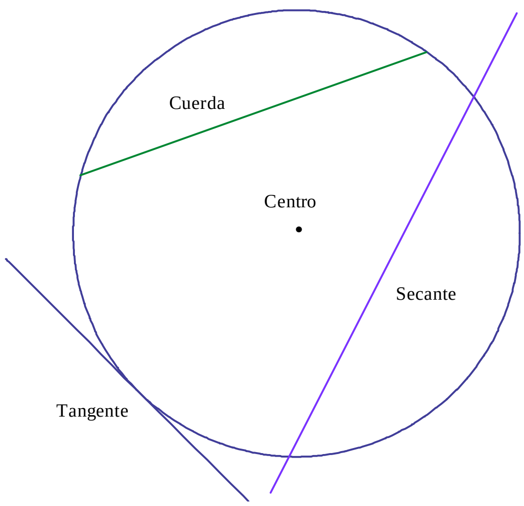


Figura 3.28 Elementos de una circunferencia

Recta tangente a una circunferencia

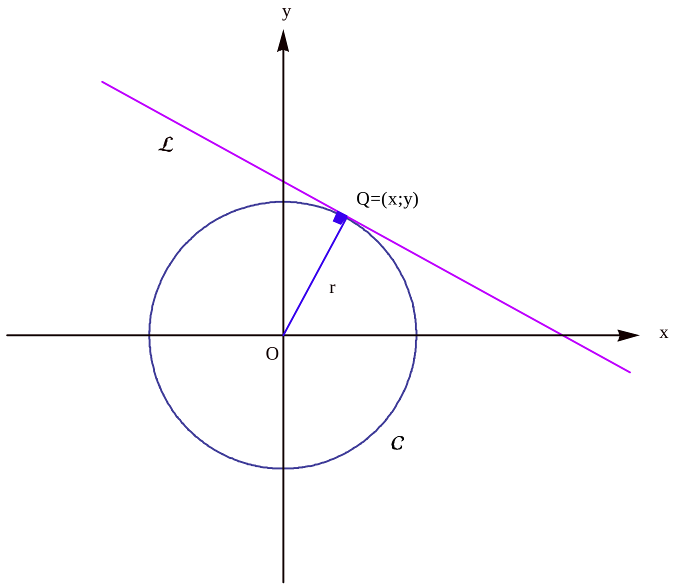


Figura 3.29 Recta tangente en el punto Q

Como se mencionó anteriormente, la *recta tangente a la circunferencia* $\mathcal{C}$ *en el punto* Q es aquella recta que interseca a la circunferencia $\mathcal{C}$ solo en el punto Q (llamado *punto de tangencia*).

Existe un método, llamado el método del discriminante, que se usa para determinar si una recta $\mathcal{L}$ de ecuación :

$$Ax + By + C = 0 \cdots (1)$$

es tangente a una circunferencia $\mathcal{C}$,

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \cdots (2)$$

Este consiste en resolver simultáneamente las ecuaciones (1) y (2) y determinar sus soluciones que serán a la vez las coordenadas de los puntos que pertencen simultáneamente a $\mathcal{C}$ y a $\mathcal{L}$.

Así, si de (1) se despeja y en términos de x,se obtiene :

$$y = mx + d,$$

y se reemplaza en (2), se tiene

$$x^2 + (mx + d)^2 + Dx + E(mx + d) + F = 0$$

desarrollando y agrupando se obtiene

$$\left(1 + m^2\right)x^2 + (D + 2dm + mE)x + F + bE + d^2 = 0$$

Expresión que es de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

y cuyas raices están dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La naturaleza de las raíces depende de la expresión denominada discriminante:

$$\triangle = b^2 - 4ac$$

a)Si $\triangle = b^2 - 4ac < 0$, entonces las raíces no son reales, es decir, no existe intersección entre la recta y la circunferencia.

b)Si $\triangle = b^2 - 4ac > 0$, entonces las raíces son reales y diferentes, es decir, existen dos puntos de intersección entre la recta y la circunferencia. Por lo tanto la recta $\mathcal{L}$ es una recta *secante.*

c)Si $\triangle = b^2 - 4ac = 0$, entonces existe un único punto de intersección entre la recta y la circunferencia. Luego, la recta es *tangente.*

Ejemplo 1.22 *La circunferencia $\mathcal{C}$ es tangente a la recta $\mathcal{L}$: $x+y+10=0$ y pasa por los puntos de intersección de las circunferencias $\mathcal{C}_1 : x^2+7y+y^2 = 11$ y $\mathcal{C}_2 : 2x^2+2y^2-8y = 0$. Hallar la ecuación de la circunferencia $\mathcal{C}$.*

Solución

En primer lugar se determina la intersección de $\mathcal{C}_1$y $\mathcal{C}_2$: $A\left(-\sqrt{3};1\right)$ y $B\left(\sqrt{3};1\right)$.

Si $Q(h;k)$ y r son el centro y el radio de la circunferencia $\mathcal{C}$, respectivamente, como Q pertenece a la mediatríz del segmento $\overline{AB}$, entonces $h = 0$.

$$\mathcal{C} : x^2 + (y-k)^2 = r^2.$$

Calculamos la distancia del centro $Q(0;k)$ a la recta $\mathcal{L} : x+y+10 = 0$:

$$r = \frac{|k+10|}{\sqrt{2}},$$

Elevando al cuadrado y simplificando se obtiene

$$k^2 + 20k + 100 - 2r^2 = 0.\dots\dots\dots(*)$$

Por otro lado, $B\left(\sqrt{3};1\right)$ pertenece a la circunferencia, entonces

$$(\sqrt{3}-h)^2 + (1-k)^2 = r^2,$$

y simplificando

$$k^2 - 2k + 4 = r^2.\dots\dots\dots\dots\dots\dots(**)$$

De $(*)$ y $(**)$ operando y simplificando se obtiene:

$$k = 12 + 2\sqrt{59} \vee \quad k = 12 - 2\sqrt{59}.$$

Como k es negativo, $k = 12 - 2\sqrt{59}$.

Reemplazando en $(**)$se tiene que: $r^2 = 360 - 44\sqrt{59}$.

Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia $\mathcal{C}$ será:

$$C : x^2 + (y - 12 + 2\sqrt{59})^2 = 360 - 44\sqrt{59}.$$

Ejemplo 1.23 *Dadas las rectas $\mathcal{L}_1 : x - 2y - 1 = 0$ y $\mathcal{L}_2 : 2x - y - 1 = 0$, hallar la ecuación de la circunferencia de radio 2 que pasa por el punto $(14/3;2)$ y cuyo centro se encuentra en la bisectriz del ángulo que forman las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$.*

Solución

Sea $C(h;\, k)$ el centro de dicha circunferencia, entonces debe cumplirse que:

$$d(C; ejeX) = d(C; ejeY) = d(C; P)$$

Como la circunferencia se encuentra en el primer cuadrante,

$$k = h = \sqrt{(h-3)^2 + (k-6)^2}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtienen dos soluciones: $h = 15$ ó $h = 3$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &: (x-15)^2 + (y-15)^2 = 15^2 \\ \mathcal{C}_2 &: (x-3)^2 + (y-3)^2 = 3^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.24 *Respecto a una circunferencia $\mathcal{C}$ se sabe lo siguiente:*

i)Su centro está en la recta $\mathcal{L}_1$, tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $P(3; 4)$.

ii)Su radio es 5.

iii)Es tangente a la recta $\mathcal{L}_2 : 3x - 4y - 42 = 0$

Hallar la ecuación de $\mathcal{C}$ (dar todas las posibles soluciones).

Solución

La pendiente de $\mathcal{L}_1$ es $-3/4$, puesto que $\mathcal{L}_1$ es perpendicular a la recta que contiene el radio $\overline{OP}$, siendo $O = (0; 0)$

Luego:

$$\mathcal{L}_1 : y - 4 = -\frac{3}{4}(x-3) \rightarrow \mathcal{L}_1 : y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$$

Sea $C = (h; k)$ el centro de C :

$$C \in \mathcal{L}_1 \rightarrow k = -\frac{3}{4}h + \frac{25}{4} \rightarrow C = \left(h, \frac{25-3h}{4}\right)$$

$$d(C, \mathcal{L}_2) = 5 \rightarrow \frac{|3h - 4k - 42|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 5 \rightarrow \frac{\left|3h - 4\left(\frac{25-3h}{4}\right) - 42\right|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 5$$

$\rightarrow |6h - 67| = 25 \rightarrow (6h - 67 = 25$ ó $6h - 67 = -25)$

$\rightarrow h = \frac{46}{3}$ ó $h = 7$

Y las posibles circunferencias serían:

$$h = \frac{46}{3} \rightarrow k = -\frac{21}{4} \rightarrow \mathcal{C}_1 : \left(x - \frac{46}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{21}{4}\right)^2 = 25$$

y

$$h = 7 \rightarrow k = 1 \rightarrow \mathcal{C}_2 : (x-7)^2 + (y-1)^2 = 25$$

Ejemplo 1.25 *Sea $M(1; 5)$ el punto medio de la cuerda $\overline{AB}$ de la circunferencia $\mathcal{C}$ cuya ecuación es $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 - 4x - 12y + 20 = 0$.*

a)Determinar las coordenadas de A y B.

b)Determinar las coordenadas del punto D, de ordenada mayor que 2 y que es punto de intersección de la circunferencia $\mathcal{C}$ con el eje Y.

c)Hallar el área del triángulo ABD.

Solución

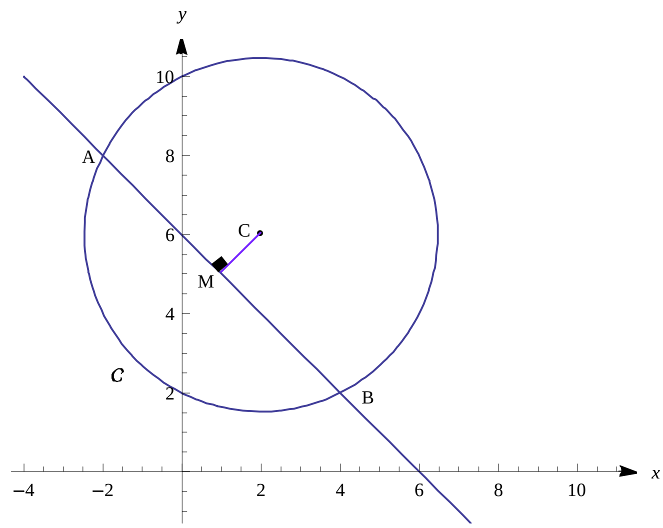


Figura 3.30 Ubicación de los datos del ejemplo

Completando cuadrados se obtiene:

$$\mathcal{C} : (x-2)^2 + (y-6)^2 = 20.$$

Sea $\mathcal{L}_{AB}$ la recta que contiene a la cuerda $\overline{AB}$ que pasa por $M(1;5)$ y es perpendicular al segmento que une el centro de $\mathcal{C}$ con el punto M

$$\mathcal{L}_{AB} : y - 5 = -(x-1) \Longrightarrow y = -x + 6...(1)$$

Los extremos de la cuerda $\overline{AB}$, A y Bse hallan en la intersección de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{L}_{AB}$.

$$(x-2)^2 + (-x+6-6)^2 = 20 \Longrightarrow (x-2)^2 + x^2 = 0.$$

Desarrollando: $x^2 - 2x - 8 = 0$.
$x = 4$ o $x = -2$ en (1)
$A(4;2)$ y $B(-2;8)$.
El punto $D : x = 0 \to 4 + (y-6)^2 = 20 \to y = 2$(no de considera por dato) ó $y = 10$

$$D\,(0;10)\,.$$

Base del triángulo ABD : Longitud de $\overline{AB} = 6\sqrt{2}$
Altura del triángulo ABD :

$$d(D;\mathcal{L}_{AB}) = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

Por lo tanto el área pedida es: 12 u^2.

Ejemplo 1.26 *La recta* $\mathcal{L}_1 : 2x + \sqrt{5}y - 5 = 0$ *es paralela a una recta tangente a la circunferencia* $\mathcal{C}$ *de centro* $(2;-5)$. *Además se sabe que* $\mathcal{L}_1$ *dista de dicha recta tangente en* $\frac{5\sqrt{5}-8}{3}$ *unidades.*

a) Hallar la ecuación de la circunferencia $\mathcal{C}$ (dar todas las soluciones).

b) Bosquejar la circunferencia y su recta tangente para las soluciones encontradas en a).

Solución

Sea $\mathcal{L}$ la recta tangente a la circunferencia $\mathcal{C}$, con ordenada en el origen b.

Como $\mathcal{L}_1//\mathcal{L}$ entonces $\mathcal{L}$: $-\frac{2\sqrt{5}}{5}x - y + b = 0$.

$d(\mathcal{L}_1;\mathcal{L}) = d(P_1;\mathcal{L}) = \frac{5\sqrt{5}-8}{3}$, donde $P_1 = (5/2;0) \in \mathcal{L}_1$.

Entonces

$$\frac{\left|-\sqrt{5}+b\right|}{\sqrt{9/5}} = \frac{5\sqrt{5}-8}{3},$$

de donde $b = 5 - \frac{3\sqrt{5}}{5} \quad \vee\ b = \frac{13\sqrt{5}}{5} - 5$.

Caso I: Si $b = 5 - \frac{3\sqrt{5}}{5}$ entonces

$$r = d((2:-5);\mathcal{L}) = \frac{10\sqrt{5}-7}{3}.$$

Ecuación de $\mathcal{C}$: $(x-2)^2 + (y+5)^2 = \left(\frac{10\sqrt{5}-7}{3}\right)^2$

Caso II: Si $b = \frac{13\sqrt{5}}{5} - 5$ entonces

$$r = d((2:-5);\mathcal{L}) = 3$$

Ecuación de

$$\mathcal{C} : (x-2)^2 + (y+5)^2 = 9.$$

b)

Para el caso I:

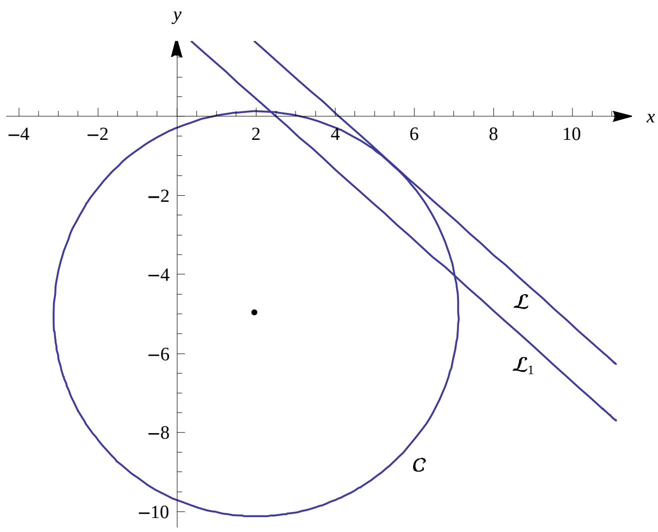


Figura 3.31 Caso cuando $b = 5 - \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

Para el caso II:

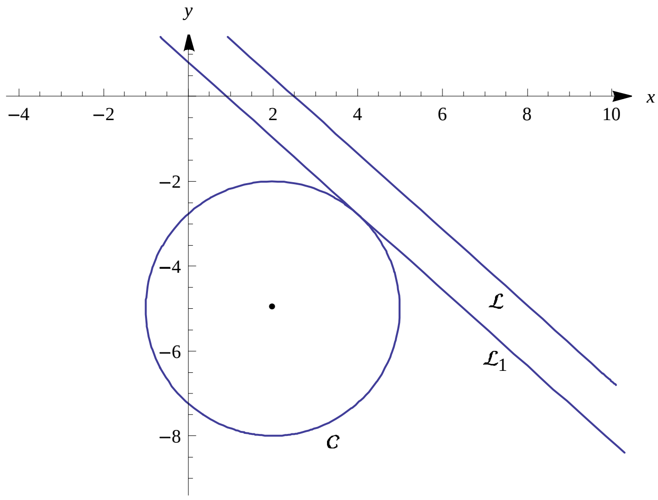


Figura 3.32 Caso cuando $b = \dfrac{13\sqrt{5}}{5} - 5$

Ejemplo 1.27 *La recta $\mathcal{L} : y = mx + b$, con $m < 0$, es tangente a las circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, donde $\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 = \frac{64}{5}$ y el centro de $\mathcal{C}_2$ se ubica en el punto $(8; 0)$. Si se sabe que $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ no son secantes y que la menor distancia entre $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ es $\frac{40-16\sqrt{5}}{5}$ unidades:*

a)Hallar la ecuación de $\mathcal{C}_2$.
b)Determinar la ecuación de $\mathcal{L}$.
c)Hallar la intersección de $\mathcal{L}$ con la circunferencia $\mathcal{C}_1$.

Solución
a) Si d es la distancia más corta entre $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, con radios respectivos r_1 y r_2 entonces:

$$r_1 + d + r_2 = d((0; 0), (8; 0))$$

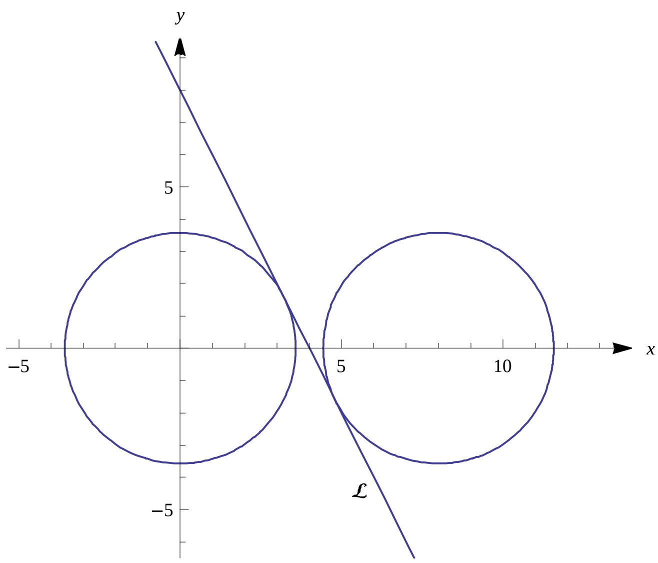


Figura 3.33 Ubicación de los datos del ejemplo

$$\frac{8}{\sqrt{5}} + \frac{40-16\sqrt{5}}{5} + r_2 = 8$$
de donde $r_2 = \frac{8}{\sqrt{5}}$

Luego:

$$\mathcal{C}_2: \ (x-8)^2 + y^2 = \frac{64}{5}$$

b)Si $\mathcal{L}: mx - y + b = 0$, entonces usando $d(C, \mathcal{L}) = r$:

$$\frac{|b|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{8}{\sqrt{5}} \quad \text{y} \quad \frac{|8m+b|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

Igualando queda

$$|b| = |8m + b|$$

De donde : $m = 0$ (descartado pues la recta no es horizontal) ó $b = -4m$.

Reemplazando en la primera ecuación:

$$\frac{|-4m|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

y resolviendola se obtiene: $m = -2$ ó $m = 2$ (descartado).
Luego: $m = -2$ y $b = 8$. Es decir, $\mathcal{L}: y = -2x + 8$

c)Sea

$$Q \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{L}: \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{64}{5} \\ y = -x + 8 \end{cases}$$

Para resolver el sistema, se reemplaza la segunda ecuación en la primera:

$$\begin{aligned} x^2 + (8-2x)^2 &= \frac{64}{5} \rightarrow 25x^2 - 160x + 256 = 0 \\ (5x-16)^2 &= 0 \rightarrow x = \frac{16}{5}, \ y = \frac{8}{5} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $Q\left(\frac{16}{5}; \frac{8}{5}\right)$.

Ejemplo 1.28 *Por un punto T de la circunferencia $\mathcal{C}: x^2 - 6x + y^2 + 5 = 0$ se traza la recta tangente $\mathcal{L}_1$, luego la recta $\mathcal{L}_2$, paralela a $\mathcal{L}_1$, que dista de ella en 2 unidades y que no corta a la circunferencia C. Si D es el punto de intersección de $\mathcal{L}_2$ con la recta perpendicular a $\mathcal{L}_1$que pasa por T y T se desplaza sobre $\mathcal{C}$,*

a)Hacer un esbozo de la situación descrita.
b)Hallar la ecuación del lugar geométrico descrito por el baricentro del triángulo TDH, siendo $H(-6; 9)$.
c)Graficar el lugar geométrico obtenido en b).

Solución
De $x^2 - 6x + y^2 + 5 = 0$ entonces

$$(x-3)^2 + y^2 = 4.$$

Para un punto $T(x_0; y_0)$ arbitrario, graficamos $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{L}_2$ y la recta que pasa por T y el centro de $\mathcal{C}$, $\mathcal{L}$.

Si $T(x_0; y_0)$ está en C, entonces

$$\mathcal{C}: (x_0-3)^2 + y_0^2 = 4....(1)$$

La pendiente de $\mathcal{L}: m = \frac{y_0}{x_0-3}$.

Si $D(x_1; y_1)$ entonces T es punto medio de c y D, por lo tanto, $x_0 = \frac{x_1+3}{2}$; $y_0 = \frac{y_1}{2}$, esto implica que

$$D(2x_0-3; 2y_0).$$

Las coordenadas del baricentro del triángulo TDG, $B(x;y) = B(x_0-3; y_0+3)$, despejando y reemplazando en (1);

$$\mathcal{C}: x^2 + (y-3)^2 = 4$$

otra circunferencia.

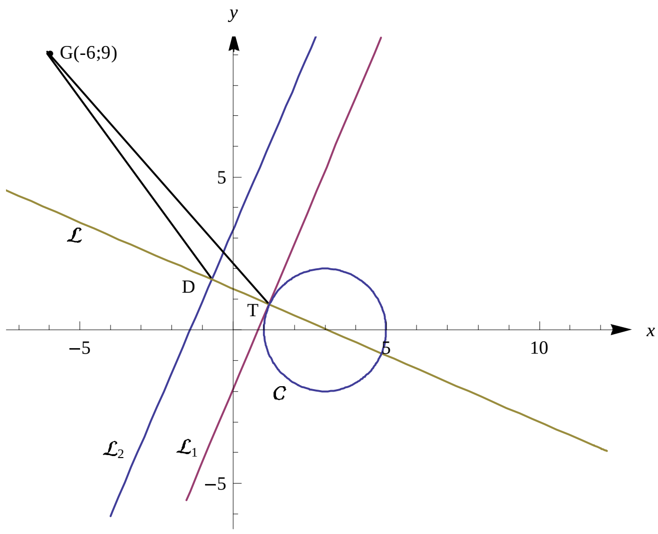


Figura 3.34 Ubicación del lugar gométrico descrito por B

Ejemplo 1.29 *Dadas las circunferencias*

$$\mathcal{C}_1: x^2 + y^2 + 4x - 4y - 5 = 0 \quad y \quad \mathcal{C}_2: x^2 + y^2 - 10x + 10y + 9 = 0$$

a)Hallar la ecuación del eje radical de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, teniendo en cuenta que el eje radical de dos circunferencias es la recta que pasa por los puntos de intersección, si existen, de estas.

b)Hallar la ecuación de la circunferencia $\mathcal{C}$ cuyo centro se encuentra en la recta $\mathcal{L}$: $2x + y - 14 = 0$ y pasa por los puntos comunes a $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$.

Solución

a)Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las dos circunferencias, se obtiene $x = y + 1$.

Y reemplazando se tiene que: $A(1; 0)$ y $B(0; -1)$.

Luego, la ecuación del eje radical será: $y = x - 1$

b)El centro C dela circunfererncia $\mathcal{C}$ debe estar en la recta $\mathcal{L}: k = 14-2h$ y planteando

$$d(C; A) = d(C; B)$$

se obtiene $h = 14$.

Luego el centro es $C(14; -14)$ y

$$\mathcal{C} : (x - 14)^2 + (y + 14)^2 = 365$$

1.4.2 Problemas propuestos

1) Una circunferencia pasa por los puntos $A\,(-5; 1)$, $B\,(-2; 4)$ y $C\,(1; 1)$. Hallar

a) el centro y radio de la circunferencia,

b) los puntos de intersección con los ejes coordenados.

2) Hallar el valor de k para que la ecuación

$$x^2 + y^2 - 8x + 10y + k = 0$$

represente a una circunferencia de radio 6.

a) Trazar la gráfica de esta circunferencia.

b) Hallar los puntos de intersección de esta circunferencia con el eje de ordenadas.

c) Establecer el intervalo de números reales que recorre x y el intervalo de números reales que recorre y.

3) Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(2; 0)$, $B(0; 2)$ y es tangente a la recta $\mathcal{L} : x + y = 6$.

4) Dos circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son concéntricas y el radio de $\mathcal{C}_1$ es $3\sqrt{5}u$; además la recta tangente a $\mathcal{C}_1$, corta a $\mathcal{C}_2$ en los puntos $A(8, -10)$ y $B(12; -2)$. Encontrar las ecuaciones de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ de manera que la abscisa del centro de $\mathcal{C}_1$ sea menor que 10.

5)Los vértices de un cuadrado están sobre la rectas $\mathcal{L}_1 : x-7y+35 = 0$, $\mathcal{L}_2 : x-7y-15 = 0$, $\mathcal{L}_3 : 7x+y-5 = 0$, $\mathcal{L}_4 : 7x+y-55 = 0$, hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al cuadrado.

6) La circunferencia $\mathcal{C}_1$ tiene centro en el origen y la circunferencia $\mathcal{C}_2$ tiene radio 5 y centro en el eje X .

La recta $\mathcal{L}$ es tangente a ambas circunferencias, a $\mathcal{C}_1$ en el punto A y a $\mathcal{C}_2$ en el punto $B(8; 4)$.

Determinar:

a)La ecuación de la circunferencia $\mathcal{C}_2$.

b)La ecuación de la recta $\mathcal{L}$.

c)El punto de tangencia A y la ecuación de la circunferencia $\mathcal{C}_1$.

7) Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $P(3, 6)$ y es tangente a los ejes coordenados.

8) Dada la circunferencia $\mathcal{C}$:$x^2 + (y - 2)^2 = 4$, determinar la ecuación que contiene al lugar geométrico del baricentro del triangulo RST, si:

a)R es el centro de la circunferencia $\mathcal{C}$, y

b)la recta que contiene a $\overline{ST}$ es tangente a la circunferencia $\mathcal{C}$ en el punto T y corta al eje de las abscisas en S.

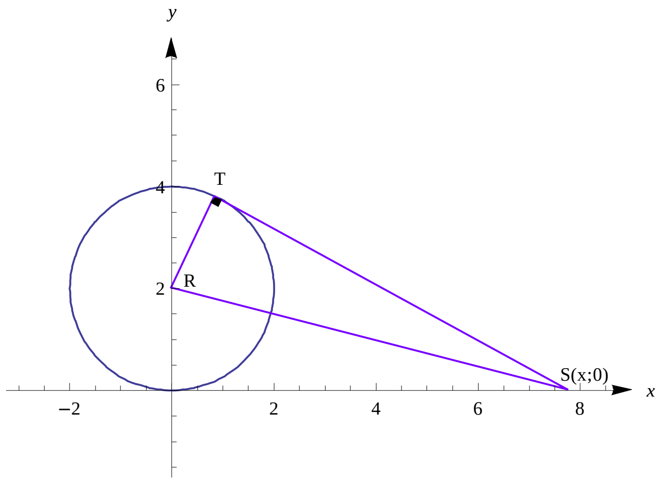


Figura 3.35 Una posible ubicasción del punto T

1.5 La parábola

Una *parábola* $\mathcal{P}$ es el conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto fijo F y una recta fija $\mathcal{D}$.

Así, $\mathcal{P} = \left\{P \in R^2 : d\,(P;F) = d\,(P;\mathcal{D})\right\}$

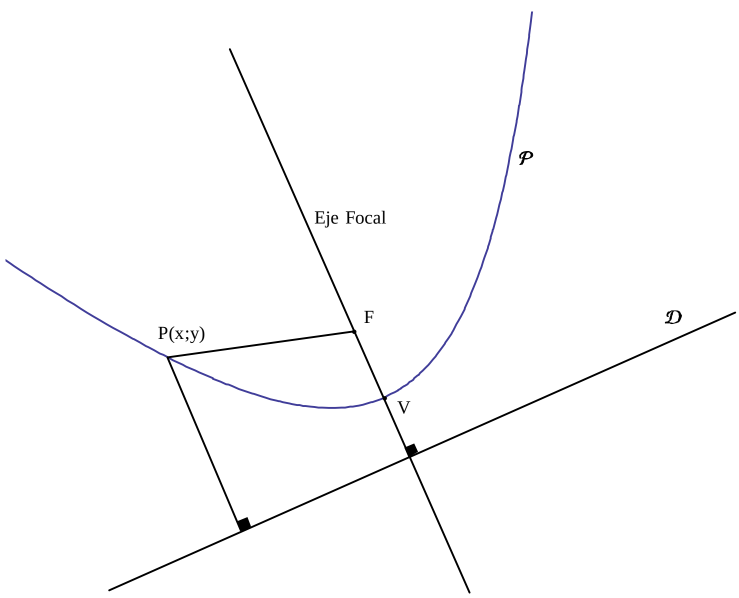


Figura 3.36 Elementos generadores de una parábola

1.5.1 Elementos de la parábola

Los principales elementos de la parábola son:

Foco: Punto fijo.F

Directriz: recta fija $\mathcal{D}$

Eje focal: recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz.

Vértice: punto de intersección de la parábola con el eje focal.

Cuerda: segmento que une dos puntos arbitrarios de la parábola
Lado recto: segmento cuyos extremos se encuentran en la parábola y es perpendicular al eje focal.

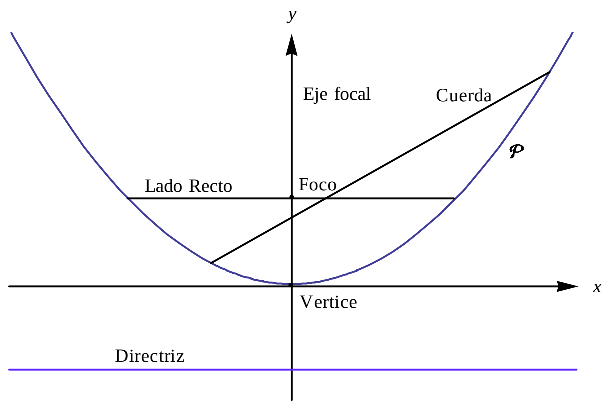


Figura 3.37 Elementos de una parábola

Propiedad
La longitud del lado recto de una parábola es cuatro veces la la distancia del vértice al foco de dicha parábola.
Así, si $|p| = d(V;F)$ entonces longiutd del lado recto=4 $|p|$.

1.5.2 Ecuación de la parábola con directriz paralela a un eje coordenado

a) Parábola con directriz horizontal

Aplicando la definición de parábola para el caso en el que el vértice es el punto $V(h;k)$, el eje focal es $x = h$ y su directriz es la recta $y = k - p$,

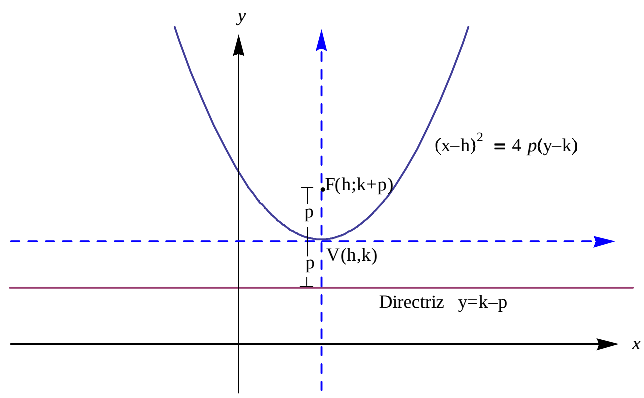


Figura 3.38 Parábola con directriz horizontal

se obtiene que la ecuación de la parábola es:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k).$$

b) Parábola con directriz vertical

Aplicando la definición de parábola para el caso en el que el vértice es el punto $V(h;k)$, el eje focal es $y = k$ y su directriz es la recta $x = h - p$,

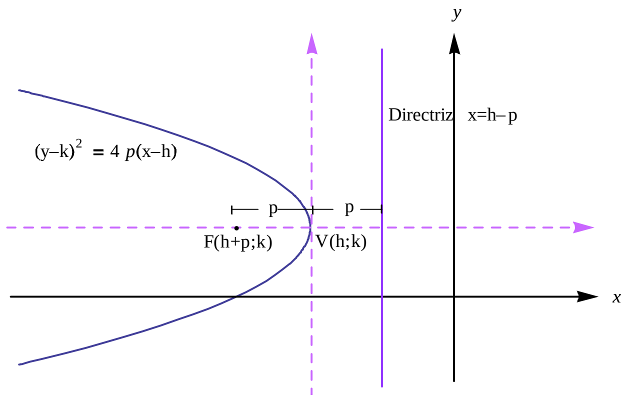


Figura 3.39 Parábola con directriz vertical

se obtiene que la ecuación de la parábola es:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Observaciones

i) El número real p distinto de cero, es el parámetro y en valor absoluto representa la distancia del vértice V al foco F.

ii) Para el caso a) :

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Si $p > 0$, entonces $y \geqslant k$. Luego, la gráfica estará formada por puntos cuya ordenada es mayor que la ordenada del vértice. En ese caso se dice que "La parábola se abre hacia arriba".

Si $p < 0$, entonces $y \leq k$. Luego, la gráfica estará formada por puntos cuya ordenada es menor que la ordenada del vértice. En ese caso se dice que "La parábola se abre hacia abajo".

iii) Para el caso b) :

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Si $p > 0$, entonces $x \geqslant h$. Luego, la gráfica estará formada por puntos cuya abscisa es mayor que la abscisa del vértice. En ese caso se dice que "La parábola se abre hacia la derecha".

Si $p < 0$, entonces $x \leq h$. Luego, la gráfica estará formada por puntos cuya abscisa es menor que la abscisa del vértice. En ese caso se dice que "La parábola se abre hacia la izquierda".

Ejemplo 1.30 *Sean las parábolas $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$, los puntos $A(-22;22)$ y $B(18;22)$. Se verifica que ambos puntos pertenecen a las dos parábolas y que dichas parábolas también tienen la misma directriz horizontal que corta al eje Y en un punto de ordenada negativa. Si además se sabe que la distancia entre los focos de estas dos parábolas es 30 unidades.*

a)Expresar las coordenadas de los focos de $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ en términos de una sola variable.
b)Hallar las ecuaciones de $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$.
c)Graficar $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ en un mismo sistema de coordenadas cartesianas, señalando las coordenadas de sus vértices y focos.

Solución
a) Sea la directriz común $\mathcal{D} : y = b$, F_1: Foco 1, F_2: Foco 2.
Como las ordenadas de A y B son iguales entonces el eje focal $\mathcal{L}$ es mediatriz del segmento $\overline{AB}$. Luego $\mathcal{L} : x = -2$.
La abscisa de cada foco es -2 y como la distancia entre los focos es 30 entonces las coordenadas de los focos son: $F_1(-2;a)$ y $F_2(-2;a+30)$.
b)

$$\begin{aligned} d(A;F_1) &= d(A;F_2) \\ \sqrt{(-22+2)^2+(22-a)^2} &= \sqrt{(-22+2)^2+(22-(a+30))^2} \\ \sqrt{a^2-44a+884} &= \sqrt{16a+a^2+464} \\ a^2-44a+884 &= 16a+a^2+464, \end{aligned}$$

entonces $a = 7$.
Como :

$$d(A;\mathcal{D}) = d(A;F_1),$$

entonces

$$|b-22| = \sqrt{(22-7)^2+(18+2)^2} = 25,$$

luego $b = -3$.
(se descarta $b = 47$ por condición de la directriz).
Intersecando el eje focal y la directriz se obtiene el punto $E(-2;-3)$.
Hallando la ecuación de la parábola de foco F_1:
El vértice V_1 es punto medio del segmento $\overline{EF_1}$,entonces $V_1 = (-2;2)$.Así,

$$d(V_1;F_1) = 5.$$

Ecuación de la parábola:

$$\mathcal{P} : (x+2)^2 = 20(y-2).$$

Hallando la ecuación de la parábola de foco F_2:
El vértice V_2 es punto medio del segmento $\overline{EF_2}$, $V_2 = (-2;17)$.Así,

$$d(V_2;F_2) = 20$$

Ecuación de la parábola:

$$\mathcal{P} : (x+2)^2 = 80(y-17).$$

c) Gráfico de las dos parábolas posibles:

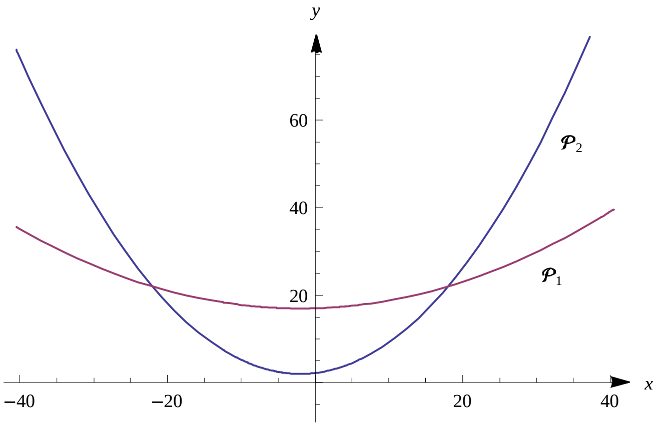


Figura 3.40 Soluciones posibles del ejemplo

Ejemplo 1.31 *Hallar la ecuación de la parábola cuya directriz es la recta de ecuación* $y = 2x + 1$ *y cuyo vértice es el punto* $\left(\frac{13}{5}; \frac{27}{10}\right)$*. Hacer un esbozo del gráfico de dicha parábola.*

Solución
Se requiere hallar el foco de la parábola.
Para la Ecuación del eje focal:
la pendiente del eje focal, $m = -\frac{1}{2}$ y pasa por $\left(\frac{13}{5}; \frac{27}{10}\right)$,entonces su ecuación es:

$$y - \frac{27}{10} = -\frac{1}{2}(x - \frac{13}{5}),$$

simplificando $x + 2y = 8$
Intersecando la directriz y el eje focal:

$$Q\left(\frac{6}{5}; \frac{17}{5}\right)$$

Y el foco será tal que el punto medio entre $Q\left(\frac{6}{5}; \frac{17}{5}\right)$ y el foco es el vértice $V\left(\frac{13}{5}; \frac{27}{10}\right)$.
Por lo tanto el foco será $F\,(4; 2)$
Por la definición de parábola, tiene

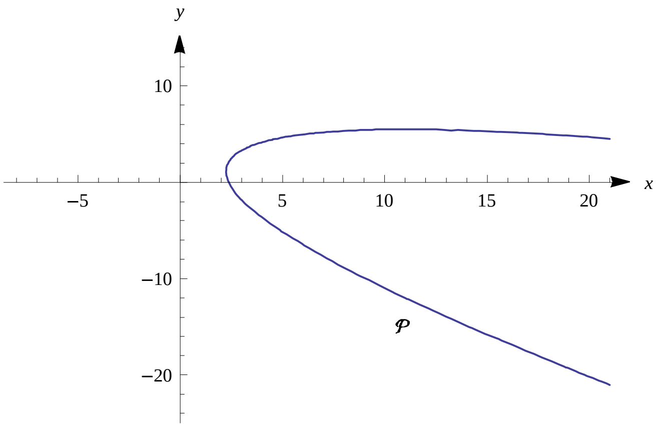


Figura 3.41 Parábola cuya ecuación debe hallarse por definición

Ecuación de $\mathcal{P}$:

$$\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}=\frac{|2x-y+1|}{\sqrt{5}}$$

Ejemplo 1.32 *La recta $\mathcal{L}: x=4$ es tangente a la parábola $\mathcal{P}$, siendo el punto de tangencia el vértice de la parábola. Si la parábola pasa por los puntos $A(12;7)$ y $B(12;-1)$, determinar:*

a)La ecuación de la parábola P.
b)El área del triángulo ABF, en donde F es el foco de la parábola $\mathcal{P}$.

Solución

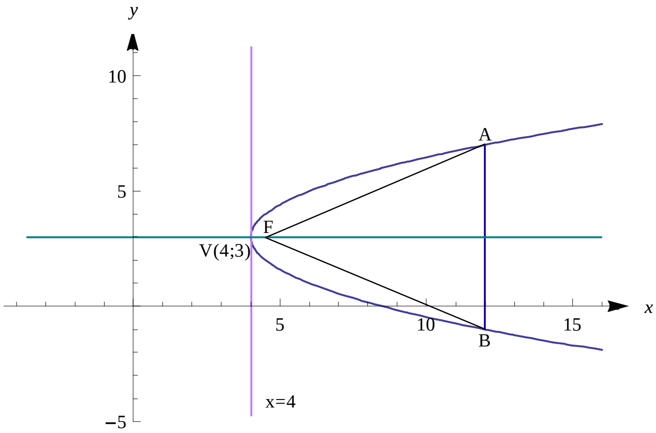


Figura 3.42 Ubicación de los datos del ejemplo

a) De donde el vértice tiene coordenadas $V(4;3)$

$$\mathcal{P}:(y-3)^2=4p(x-4)$$

A pertenece a $\mathcal{P}$, entonces

$$\begin{aligned} d(A;F) &= d(A;\mathcal{D}) \\ (7-3)^2 &= 4p(12-4) \end{aligned}$$

de donde se tiene $p=0,5$.Así,

$$\mathcal{P}:(y-3)^2=2(x-4)$$

b)Foco $F(4+0,5;3)$
Altura $h=12-4,5=7,5$
Base $b=7-(-1)=8$
Area$=0,5(b)(h)=0,5(8)(7,5)=30$.

Ejemplo 1.33 *La parábola $\mathcal{P}$ tiene las siguientes características:*

(i)El foco esta sobre el semieje positivo de las abscisas.
(ii)El vértice es $V(5,2)$ y un extremo del lado recto está sobre la recta

$$\mathcal{L}:y-2=0.$$

(iii)La directriz y la recta $\mathcal{L}$ tienen la misma ordenada en el origen.
Hallar la ecuación de la parábola $\mathcal{P}$.

Solución
Sea R el extremo del lado recto que está sobre la recta $\mathcal{L}$.
En el triángulo rectángulo VFR, por Pitágoras: $d(V;R) = \sqrt{5}p$.
También, por relaciones métricas en el mismo triángulo: $p(2p) = \sqrt{5}p(2)$,
luego, $p = \sqrt{5}$.
Sea $F(f;0)$, y usando

$$d(V;F) = p = \sqrt{5},$$

se obtiene $f = 6$. Por lo tanto el foco es $F(6;0)$.

Ahora hallemos la pendiente de la directriz, la cual es la misma que la pendiente de $\overline{FR}$. Desde R trazamos la perpendicular $\overline{RH}$ al eje X (H sobre el eje X), luego aplicando Pitágoras en el triángulo rectángulo RHF se obtiene $d(F;H) = 4$. Entonces la pendiente es $1/2$. Por lo tanto la ecuación de la directriz es $\mathcal{D} : x - 2y + 4 = 0$.

Por definición de parábola:

$$\mathcal{P} : d(Q, F) = d(Q; D),$$

de donde

$$\mathcal{P} : \sqrt{(x-6)^2 + y^2} = \frac{|x - 2y + 4|}{\sqrt{5}}.$$

O también

$$\mathcal{P} : 5[(x-6)^2 + y^2] = (x - 2y + 4)^2$$

Ejemplo 1.34 *La parábola $\mathcal{P}$ pasa por los puntos $A(17;6)$ y $B(-7;-24)$, los cuales pertenecen a una recta que es paralela al lado recto de $\mathcal{P}$. Si además se sabe que la longitud del lado recto de $\mathcal{P}$ es $4\sqrt{41}$unidades y que la abscisa de su vértice es -5, hallar:*

a) La ecuación de la directriz de $\mathcal{P}$.
b) La ecuación de $\mathcal{P}$ (no es necesario simplificar).

Solución
a) Como el segmento $\overline{AB}$ es paralelo al lado recto de $\mathcal{P}$, entonces A y B son puntos simétricos respecto del eje focal. Luego, el eje focal es perpendicular al segmento $\overline{AB}$ y pasa por su punto medio $M(5;-9)$.

La ecuación del eje focal es

$$y = -\frac{4}{5}x - 5 ...(1)$$

El vértice V de la parábola $\mathcal{P}$ pertenece al eje focal, luego sus coordenadas cumplen la ecuación (1). Así tenemos $V(-5;-1)$.

La directriz $\mathcal{D}$ de la parábola P es paralela al lado recto (paralelo a su vez al segmento $\overline{AB}$). Luego, su pendiente es $\frac{5}{4}$.

Sea la ecuación de

$$\mathcal{D} : y = \frac{5}{4}x + b.$$

La distancia de V a $\mathcal{D}$ es:

$$\begin{aligned} d(V;\mathbf{D}) &= \sqrt{41} = \frac{|5(-5) + (-4)(-1) + 4b|}{\sqrt{5^2 + 4^2}} \\ 41 &= |4b - 21| \end{aligned}$$

$b = 31/2$ ó $b = -5$ (descartado, porque cortaría a $\mathcal{P}$)

Luego, la ecuación de la directriz

$$\mathcal{D} : y = \frac{5}{4}x + \frac{31}{2}.$$

b) El foco F pertenece al eje focal, por lo tanto $F(f; -\frac{4}{5}f - 5)$.

Además, $d(F; V) = \sqrt{41}$, tenemos entonces:

$$\sqrt{(-5 - f)^2 + (-1 + 4/5f + 5)^2} = \sqrt{41}$$

Resolviendo obtenemos $f = 0$ ó $f = -10$ (descartado, porque estaría en $\mathcal{D}$). Por lo tanto $F(0; -5)$

La ecuación de la parábola será:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &: d(\mathcal{P}; F) = d(P; \mathcal{D}) \\ \mathcal{P} &: \sqrt{x^2 + (y + 5)^2} = \frac{|5x - 4y + 62|}{\sqrt{41}}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.35 *El punto $F(-2; 3)$ es el foco de la parábola $\mathcal{P}$ y la recta $\mathcal{L}$: $y = -x + 17$ es paralela a la directriz de $\mathcal{P}$. Dicha directriz equidista de F y de $\mathcal{L}$. Hallar la ecuación de la parábola $\mathcal{P}$.*

Solución

El punto$F(-2; 3)$ es el foco de la parábola $\mathcal{P}$ y la recta $\mathcal{L} : y = -x + 17$ es paralela a la directriz de $\mathcal{L}$. Dicha directriz equidista de F y de $\mathcal{L}$.

Hallar la ecuación de la parábola $\mathcal{P}$.

Solución propuesta

$$d(F; L) = 4\,|p| = \frac{|-2(1) + 3(1) - 17|}{\sqrt{2}} = \frac{16}{\sqrt{2}}$$

Luego $p = 2\sqrt{2}$

La directriz es de la forma $\mathcal{D}$: $x + y + b = 0$ y verifica que $d(F; D) = 4\sqrt{2}$, de donde se obtiene $b = 7$ ó $b = 9$; por el contexto se descarta$b = 7$ y se tiene que $\mathcal{D}$: $x + y - 9 = 0$.

Luego la ecuación de $\mathcal{P}$ se determina por definición:

$$d(P; F) = d(P; L)$$

$$\sqrt{(x + 2)^2 + (y - 3)^2} = \frac{|x + y - 9|}{\sqrt{2}}$$

Ejemplo 1.36 *La parábola $\mathcal{P}$ pasa por los puntos $A(24; 16)$ y $B(24; -8)$ y tiene como directriz a la recta $x = 4$.*

a)Determinar la ecuación de $\mathcal{P}$. Dar todas las soluciones posibles.

b)Graficar la parábola $\mathcal{P}$, señalando las coordenadas del vértice y del foco.

Solución

a) Como la directriz de la parábola es vertical, la ecuación de dicha parábola es dela forma:

$$\mathcal{P} : 4p(x - h) = (y - k)^2$$

Como la parábola pasa por $(24; 16)$ y $(24; -8)$:

El vértice de la parábola debe encontrase sobre la recta $y = \frac{16-8}{2} = 4, k = 4$ se abre hacia la derecha, $p > 0$.

Y reemplazamos uno de los puntos de paso de la parábola en su ecuación:

$$4p(24 - h) = (16 - 4)^2$$

$$p(24 - h) = 36$$

Escribimos la abscisa del vértice en términos de p :

$h = 4 + p$ y reemplazamos p en la ecuación anterior:

$$(h - 4)(24 - h) = 36$$

$$h^2 - 28h + 132 = 0$$

$$(h - 6)(h - 22) = 0$$

$h = 6$ y $p = 2$ ó $h = 22$ y $p = 18$

Ecuaciones:

$$\mathcal{P} : 8(x - 6) = (y - 4)^2, \mathcal{P}' : 72(x - 22) = (y - 4)^2$$

b) Gráfica señalando vértice y foco.

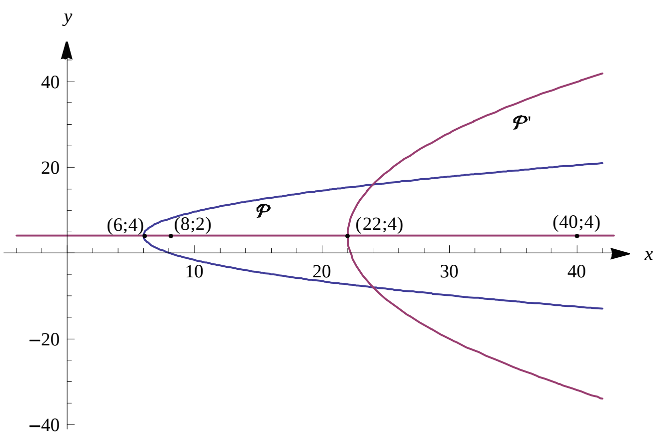


Figura 3.43 Ubicación de las posibles soluciones del ejemplo

Ejemplo 1.37 *Los extremos del lado recto $\overline{AB}$ de una parábola $\mathcal{P}$ se encuentran sobre los semiejes coordenados positivos. Si la recta*

$$\mathcal{L} : y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4},$$

es el eje focal de $\mathcal{P}$ y el vértice de $\mathcal{P}$ tiene abscisa mayor que 3, hallar:

a)Las coordenadas de los puntos A y B.

b)La ecuación de la directriz de $\mathcal{P}$.

c)La ecuación de la parábola $\mathcal{P}$.

Solución

Sean $A(a; 0)$ y $B(0; b)$ y F, foco de $\mathcal{P}$.

F es punto medio de $\overline{AB}$, tiene coordenadas $F(a/2; b/2)$.

Como F pertenece a

$$\mathcal{L} : b/2 = 3a/8 + 7/4.\dots(1)$$

Además, la pendiente de $\overline{AB}$ es igual a $-4/3$, entonces $-\frac{4}{3} = -\frac{b}{a}\dots(2)$
De (1) y (2) se obtiene $a = 6$ y $b = 8$.
$A(6;0)$ y $B(0;8)$.
La directriz de la parábola tiene pendiente $-4/3$ entonces

$$\mathcal{D} : y = -\frac{4}{3}x + b.$$

La distancia del foco $F(3;4)$ a la directriz $\mathcal{D}$ es $2p$, donde

$$4p = d(A;B) = 10$$

Entonces:

$$\frac{|4(3) + 3(4) - 3b|}{5} = 5,$$

de donde $b = -1/3$ ó $b = 49/3$.
Por la condición del vértice, $y = -\frac{4}{3}x + \frac{49}{3}$
La ecuación de P se obtendrá usando la definición:

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &: d(P;F) = d(P;D)\\ \mathcal{P} &: \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = \frac{|4x + 3y - 49|}{5}\end{aligned}$$

1.5.3 Problemas propuestos

1) Una parábola $\mathcal{P}$ cumple las siguientes condiciones:
i)Su eje focal es la recta $\mathcal{L} : x + 2y - 12 = 0$ y su foco tiene coordenadas $(2;c)$.
ii)La distancia entre su foco y su vértice es $\sqrt{5}$unidades.
Hallar la ecuación de la parábola $\mathcal{P}_1$, cuyo eje focal es paralelo al eje X, pasa por los extremos del lado recto de $\mathcal{P}$, siendo uno de ellos su vértice. Dar todas las soluciones posibles al problema.

2) El punto $F(-2;3)$ es el foco de la parábola $\mathcal{P}$ y la recta $\mathcal{L}$: $y = -x + 17$ es paralela a la directriz de $\mathcal{L}$. Dicha directriz equidista de F y de $\mathcal{L}$.
Hallar la ecuación de la parábola $\mathcal{P}$.

3) Hallar la ecuación de la parábola $\mathcal{P}$ si se sabe que:
i)su vértice V está sobre la recta $\mathcal{L}_1 : y = 2x - 7$,
ii)su foco F está sobre la recta $\mathcal{L}_2$: $x - 2y - 1 = 0$, y
iii)que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ cortan a la directriz $\mathcal{D}$ de $\mathcal{P}$ en dos puntos que son simétricos respecto al eje X. La ecuación de la parábola es de la forma:

$$\mathcal{P} : (y - k)^2 = 4p(x - h),\ p > 0.$$

4) La circunferencia $\mathcal{C} : (x-4)^2 + (y-5)^2 = 2$ es tangente a la parábola $\mathcal{P}$ en su vértice y a la recta que contiene al lado recto de $\mathcal{P}$.
Si se sabe además que un extremo del lado recto de $\mathcal{P}$ es el punto $A(1;10)$ y que la pendiente del eje focal de $\mathcal{P}$ es un número entero,
a)Hallar la ecuación del eje focal de la parábola $\mathcal{P}$.
b)Determinar las coordenadas del foco de la parábola $\mathcal{P}$.

c)Determinar la ecuación de la directriz de $\mathcal{P}$.
d)Hallar la ecuación de la parábola $\mathcal{P}$. No es necesario simplificar.

1.6 La elipse

Más de mil años después de que los griegos definieran las secciones cónicas, en la época del Renacimiento, el astrónomo polaco Nicholas Copérnicus (1473 - 1543), en su obra *Sobre las revoluciones de las esferas celestes*, sostenía que todos los planetas, incluso la Tierra, giraban en órbitas circulares alrededor del Sol. Aunque muchas de las afirmaciones de Copérnico no eran válidas, la controversia provocada por su teoría heliocéntrica empujó a los astrónomos a buscar un modelo matemático que explicará los movimientos de los planetas y el Sol. El primero en hallarlo fue el astrónomo alemán Johannes Kepler (1571 - 1630). Kepler concluyó que los planetas giran alrededor del Sol en órbitas elípticas, con el Sol colocado no en el centro sino en uno de los focos. El uso de las elipses para explicar el movimiento de los planetas es tan sólo una de sus diversas aplicaciones. A continuación se definirá elipse como un conjunto de puntos del plano que verifican una determinada condición.

Una *elipse* $\mathcal{E}$ es el conjunto de puntos $P(x;\ y)$ del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos es una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos.

Así,

$$\mathcal{E} = \left\{P \in \mathbf{R}^2 : d\left(P; F_1\right) + d\left(P; F_2\right) = 2a\right\}$$

La gráfica de una elipse cuyos focos están en el eje de abscisas sería la siguiente:

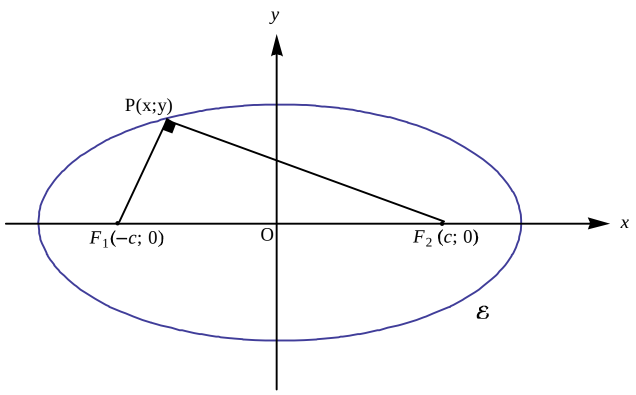


Figura 3.44 Elementos generadores de una elipse

1.6.1 Elementos de la elipse

Los principales elementos de la elipse son:

Focos: Puntos fijos .F_1 y F_2

Eje focal: recta que pasa por los focos.

Vértices V_1 y V_2 : puntos de intersección de la elipse con su eje focal.

Eje mayor $\overline{V_1V_2}$: segmento que une los vértices.Su longitud es $2a$.

Centro C: punto medio del eje mayor $\overline{V_1V_2}$ o punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$.

Eje menor $\overline{B_1B_2}$: segmento que une los dos puntos determinado al cortar el eje normal a la elipse.Su longitud es $2b$, donde $b^2 = a^2 - c^2$.

Distancia focal: $F_1F_2 = 2c$.

Lado recto : segmento con extremos en la elipse y que es perpendicular al eje focal.

Excentricidad : $e = \dfrac{c}{a}$

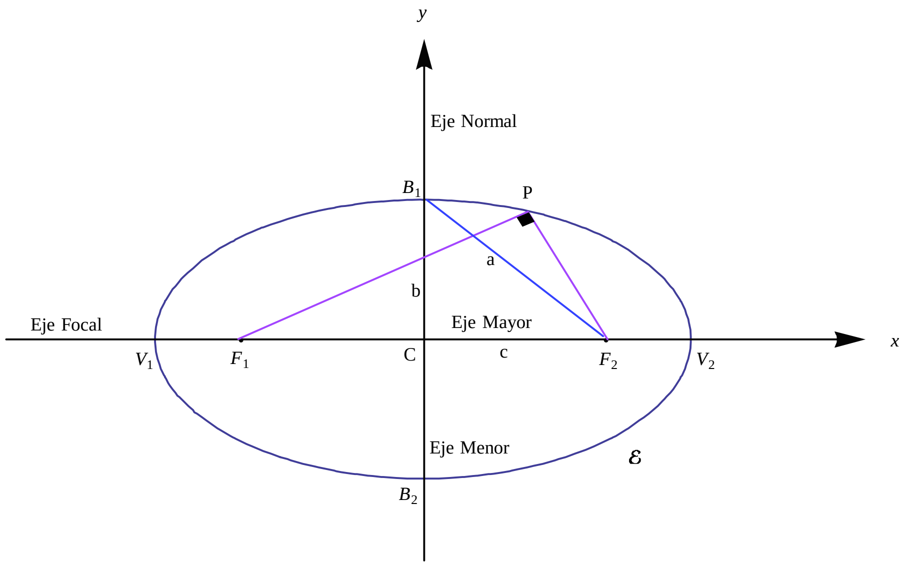


Figura 3.45 Elementos de una elipse

Observación

i)Para visualizar la definición de la elipse, basta imaginar dos chinches clavados en los focos y un trozo de cuerda atada a ellos. Al ir moviendo un lápiz que tensa esa cuerda, su trazo irá dibujando una elipse, como se muestra en la figura .

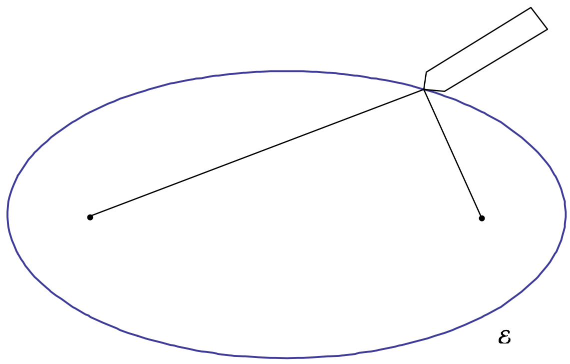


Figura 3.46 Construcción de una elipse a partir de dos puntos fijos y de una distancia fija

ii) La excentricidad de una elipse está dada por el cociente:

$$e = \frac{c}{a}$$

Notemos que al estar situados los focos en el eje mayor entre el centro y los vértices, siempre se tiene que:

$$0 < c < a \Longrightarrow 0 < \frac{c}{a} < 1 \Longrightarrow 0 < e < 1$$

es decir, las elipses tienen una excentricidad menor a uno.

La excentricidad es una medida de la *circularidad* de una elipse; entre más cerca de cero este este valor, más *circular* será la elipse y entre más cerca de uno, será más alargada.

Propiedad
En cualquier elipse siempre se verifica que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

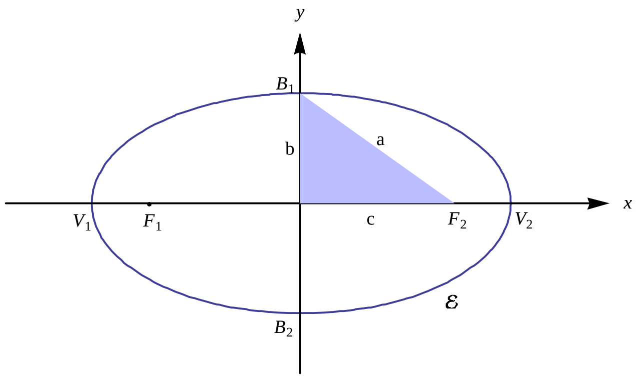


Figura 3.47 Propiedad fundamental de la elipse

Esta propiedad se puede justificar considerando, sin pérdida de generalidad, una elipse con centro en el origen y eje focal horizontal. Notemos que como el punto B_1 pertenece a la elispe, se debe verificar que:

$$d(B_1; F_1) + d(B_1; F_2) = 2a$$

Pero $d(B_1; F_1) = d(B_1; F_2)$, luego $d(B_1; F_1) = d(B_1; F_2) = a$.
Y al ser el triángulo OB_1F_2 un triángulo recto en O, se verifica que $b^2 + c^2 = a^2$.

Propiedad
La longitud del lado recto de una elipse es :

$$\frac{2b^2}{a}$$

1.6.2 Ecuación de la elipse cuyo eje focal es paralelo a un eje coordenado

a) Elipse con eje focal horizontal

Aplicando la definición de elipse al caso en el que los focos son $F_1(h-c; k)$ y $F_2(h+c; k)$, y el valor constante es $2a$,

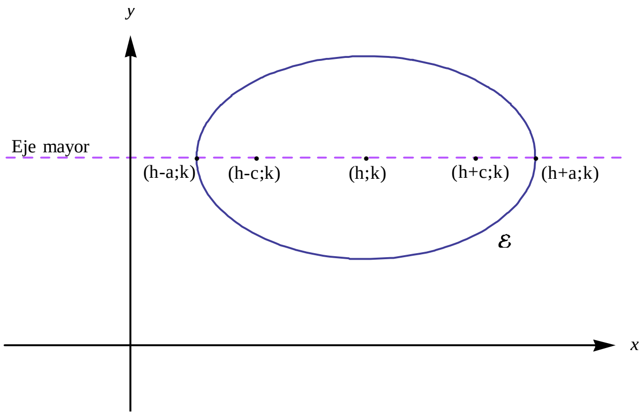


Figura 3.48 Elipse con eje focal horizontal

un punto $P(x;y)$se encontrará en la elipse si verifica la siguiente condición algebraica:

$$d\,(P;F_1)+d\,(P;F_2)=2a$$

$$\sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2}+\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}=2a$$

y usando la propiedad $a^2=b^2+c^2$, se obtiene:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

b) Elipse con eje focal vertical

Aplicando la definición de elipse al caso en el que los focos son $F_1(h;k-c)$ y $F_2(h;k+c)$, y el valor constante es $2a$,

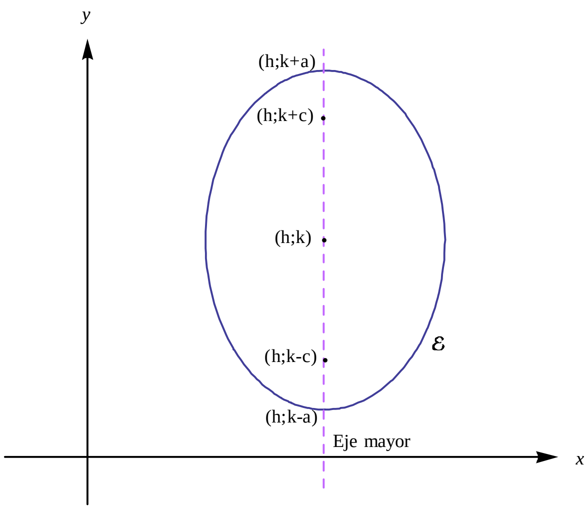


Figura 3.49 Elipse con eje focal vertical

un punto $P(x;y)$se encontrará en la elipse si verifica la siguiente condición algebraica:

$$d\,(P;F_1)+d\,(P;F_2)=2a$$

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-(k-c))^2}+\sqrt{(x-h)^2+(y-(k+c))^2}=2a$$

y usando la propiedad $a^2=b^2+c^2$, se obtiene:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Observación

En aquellos casos en los que el eje focal de la elipse no sea horizontal ni vertical, se debe emplear la condición geométrica que la define para hallar su ecuación.

Ejemplo 1.38 *Se sabe que los focos de la elipse $\mathcal{E}$ se encuentran en la directriz de la parábola $\mathcal{P}: x^2-6x+8y-15=0$ y que el eje focal de la parábola es eje normal para la elipse $\mathcal{E}$. Si además se sabe que la distancia entre un foco de la elipse y el foco de la parábola es $2\sqrt{10}$ y que uno de los vértices de la elipse $\mathcal{E}$ pertenece a la recta $x=-4$,*

a)hallar el centro de la elipse $\mathcal{E}$.
b)hallar la ecuación de la elipse $\mathcal{E}$.

Solución

La ecuación de la parábola, completando cuadrados, es

$$\mathcal{P}:(x-3)^2=-8(y-3)$$

$4p=-8$ entonces $p=-2$, luego la ecuación de la Directriz es $\mathcal{D}: y=5$ (eje focal para $\mathcal{E}$)

Por otro lado el eje normal de $\mathcal{E}$ es $N: x=3$, entonces el centro de $\mathcal{E}$ es $C(3;5)$

En el triángulo rectángulo $F'CF$ donde F es el foco de la parábola y F' es un foco de $\mathcal{E}$, se tiene que $FC=2/p/=4$ y por dato $FF'=2\sqrt{10}$. Aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene $CF'=c=\sqrt{24}$.

Además uno de los vértices pertenece a la recta $x=-4$ y al eje focal de $\mathcal{E}$, entonces el vértice es $V(-4;5)$ y su distancia al centro es $a=7$.

Como $b^2=a^2-c^2=25$, la ecuación de $\mathcal{E}$ será:

$$\frac{(x-3)^2}{49}+\frac{(y-5)^2}{25}=1.$$

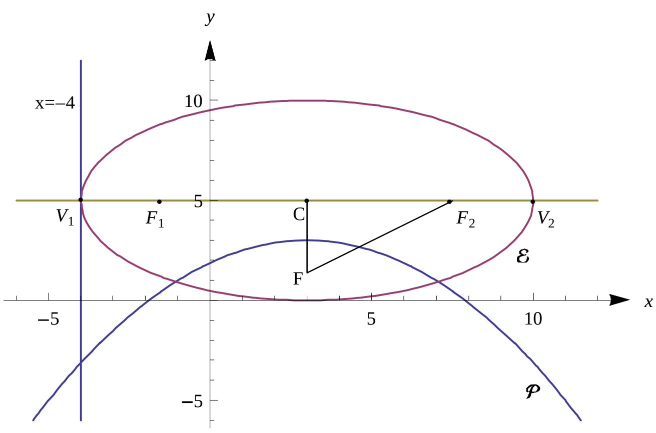


Figura 3.50 Ubicación de la parábola y elipse del ejemplo

Ejemplo 1.39 *Las elipses $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}\ _2$ cumplen las siguientes condiciones:*

(i)La ecuación de $\mathcal{E}_1$ es: $9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 839 = 0$.

(ii)La longitud de los ejes mayores de $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}\ _2$ es la misma.

(iii)La elipse $\mathcal{E}\ _2$ pasa por los puntos $A = (6; 5\sqrt{3} - 1)$ y $B = (-2; 5\sqrt{3} - 1)$, su eje focal es paralelo al eje Y y tiene excentricidad $e=$ 0,6.

a)Hallar la ecuación de $\mathcal{E}\ _2$. Dar todas las posibles soluciones.

b)Considerando la elipse hallada en a), cuyo centro tiene ordenada negativa, y sabiendo que los focos de $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}\ _2$ son los vértices de un rombo, determinar la ecuación de la circunferencia $\mathcal{C}$ inscrita en dicho rombo.

Solución

a) Completando cuadrados y dando la forma a la ecuación de la elipse $\mathcal{E}_1$:

$$\frac{(x-2)^2}{100} + \frac{(y+1)^2}{36} = 1.$$

Como el eje focal de $\mathcal{E}_2$ es paralelo al eje Y y la longitud de su eje mayor es igual que la longitud del eje mayor de $\mathcal{E}_1$,se tiene que:

$$\mathcal{E}_2 : \frac{(y-k)^2}{100} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1.$$

Además la excentricidad de $\mathcal{E}_2$ es 0,6, de donde $c = 6$.

Luego, $b^2 = 100 - 36 = 64$, obteniendo $b = 8$.

Además los puntos A y B son puntos de paso, se tiene que el eje focal pasa por el punto medio de estos, por lo tanto $h = 2$. Con estos resultados en la ecuación de la elipse se tiene:

$$\frac{\left(5\sqrt{3} - 1 - k\right)^2}{100} + \frac{(6-2)^2}{64} = 1.$$

Resolviendo la ecuación anterior se obtiene $k = -1 \lor \quad k = 10\sqrt{3} - 1$.

Luego la ecuación de $\mathcal{E}_2$ son :

$$\begin{aligned} \frac{(y+1)^2}{100} + \frac{(x-2)^2}{64} &= 1 \quad , \\ \frac{\left(y - 10\sqrt{3} + 1\right)^2}{100} + \frac{(x-2)^2}{64} &= 1 \end{aligned}$$

b) Las coordenadas de los focos de $\mathcal{E}_1$ son: $P(10; -1)$ y $Q(-6; -1)$ y de $\mathcal{E}_2$ son: $R(2; 5)$ y $S(2; -7)$

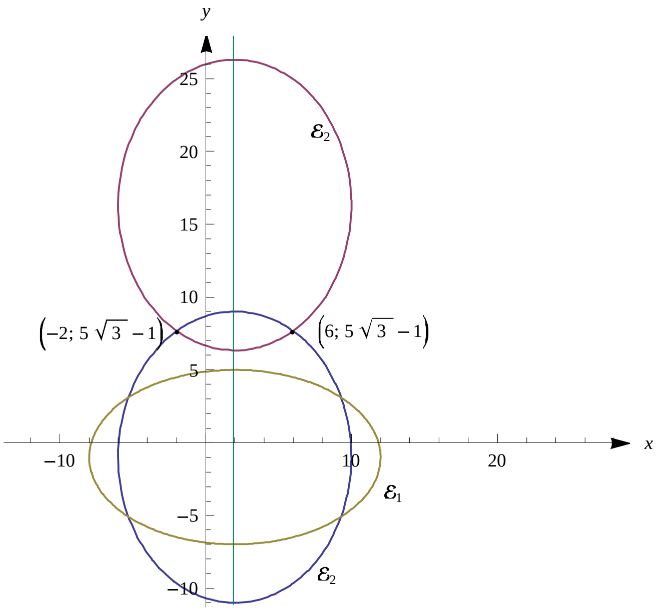


Figura 3.51 Ubicación de las posibles elipses E_2

El radio es igual a la distancia del centro $(2;-1)$ a la recta que pasa por R y P :

$$\mathcal{L}_{\overline{RP}} : 3x + 4y - 26 = 0.$$

Luego,

$$r = d(C;\mathcal{L}_{\overline{RP}}) = \frac{|3(2)+4(-1)-26|}{5} = \frac{22}{5}$$

Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia es

$$\mathcal{C} : (x-2)^2 + (y+1)^2 = \left(\frac{22}{5}\right)^2 .$$

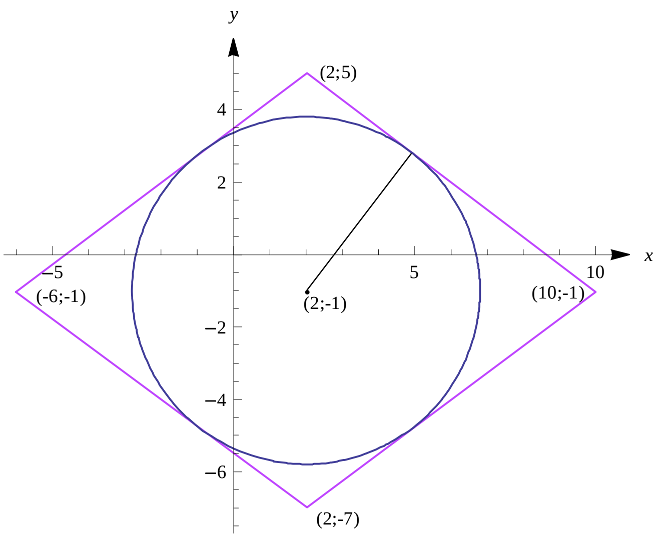


Figura 3.52 Circunferencia inscrita en un rombo

Ejemplo 1.40 *El triángulo ABC tiene vértices $A(-5;-1)$ y $B(1;-3)$. El vértice C se encuentra sobre la elipse $\mathcal{E}$ de ecuación*

$$4x^2 - 32x + y^2 - 8y + 64 = 0$$

a)Hallar la ecuación del lugar geométrico del punto medio de la mediana del triángulo ABC correspondiente al lado AB.

b)Graficar en un mismo sistema de coordenadas la elipse $\mathcal{E}$ y el lugar geométrico hallado en a).

Solución

a)

$$\mathcal{E} : 4x^2 - 32x + y^2 - 8y + 64 = 0.$$

Completando cuadrado se obtiene;

$$\mathcal{E} : \frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y-4)}{16} = 1$$

Además, $C(c_x;\, c_y)$ y el punto medio de $\overline{AB}$: $M(-2;-2)$.

Como $P(x;\, y)$ es punto medio de $\overline{MC}$,

$$\begin{cases} x = \frac{-2+c_x}{2} \\ y = \frac{-2+c_y}{2} \end{cases}$$

Reemplazando $c_x = 2x+2$ y $c_y = 2y+2$ en la ecuación $\mathcal{E}$, se obtiene la ecuación del lugar geométrico del punto P:

$$\mathcal{E} : (x-1)^2 + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

b)Graficar en un mismo sistema de coordenadas la elipse E y el lugar geométrico hallado en a).

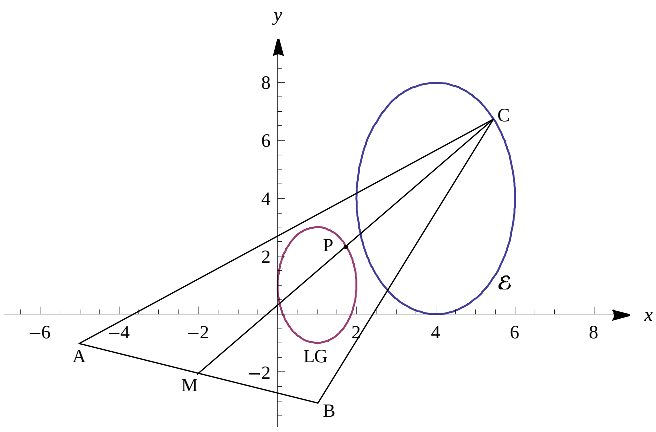


Figura 3.53 Lugar geométrico descrito por el punto medio de la mediana

1.6.3 Problemas propuestos

1) Sea $\mathcal{E}$ una elipse con ejes paralelos a los ejes coordenados y con vértices sobre las rectas $x = 1$ y $x = 9$, respectivamente. El centro de $\mathcal{E}$ está

sobre la recta $\mathcal{L} : y = x + 2$ y el punto $Q(2; 6)$ se encuentra sobre dicha elipse. Hallar la ecuación de la elipse $\mathcal{E}$ y graficarla.

2) La elipse E, cuyos focos son F_1 y F_2, es tangente a los ejes coordenados. La parábola $\mathcal{P} : y^2 - 48y + 80x - 704 = 0$ tiene vértice en F_1 y su

directriz $\mathcal{D}$ contiene al lado recto correspondiente a F_2.

a)Hallar la ecuación de la elipse $\mathcal{E}$.

b)Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los extremos del lado recto de la parábola $\mathcal{P}$ y por el foco F_2.

1.7 La hipérbola

Una *hipérbola* $\mathcal{H}$ es el conjunto de puntos $P(x;y)$ del plano tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 de ese plano es, en valor absoluto, una constante menor que la distancia entre los dos puntos fijos.

Así,

$$\mathcal{H} = \left\{P \in \mathbf{R}^2 : |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\right\}$$

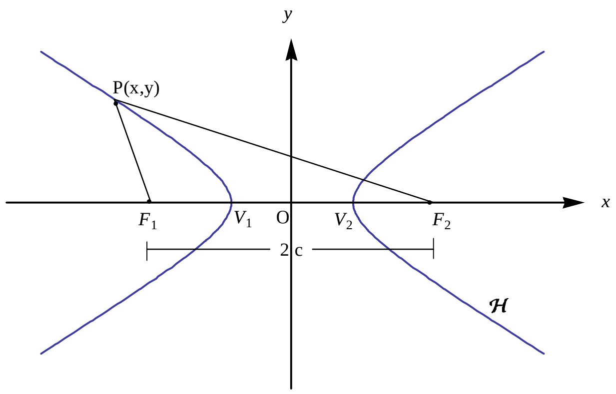


Figura 3.54 Elementos generadores de una hipérbola

1.7.1 Elementos de la hipérbola

Los principales elementos de la hipérbola son:

Focos: Puntos fijos F_1 y F_2

Eje focal: recta que pasa por los focos.

Vértices V_1 y V_2 : puntos de intersección de la hipérbola con su eje focal.

Eje transverso $\overline{V_1V_2}$: segmento que une los vértices.Su longitud es $2a$.

Centro C: punto medio del eje transverso $\overline{V_1V_2}$ o punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$.

Eje normal: la recta que pasa por el centro y es perpendicular al eje focal.

Eje conjugado $\overline{B_1B_2}$: segmento del eje normal cuyo punto medio es C.Su longitud es $2b$.

Distancia focal: $F_1F_2 = 2c$.

Lado recto o cuerda normal: cuerda focal perpendicular al eje focal.

Excentricidad de una hipérbola: dada por el cociente $e = \dfrac{c}{a}$

Observemos que al estar situados los vértices en el eje mayor entre el centro y los focos, siempre se tiene que:

$$0 < a < c \Longrightarrow 0 < \frac{c}{a} > 1 \Longrightarrow e > 1$$

es decir, las hipérbolas tienen una excentricidad mayor a uno.

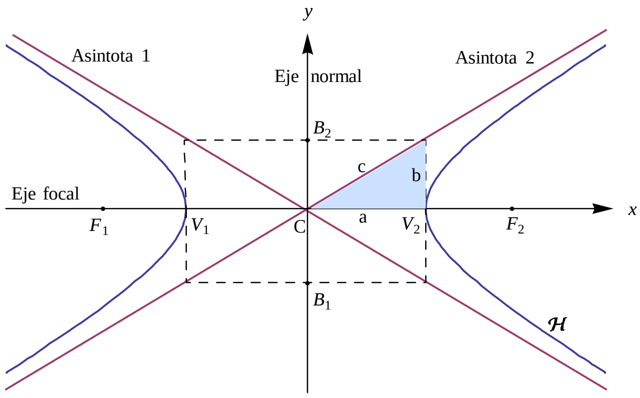


Figura 3.55 Elementos de una hipérbola

Propiedad
En cualquier hipérbola se verifica que:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Propiedad
La longitud del lado recto de una hipérbola es:

$$\frac{2b^2}{a}$$

1.7.2 Ecuación de la hipérbola cuyo eje focal es paralelo a un eje coordenado

a) Hipérbola con eje focal horizontal

Aplicando la definición de elipse al caso en el que los focos son $F_1(h-c; k)$ y $F_2(h+c; k)$, y el valor constante es $2a$,un punto $P(x; y)$se encontrará en la hipérbola si verifica la siguiente condición algebraica:

$$|d(P; F_1) - d(P; F_2)| = 2a$$

$$\left|\sqrt{(x-(h-c))^2 + (y-k)^2} - \sqrt{(x-(h+c))^2 + (y-k)^2}\right| = 2a$$

elevando al cuadrado dos veces y usando la propiedad $c^2 = a^2 + b^2$, se obtiene:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

a) Hipérbola con eje focal vertical

Aplicando la definición de elipse al caso en el que los focos son $F_1(h; k-c)$ y $F_2(h; k+c)$, y el valor constante es $2a$,un punto $P(x; y)$se encontrará en la hipérbola si verifica la siguiente condición algebraica:

$$|d(P; F_1) - d(P; F_2)| = 2a$$

$$\left|\sqrt{(x-h)^2+(y-(k-c))^2}-\sqrt{(x-h)^2+(y-(k+c))^2}\right|=2a$$

elevando al cuadrado dos veces y usando la propiedad $c^2=a^2+b^2$, se obtiene:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

Asíntotas de una hipérbola

Para el caso particular $(h;k)=(0;0)$ y eje focal horizontal, la ecuación de la hipérbola sería:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

A partir de la ecuación anterior se obtiene

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

Ahora, si $|x|$ es muy grande, x^2-a^2 es "casi igual" a x^2 y por lo tanto

$$\sqrt{x^2-a^2}$$

es *casi igual* a $|x|$, es decir, para x suficientemente grande, ya sea positiva o negativa , y es *casi igual* a $\pm\frac{b}{a}x$. Lo anterior se expresa diciendo que las ramas de la hipérbola se aproximan a las rectas

$$y=\frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y=-\frac{b}{a}x.$$

Este par de rectas se llaman asíntotas de la hipérbola. Observa que las asíntotas, el eje focal y las rectas verticales que pasan por los vértices de la hipérbola, forman triángulos rectángulos cuyos catetos miden a y b y la hipotenusa c. Esta observación es útil para graficar las hipérbolas.

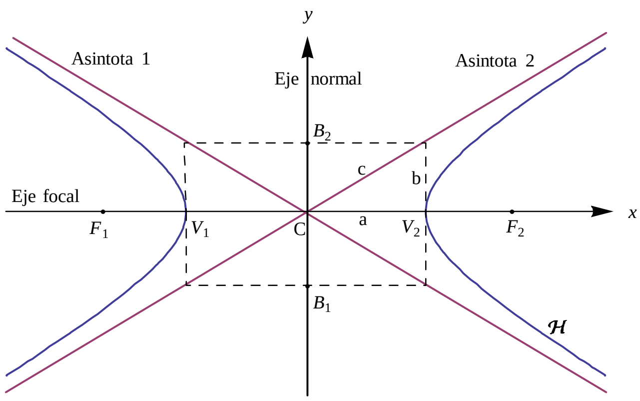


Figura 3.56 Gráfica de una hipérbola con todos sus elementos

De manera similar, se puede justificar que en el caso en el que $(h;k)=(0;0)$ y el eje focal es vertical, las asíntotas tienen ecuaciones:

$$y = \frac{a}{b}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{a}{b}x$$

1.7.3 Hipérbolas conjugadas

Si el eje transverso de una hipérbola es igual al eje conjugado de otra hipérbola, entonces ambas *hipérbolas* se llaman *conjugadas*. En este caso cada hipérbola es la hipérbola conjugada de la otra.

En el caso particular en el que una de las hipérbolas tenga ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

se cumplirá que la ecuación de su hipérbola conjugada será:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Ejemplo 1.41 *En la siguiente gráfica se muestran un par de hipérbolas conjugadas en donde, para una de ellas,* $a = 4$*,* $b = 3$ *y* $c = 5$*.*

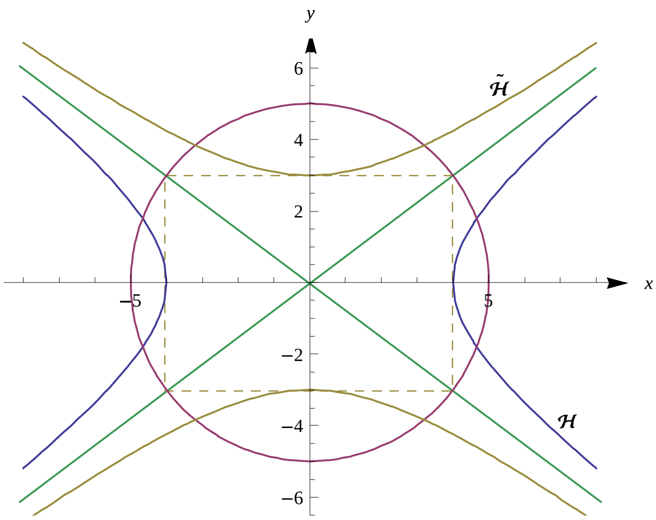


Figura 3.57 Hipérbolas conjugadas

Las hipérbolas conjugadas tienen un centro común, un par común de asíntotas y sus focos equidistan del centro: los cuatro focos están sobre la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = c^2$.

Observación

Se ha indicado que los valores de a, b y c, satisfacen la relación pitagórica: $c^2 = a^2 + b^2$
;

esto implica que: $a > b$, $a = b$ o $a < b$

Cuando $a = b$, la hipérbola se denomina *Hipérbola equilátera*

Ejemplo 1.42 *Los focos de una hipérbola $\mathcal{H}$ son los extremos del lado recto de la parábola de ecuación $x^2 - 4x + 10y + 14 = 0$. Si una de las asíntotas de $\mathcal{H}$ es paralela a la recta $4x - 3y - 11 = 0$,*

a)Determinar las ecuaciones de $\mathcal{H}$ y de su hipérbola conjugada.
b)Graficar las dos cónicas en el mismo plano.

Solución

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &: \ x^2 - 4x + 10y + 14 = 0 \\ \mathcal{P} &: \ (x-2)^2 = -10(y+1) \end{aligned}$$

donde $V(2;-1)$ y $p = -5/2$.

Luego, los extremos del lado recto tendrán coordenadas $L(2-5;-7/2)$ y $R(2+5;-7/2)$.

Por lo tanto los focos son $F_1(-3;-7/2)$ y $F_2(7;-7/2)$ y el centro de la hipérbola se encuentra en $(2;-7/2)$ con $c = 5$.

La asíntota paralela a $4x - 3y - 11 = 0$ tiene $m = 4/3$.

Como la hipérbola es horizontal, $m = b/a = 4/3$ con $c = 5$ se obtiene que $a = 3$ y $b = 4$.

Por lo tanto la ecuación de la hipérbola es,

$$\mathcal{H} : \frac{(x-2)^{\ 2}}{9} - \frac{(y+7/2)^2}{16} = 1$$

y la ecuación de la hipérbola conjugada será:

$$\widetilde{\mathcal{H}} : \frac{(y+7/2)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{9} = 1$$

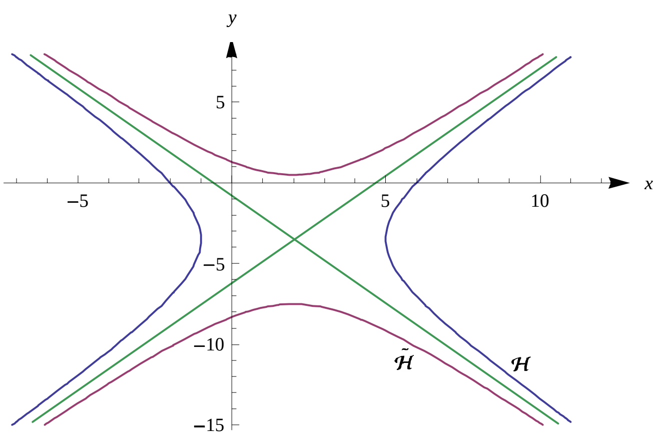


Figura 3.58 Gráficas de las hipérbolas conjugadas del ejemplo

Ejemplo 1.43 *Los extremos de uno de los lados rectos de la hipérbola $\mathcal{H}$ se encuentran sobre las rectas $\mathcal{L}_1 : y = 2x - 1$ y $\mathcal{L}_2 : y = -2x + 11$, uno en cada recta. Lo mismo ocurre con los extremos del otro lado recto. Estos cuatro puntos forman un rectángulo de área $32u^2$.Si el eje focal de $\mathcal{H}$ es paralelo al eje X,*

a)hallar la ecuación de $\mathcal{H}$.
b)graficar $\mathcal{H}$ y sus asíntotas.
c)el centro se encuentra sobre la intersección de las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$.

Solución
a)Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de estas rectas:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 : y = 2x - 1 \\ \mathcal{L}_2 : y = -2x + 11 \end{cases}$$

de donde $C(3; 5)$.
Como el eje focal es paralelo al eje X, entonces

$$\mathcal{H} : \frac{(x-3)^2}{a^2} - \frac{(y-5)^2}{b^2} = 1$$

El área del rectángulo, $(2c)2b^2/a = 32$.
Las coordenadas de $L(3 + c, 5 + b^2/a)$ satisfacen la ecuación de $\mathcal{L}_1$: $\dfrac{b^2}{a} = 2c$.
Reemplazando en el área, $c = 2$.
Así, $b^2 = 4a$ y por la relación:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

se tendrá:

$$a = -2 + 2\sqrt{2} \quad \text{y} \quad b = 8(\sqrt{2} - 1)$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{H} : \frac{(x-3)^2}{4(\sqrt{2}-1)^2} - \frac{(y-5)^2}{8(\sqrt{2}-1)} = 1$$

b)La gráfica de $\mathcal{H}$ y de sus asíntotas,$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 : y = \pm 4(x - 3) + 5$ se muestra a continuación:

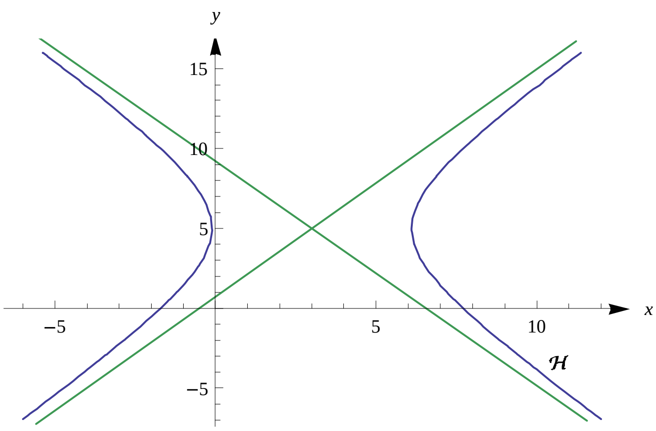


Figura 3.59 Gráfica de la hipérbola H y de sus asíntotas

Ejemplo 1.44 *El centro de la elipse* $\mathcal{E} : 16x^2 + 25y^2 - 64x + 150y - 111 = 0$ *es el centro de la hipérbola* $\mathcal{H}$ *y las rectas que contienen a los lados rectos de esta elipse se interceptan* *con la recta $L: y-1=0$ en los puntos A y B; por estos puntos pasan las asíntotas de la hipérbola $\mathcal{H}$. Si la hipérbola $\mathcal{H}$ pasa por el punto medio de $\overline{AB}$, determinar la ecuación de la hipérbola $\mathcal{H}$ y graficarla.*

Solución

Completando cuadrados, obtenemos la ecuación de la elipse:

$$\mathcal{E}: \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$

Eje focal paralelo al eje X entonces $a = 5$, $b = 4$ y $c = 3$.

Las rectas que contienen al lado recto de la elipse son : $\mathcal{L}_1 : x = -1$ y $\mathcal{L}_2 : x = 5$

Al interceptarlo con la recta $\mathcal{L} : y = 1$, obtenemos los puntos :

$A(-1; 1)$ y $B(5; 1)$ y por consiguiente se pueden determinar las pendientes de las asíntotas:

$$m = \frac{1-(-3)}{5-2} = \frac{4}{3} = \frac{a}{b} \Longrightarrow b = \frac{3}{4}a.$$

Como la hipérbola pasa por el punto medio de $\overline{AB}$, entonces ese punto medio es el vértice de la hipérbola,de donde $V(2; 1)$ y de este modo determinamos $a = 4$ y luego $b = 3$.

Como su eje focal es paralelo al eje Y, la ecuación de la hipérbola será:

$$\mathcal{H}: \frac{(y+3)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{9} = 1$$

Y su gráfica será:

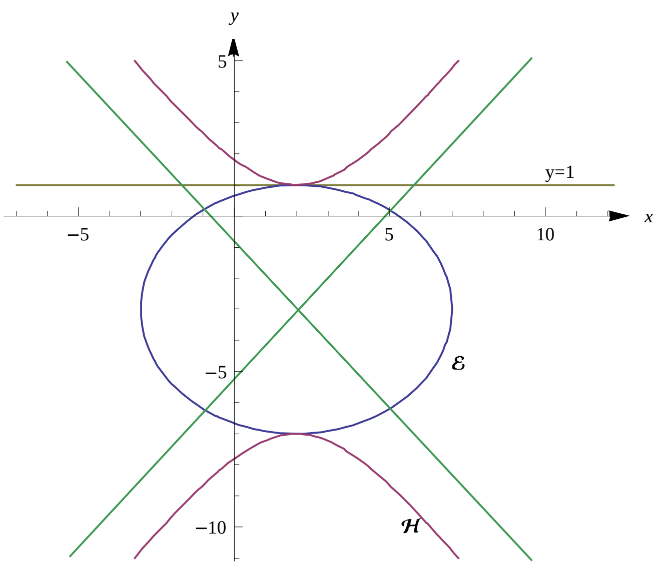


Figura 3.60 Ubicación de la hipérbola H y de los datos del ejemplo

Ejemplo 1.45 *La hipérbola $\mathcal{H}$ tiene centro en $C(-2; 3)$ y uno de sus vértices se encuentra ubicado en el punto $A(-2; 6)$. La parábola $\mathcal{P}$ tiene directriz $\mathcal{D} : 4y - 3x = 18$ y vértice en $V\left(-\frac{16}{5};\ -\frac{2}{5}\right)$. Si el foco de la parábola $\mathcal{P}$ coincide con el foco de ordenada negativa de la hipérbola $\mathcal{H}$, hallar la ecuación de $\mathcal{H}$.*

Solución

Con respecto de $\mathcal{H}$ se sabe que el centro se ubica en $C(-2;3)$, que $a=3$ y que tiene eje focal vertical.

Con respecto a la parábola $\mathcal{P}$ se sabe que su foco es foco de la hipérbola, entonces $F(-2;x)$

Para la parábola P se cumple que el vértice V equidista de la directriz y del foco:

$$\begin{aligned} d(V;\mathcal{D}) &= d(V;F) \\ \frac{\left|-3(\frac{-16}{5})+4(\frac{-2}{5})-18\right|}{5} &= \sqrt{\left(-2+\frac{16}{5}\right)^2+(x+\frac{2}{5})^2} \end{aligned}$$

Resolviendo se obtiene $x=-2$ ó $x=6/5$.

Luego, el foco es $F(-2;-2)$.

Para la hipérbola: $c=5$.

Luego

$$\mathcal{H}:\frac{(y-3)^2}{9}-\frac{(x+2)^2}{16}=1.$$

Ejemplo 1.46 *Respecto a la hipérbola $\mathcal{H}$ se sabe que su centro se encuentra en $(-2;3)$ y que el punto $(3;3+\sqrt{18})\in\mathcal{H}$. Si además se sabe que una de las asíntotas de $\mathcal{H}$ pasa por el vértice de abscisa positiva de la elipse $\mathcal{E}:\dfrac{(x+5)^2}{169}+\dfrac{(y-9)^2}{25}=1$, encontrar la ecuación de $\mathcal{H}$.*

Solución

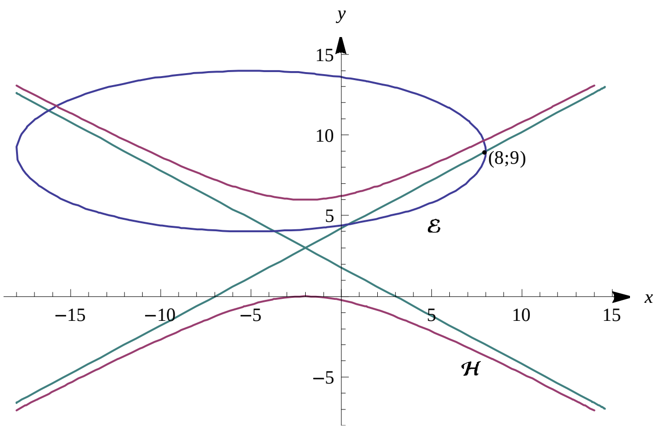


Figura 3.61 Ubicación de los datos del ejemplo

El vértice de abscisa positiva de la elipse de ecuación $\frac{(x+5)^2}{169}+\frac{(y-9)^2}{25}=1$, es el punto$V_2(8;9)$.

Entonces la asíntota pasa por $(-2;3)$ y por $(8;9)$ y su ecuación será:

$$\frac{y-3}{x+2}=\frac{3-9}{-2-8}=-\frac{3}{5}$$

Caso I

Si la hipérbola tuviera eje focal paralelo al eje X:

En ese caso, $\frac{b}{a} = \frac{3}{5}$
La ecuación de la hipérbola es de la forma

$$\mathcal{H} : \frac{(x+2)^2}{a^2} - \frac{(y-3)^2}{b^2} = 1$$

Reemplazando el punto de paso $(3; 3+\sqrt{18})$ y $\frac{b}{a} = \frac{3}{5}$, se llega a una contradicción.
Caso II
Si la hipérbola tuviera eje focal paralelo al eje Y:
En ese caso, $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$
La ecuación de la hipérbola es forma

$$\mathcal{H} : \frac{(y-3)^2}{a^2} - \frac{(x+2)^2}{b^2} = 1$$

Reemplazando el punto de paso $(3; 3+\sqrt{18})$ y $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$, se obtiene que $a = 3$ y $b = 5$; Por lo tanto la ecuación de la hipérbola es,

$$\mathcal{H} : \frac{(y-3)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{25} = 1$$

Ejemplo 1.47 *Sea $\mathcal{E}$ la elipse con centro en el punto $(2; 2)$, eje focal paralelo al eje X, con foco en $(2+\sqrt{7}; 2)$ y cuyo lado recto mide $\frac{9}{2}$. Sea $\mathcal{P}$ una parábola cuyo eje focal contiene al eje menor de la elipse $\mathcal{E}$, con vértice en el extremo inferior del eje menor de $\mathcal{E}$ y con foco en la recta $\mathcal{L} : 3x+2y+1 = 0$ y sea $\mathcal{H}$ una hipérbola cuyos focos son los extremos del lado recto de la parábola $\mathcal{P}$ y que tiene como una de sus asíntotas a la recta $8x - 6y - 37 = 0$. Hallar la ecuación de $\mathcal{E}$, $\mathcal{P}$ y $\mathcal{H}$.*

Solución
La $d(centro; foco) = c = \sqrt{7}$.
Además, $2b^2/a = 9/2$ entonces $b^2 = (9a)/4$.
Luego en la relación pitagórica se tiene $a = 4$ y $b = 3$.

$$\mathcal{E} : \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

Por otro lado, en la parábola:
eje focal : $x = 2$
sea el vértice de $\mathcal{P}$ es $V(2; -1)$,
el foco $F(2; y)$ pertenece a la recta $\mathcal{L} : 3x + 2y + 1 = 0$,entonces $y = -7/2$.
$F(2; -7/2)$.Luego, $p = -5/2$.

$$\mathcal{P} : (x-2)^2 = -10(y+1)$$

Para hallar la ecuación de $\mathcal{H}$, se debe tener en cuenta que el centro se ubica en $C(2; -7/2)$, $c = 5$ y como $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$, entonces $a = 3$ y $b = 4$.
Luego ,

$$\mathcal{H} : \frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+7/2)^2}{16} = 1$$

Y el gráfico será:

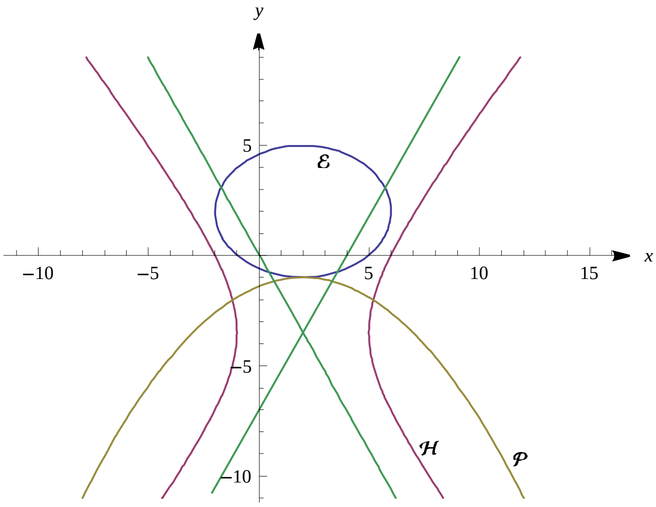


Figura 3.62 Ubicación de la hipérbola H y de los datos del ejemplo

Ejemplo 1.48 *Un punto P del plano se mueve de modo que su distancia al punto $F(10;1)$ es el triple de su distancia a la recta $\mathcal{D}: x = 2$.*

a)Demostrar que el lugar geométrico que describe P corresponde a una hipérbola y hallar su ecuación.

b)Graficar la cónica encontrada en a), señalando las coordenadas de sus vértices y focos.

Solución

a)De la condición

$$d(P,F) = 3\,|x-2| \Rightarrow \sqrt{(x-10)^2+(y-1)^2} = 3\,|x-2|$$

Simplificando se tiene una hipérbola

$$\mathcal{H}: \frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{72} = 1$$

Por lo tanto, el lugar geométrico de P corresponde a una hipérbola.

b) $a = 3, \quad b = 3\sqrt{8}$ y $c = 9$.

Las coordenadas de sus vértices son $(4;1)$ y $(-2;1)$ y de sus focos $(10;1)$ y $(-8;1)$.

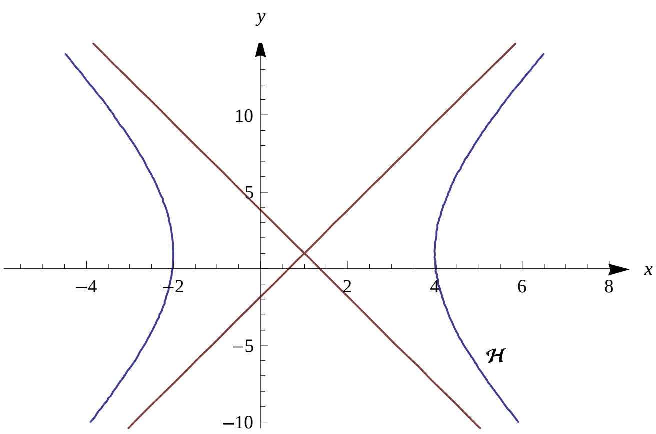


Figura 3.63 Ubicación de la hipérbola H y de sus asíntotas

Ejemplo 1.49 *Considerar la hipérbola $\mathcal{H}$ con eje transverso vertical y con puntos de paso $(2;\ 3+3\sqrt{2})$ y $(2;\ 3-3\sqrt{2})$. Si la recta $\mathcal{L}$ de ecuación $x+y+3=0$ es paralela a una de las asíntotas de $\mathcal{H}$ y dista del centro de $\mathcal{H}$ en $\frac{5}{2}\sqrt{2}$, hallar la ecuación de $\mathcal{H}$ y graficarla.*

Solución

Si $\mathcal{H}$ tiene eje transverso vertical y los puntos $(2;\ 3+3\sqrt{2})$ y $(2;\ 3-3\sqrt{2})$ están en dicha curva, el centro de $\mathcal{H}$ debe tener coordenadas $(h;3)$.

Además como el centro de $\mathcal{H}$ dista de $\mathcal{L}: x+y+3=0$ en $\frac{5}{2}\sqrt{2}$, se puede obtener h resolviendo la ecuación:

$$\frac{|h+3+3|}{\sqrt{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{2},$$

se obtiene $h=-1$ ó $h=-11$.

Además se sabe que la hipérbola es equilátera pues la pendiente de una asíntota es -1, luego $a=b$.

Solución 1 : Entonces la ecuación de la hipérbola es de la forma:

$$\mathcal{H}: \frac{(y-3)^2}{a^2} - \frac{(x+1)^2}{a^2} = 1$$

Reemplazando el punto $(2;\ 3+3\sqrt{2})$, se obtiene: $a=3$

Solución 2 : Para la otra solución se tiene la ecuación:

$$\frac{(y-3)^2}{a^2} - \frac{(x+11)^2}{a^2} = 1$$

Reemplazando el punto $(2;\ 3+3\sqrt{2})$, se obtiene un valor de $a^2<0$.

Por lo tanto la solución será:

$$\mathcal{H}: \frac{(y-3)^2}{9} - \frac{(x+1)^2}{9} = 1$$

Su gráfica:

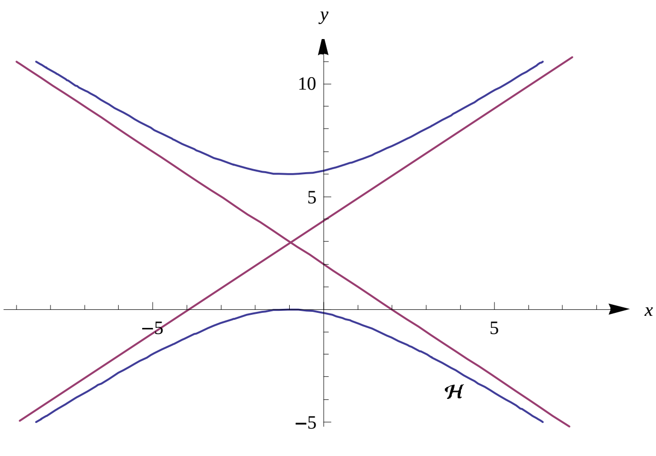


Figura 3.64 Ubicación de la hipérbola H y de sus asíntotas

Ejemplo 1.50 *La recta tangente a la circunferencia $\mathcal{C}: x^2+y^2-2x-6y-3=0$, en el punto $(-1;6)$, es asíntota de la hipérbola $\mathcal{H}$ cuyo eje focal es la recta con ecuación $x=4$ y la distancia del centro de la hipérbola a su lado recto es igual a la longitud del diámetro de la circunferencia. Hallar la ecuación de la hipérbola $\mathcal{H}$.*

Solución

$$\mathcal{C}: (x-1)^2+(y-3)^2=13$$

La pendiente de la recta que pasa por $(1;3)$ y $(-1;6)$ es $-3/2$, entonces la pendiente de la recta tangente es $2/3$.

La ecuación de la asíntota es

$$\mathcal{A}_1: y-6=2(x+1)/3.$$

Intersecando $\mathcal{A}_1$ con el eje focal se obtiene el centro de la hipérbola: $C(4;28/3)$

Como la distancia del centro de la hipérbola a su lado recto es igual al diámetro, entonces $c=2\sqrt{13}$.....(*)

Además, de la pendiente de $\mathcal{A}_1: a/b=2/3$.....(&).

De (*), (&) y de la relación pitagórica se obtiene $a=4$ y $b=6$.

La ecuación de la hipérbola es:

$$\mathcal{H}: \frac{\left(y-\frac{28}{3}\right)^2}{16}-\frac{(x-4)^2}{36}=1$$

Ejemplo 1.51 *La hipérbola $\mathcal{H}$, cuyo eje focal es la recta $y=2$, tiene una de sus asíntotas paralela a la recta $\mathcal{L}: 4x-3y+46=0$ y la distancia de un vértice de $\mathcal{H}$ al lado recto más alejado es 24. Se sabe además que la distancia entre $\mathcal{L}$ y una de las asíntotas de $\mathcal{H}$ es igual a la longitud del semieje conjugado de $\mathcal{H}$ (es decir, es igual a b). Hallar la ecuación de $\mathcal{H}$; dar todas las soluciones posibles.*

Solución

Sea $\mathcal{A}_1$: Asíntota de pendiente positiva.

Como $\mathcal{L}//\mathcal{A}_1$ entonces,

$$\mathcal{A}_1: (4/3)x-y+k=0.$$

Además,se tienen:

$$\begin{cases} b/a=4/3, \\ d(V_1;F_2)=a+c=24, \\ a^2+b^2=c^2 \end{cases}$$

y de resolver la ecuación: $(24-a)^2=a^2+\frac{16}{9}a^2$

se obtiene: $a=9$,$b=12$. $c=15$.

Basta tomar un punto en $\mathcal{L}$,por ejemplo $(0;46/3)$:

$$d(L;\mathcal{A}_1)=d((0;46/3);\mathcal{A}_1)=b \Rightarrow \frac{|(4/3)0-46/3+k|}{\sqrt{25/9}}=12,$$

de donde $k=106/3 \vee k=-14/3$.

Caso I: Si

$$k=106/3 \Rightarrow \mathcal{A}_1: (4/3)x-y+106/3=0,$$

entonces, el centro tiene coordenadas $C(-25;2)$.

Ecuación de
$$\mathcal{H}: \frac{(x+25)^2}{81} - \frac{(y-2)^2}{144} = 1.$$

Caso II: Si
$$k = -14/3 \Rightarrow \mathcal{A}_1 : (4/3)x - y - 14/3 = 0$$
entonces, el centro tiene coordenadas $C'(5;2)$.

Ecuación de
$$\mathcal{H}': \frac{(x-5)^2}{81} - \frac{(y-2)^2}{144} = 1.$$

Ejemplo 1.52 *Los extremos de los lados rectos de una hipérbola $\mathcal{H}$ son los vértices de un rectángulo de área $16\sqrt{2}u^2$ y las diagonales de dicho rectángulo se intersecan en el punto $(3;1)$. Si se sabe que uno de lados rectos de $\mathcal{H}$ es horizontal y que su longitud es la misma que la del eje conjugado , hallar la ecuación de $\mathcal{H}$.*

Solución

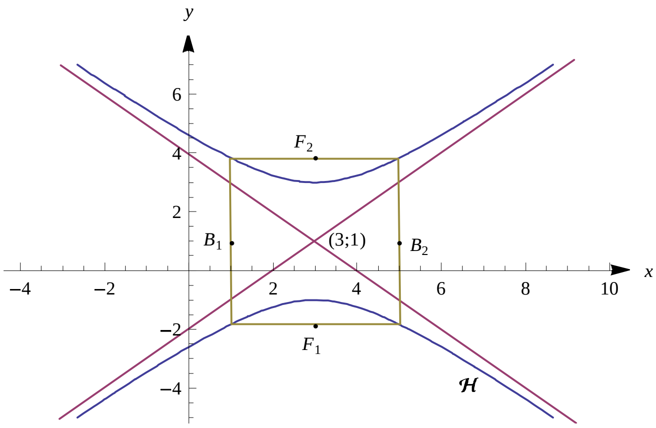


Figura 3.65 Ubicación de los datos del ejemplo

Un esbozo de la situación nos ayuda a plantear las siguientes relaciones:
i)El eje focal de la hipérbola $\mathcal{H}$ es paralelo al eje Y.
ii)$(2b)(2c) = 16\sqrt{2}$. Es decir $bc = 4\sqrt{2}$ ... (1)
iii)$\frac{2b^2}{a} = 2b$. Es decir $b^2 = ba$, Como b es distinto de cero, $b = a$ ...(2)
iv)También $b^2 = c^2 - a^2$ ...(3)

De (1), (2) y (3): $b = a = 2$

Por simetrías, las diagonales del rectángulo se intersecan en el centro de la hipérbola, es decir $C = (3;1)$.

Luego:
$$\mathcal{H}: \frac{(y-1)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{4} = 1.$$

Ejemplo 1.53 *Se dice que dos hipérbolas son cofocales si tienen los mismos focos. Considerando las hipérbolas cuya ecuación tiene la forma $\mathcal{H}: \frac{(x-2)^2}{25-d} - \frac{(y-3)^2}{d} = 1$ con $0 < d < 25$, responder las siguientes preguntas.*

a)¿Son dichas hipérbolas cofocales? Justificar su respuesta.
b)Determinar las ecuaciones de las asíntotas de dichas hipérbolas.

c)Hallar la ecuación de la hipérbola para la que se verifica que el punto de coordenadas $(11; -9)$ pertenece a una de sus asíntotas.

d)Con respecto a la hipérbola $\mathcal{H}$ se sabe que su centro tiene coordenadas $(-2; 1)$, su eje focal es paralelo al eje y, uno de los extremos de un lado recto tiene ordenada 14 y que el punto $\left(6;\ 1 + \frac{5\sqrt{13}}{3}\right)$ es un punto de paso de $\mathcal{H}$.

Determinar la ecuación de $\mathcal{H}$ y de sus asíntotas.

Solucion

a) Las hipérbolas de la forma

$$\mathcal{H} : \frac{(x-2)^2}{25-d} - \frac{(y-3)^2}{d} = 1$$

tienen centro en $C(2; 3)$, $a^2 = 25 - d$; $b^2 = d$ y $c^2 = 25$; $c = 5$.

Por lo tanto, las coordenadas de los focos de dichas hipérbolas son independientes del valor de d y son $(2 + 5; 3)$ y $(2 - 5; 3)$. Entonces se puede afirmar que dichas hipérbolas son cofocales.

b) Las ecuaciones de las asíntotas corresponden a rectas que pasan por el centro $(2; 3)$ y cuyas pendientes son

$$\frac{b}{a} = \pm\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{25-d}}.$$

Entonces las asíntotas son:

$$\mathcal{A}_{1,2} : y - 3 = \quad \pm\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{25-d}}(x-2)$$

c)Reemplazando $(11; -9)$ en la ecuación $\frac{(x-2)^2}{25-d} - \frac{(y-3)^2}{d} = 1$ se obtiene $d = 16$.

d)Como el centro tiene coordenadas $(-2; 1)$ el foco superior tendrá coordenadas $(-2; 1+c)$ y como se encuentra a la misma altura que el extremo del lado recto de ordenada 14, se verifica que $1 + c = 14$. Luego, $c = 13$.

La ecuación de la hipérbola tiene la forma:

$$\mathcal{H} : \frac{(y-1)^2}{a^2} - \frac{(x+2)^2}{b^2} = 1$$

reemplazando el punto $\left(6;\ 1 + \frac{5\sqrt{13}}{3}\right)$, $b^2 = 169 - a^2$, y simplificando, se obtiene que $a = 5$ ó $a = \frac{13\sqrt{13}}{3}$($> 13$ por lo que se descarta esta respuesta).

Luego la ecuación dela hipérbola es:

$$\mathcal{H} : \frac{(y-1)^2}{25} - \frac{(x+2)^2}{144} = 1$$

y de sus asíntotas:

$$\mathcal{A}_{1,2} : y - 1 = \pm\frac{5}{12}(x+2).$$

Ejemplo 1.54 *Sea la parábola $\mathcal{P}$ tal que los puntos $L(7; 16)$ y $R(15; 8)$ son extremos de su lado recto.*

a)Hallar la ecuación del eje focal de $\mathcal{P}$.

b)Si $\mathcal{H}$ es una hipérbola equilátera $(a = b)$, con centro en el eje focal de $\mathcal{P}$, que tiene como uno de sus focos a L y como de una de sus asíntotas a la directriz de $\mathcal{P}$, hallar la ecuación de la hipérbola $\mathcal{H}$. Dar todas las posibles soluciones.

Solución
a)Hallamos la ecuación del eje focal:
El foco F de $\mathcal{P}$ es punto medio de $\overline{LR}$: $F(11;12)$.
La pendiente de $\overline{LR}$ es -1 , luego la pendiente del eje focal es 1.
Ecuación del eje focal:

$$y = x + 1.$$

b) Como el centro se encuentra sobre el eje focal de $\mathcal{P}$: $C(\ x; x+1)$.
Como el centro se encuentra en la intersección de la directriz con el eje focal:

$$\begin{aligned} d(C;F) &= 2\,|p| \Longrightarrow d(C;F) = \frac{1}{2}d(L;R) \\ 2\sqrt{2(x-11)^2} &= 8\sqrt{2} \Rightarrow |x-11| = 4 \Rightarrow x = 7 \vee x = 15. \end{aligned}$$

De donde: $C(7;8)$ o $C(15;16)$.
En ambos casos las hipérbolas $\mathcal{H}$ tiene eje focal paralelo a los ejes de coordenadas.
Encontramos las ecuaciones de las 2 hipérbolas:
Distancia del foco F de la hipérbola al centro C (en ambos casos) es $c = 8$.
Como es un hipérbola equilátera $c^2 = 2a^2$, de donde $a^2 = 32$.
Luego las ecuaciones de las hipérbolas son:

$$\mathcal{H}_1 : \frac{(y-8)^2}{32} - \frac{(x-7)^2}{32} = 1, \mathcal{H}_2 : \frac{(x-15)^2}{32} - \frac{(y-16)^2}{32} = 1$$

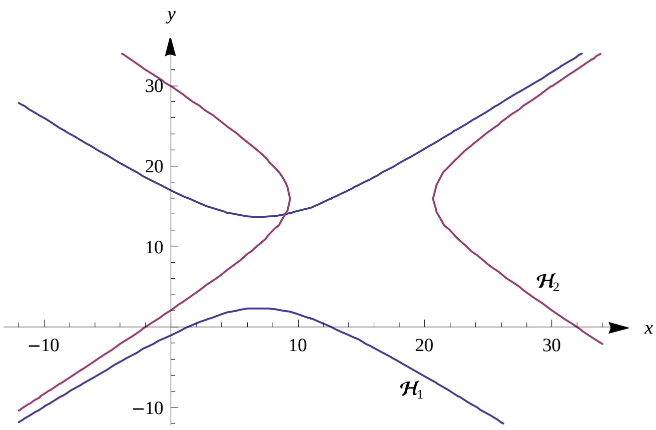


Figura 3.66 Ubicación de las dos posibles soluciones

Ejemplo 1.55 *Las asíntotas de la hipérbola* $\mathcal{H} : 9x^2 - 4y^2 - 18x + 8y - 31 = 0$ *contienen a los extremos de los lados rectos de una elipse* $\mathcal{E}$*. Hallar la ecuación de* $\mathcal{E}$ *, si se sabe que pasa por los vértices de la hipérbola* H *y que su eje focal es vertical.*

Solución
La ecuación de $\mathcal{H}$es:

$$\mathcal{H} : \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

Sus asíntotas son: $\mathcal{A}_1 : 3x - 2y - 1 = 0$ y $\mathcal{A}_2 : 3x + 2y - 5 = 0$.

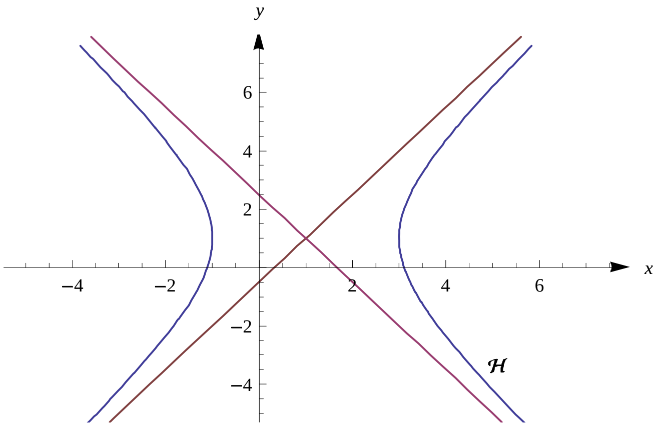


Figura 3.67 Ubicación de los datos del ejemplo

Como las asíntotas contienen los extremos de los lados rectos, entonces el centro de$\mathcal{E}$ es el centro de $\mathcal{H}$:$C(1;1)$

$$\mathcal{E}: \frac{(y-1)^2}{a^2} + \frac{(x-1)^2}{b^2} = 1.$$

$\mathcal{E}$ pasa por los vértices de $\mathcal{H}: b = 2$

Sea F_1 un foco $\mathcal{E}$: $F_1 = (1; 1 + c)$.

Reemplazamos $y = 1+c$ en las asíntotas $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ para hallar la longitud del lado recto restando los correspondientes valores x se obtiene:

$\frac{2b^2}{a} = \frac{4c}{3}$, de donde $ac = 6$.

Reemplazando en la relación:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Se obtiene $a^2 = 2 + 2\sqrt{10}$

Por lo tanto,

$$\mathcal{E}: \frac{(y-1)^2}{2+2\sqrt{10}} + \frac{(x-1)^2}{4} = 1.$$

1.7.4 Problemas propuestos

1)Considerar la circunferencia $\mathcal{C}: x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$.

Desde cada punto de la circunferencia se traza un segmento perpendicular al diámetro de $\mathcal{C}$ paralelo al eje X con extremo final en dicho diámetro.

Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico que describen los puntos medios de estos segmentos.

2)Si $\mathcal{A}_1 : x - 2y = 0$ es la ecuación de una de las asíntotas de la hipérbola $\mathcal{H}$cuyo eje focal es horizontal y cuyos vértices son los focos de la elipse

$\mathcal{E}$ y se sabe además que:

i)la distancia entre los focos de $\mathcal{H}$ es $4\sqrt{5}$

ii)$\mathcal{E}$ tiene dos extremos de sus lados rectos sobre $\mathcal{A}_1$ y que uno de los extremos del lado recto es el punto $(10; 5)$.

Hallar la ecuación de la elipse $\mathcal{E}$.

3)Un punto P del plano se mueve de modo que su distancia al punto $F(10; 1)$ es el triple de su distancia a la recta $\mathcal{D} : x = 2$.

a)Demostrar que el lugar geométrico que describe P corresponde a una hipérbola y hallar su ecuación.

b)Graficar la cónica encontrada en a), señalando las coordenadas de sus vértices y focos.

1.8 Rotación de ejes

Consideremos dos sistema de coordenadas cartesianas XY e $X'Y'$ con origen común O, de modo que el eje X' forma un ángulo θ con el eje X, como en la figura.

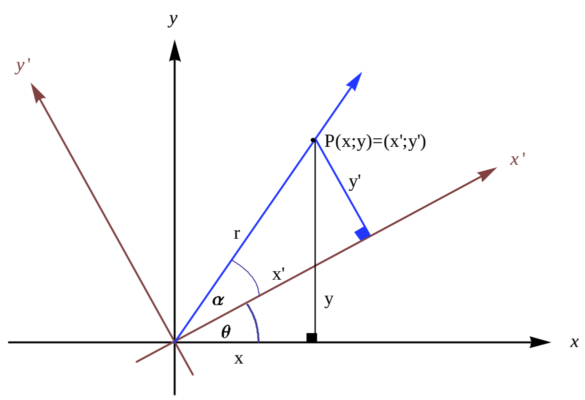


Figura 3.68 Coordenadas del punto P según dos sistemas de coordenadas cartesianas

Sean (x, y) las coordendas en el del sistema XY , y $(x'; y')$ las coordendas en el sistema $X'Y'$ de un punto cualquiera P del plano.

De la figura, si r es la longitud del segmento $\overline{OP}$, entonces las coordenadas del punto P en el sistema XY están dadas por:

$$x = r\cos(\theta + \alpha), \quad y = r\sin(\theta + \alpha), \cdots (1)$$

y en el sistema $X'Y'$, por

$$x' = r\cos\alpha, \quad y' = r\sin\alpha. \cdots (2)$$

De (1) tenemos

$$x = r\cos\theta\cos\alpha - r\sin\theta\sin\alpha, \;\; y = r\sin\theta\cos\alpha + r\cos\theta\sin\alpha,$$

y usando (2) resulta:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\sin\theta, \\ y &= x'\sin\theta + y'\cos\theta. \end{aligned}$$

Estas son las ecuaciones que relacionan las coordenadas de un punto $P(x; y)$ del sistema XY, con las correspondientes del sistema $X'Y'$. Se denominan *ecuaciones de rotación.*

1.8.1 Ecuación general de segundo grado en dos variables

Se llama *ecuación general de segundo grado en las variables x e y* a la ecuación de la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde A, B , C, D, E,y F son constante reales , y al menos uno de los coeficientes A, B ó C es diferente de cero.

El segundo término xy es llamado el *término rectangular*.

Esta ecuación se puede simplificar, mediante una rotación adecuada de los ejes coordenados, de modo que se elimine el término rectangular.

Teorema

La ecuación general de segundo grado:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

con B diferente de cero, puede transformarse en otra ecuación de la forma:

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

haciendo girar los ejes coordenados un ángulo $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ tal que:

$$\tan 2\theta = \frac{B}{A-C}, \text{si } A \neq C \quad \text{ó} \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \text{ si } A = C$$

Este resultado es cierto pues si se usan las ecuaciones de rotación:

$$\begin{cases} x = x' \cos\theta - y' \sin\theta \\ y = x' \sin\theta + y' \cos\theta \end{cases}$$

se tiene:

$$\begin{aligned} &A\left(x'\cos\theta - y'\sin\theta\right)^2 + B\left(x'\cos\theta - y'\sin\theta\right)\left(x'\sin\theta + y'\cos\theta\right) + \\ &C\left(x'\sin\theta + y'\cos\theta\right)^2 + D\left(x'\sin\theta + y'\cos\theta\right) + E\left(x'\sin\theta + y'\cos\theta\right) + F = 0 \end{aligned}$$

Y desarrollando y agrupando términos semejantes se obtendrá

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

donde

$$\begin{aligned} A' &= A\cos^2\theta + B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta \\ B' &= B\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) + 2\left(C - A\right)\sin\theta\cos\theta \\ C' &= A\sin^2\theta - B\sin\theta\cos\theta + C\cos^2\theta \\ D' &= D\cos\theta + E\sin\theta \\ E' &= -D\sin\theta + E\cos\theta \\ F' &= F \end{aligned}$$

Para eliminar el el término $x'y'$, se debe elegir un ángulo θ tal que B' sea cero.

Por lo tanto,

$$B\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) + 2\left(C - A\right)\sin\theta\cos\theta = 0$$

$$B\cos 2\theta + \left(C - A\right)\sin 2\theta = 0$$

Si $A = C$, la ecuación se transforma en $B\cos 2\theta = 0$ y como $B \neq 0$ deducimos que

$$\cos 2\theta = 0$$

Como $2\theta \in]0;\pi[$, concluimos que $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

Si $A \neq C$ entonces se tiene que

$$\tan 2\theta = \frac{B}{A-C}$$

$$\tan 2\theta = \frac{B}{A-C}, \text{si } A \neq C \ \text{ ó } \ \theta = \frac{\pi}{4} \text{ ,si } A = C$$

Convenio sobre el ángulo de rotación

Se seleccionará un ángulo de rotación θ agudo, es decir, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$. Luego, $0 < 2\theta < \pi$.

De esta manera al resolver la ecuación $\tan 2\theta = \frac{B}{A-C}$ se debe seleccionar 2θ solo en los cuadrantes I ó II del plano XY.

Nota: Para el nuevo sistema de coordenadas se emplearán las variables x'e y' o las variables u y v.

1.8.2 Identificación de las cónicas representadas por una ecuación general de segundo grado

Cuando se consigue un ángulo θ adecuado para que B'=0, la ecuación:

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

se convertirá en:

$$A'\left(x'\right)^2 + C'\left(y'\right)^2 + D'x' + E'y' + F' = \dot{0}.$$

Y como se vio en las secciones previas, esta ecuación representa un lugar geométrico conocido: puede tratarse de una parábola, elipse o hipérbola.

Propiedad

a) Se tratará de una elipse si $B^2 - 4AC < 0$.
b) Se tratará de una parábola si $B^2 - 4AC = 0$.
c) Se tratará de una hipérbola si $B^2 - 4AC > 0$.

Ejemplo 1.56 *Dada la ecuación $8x^2+4xy+5y^2+16x+4y-28 = 0$, hallar las coordenadas del centro y del eje focal de la cónica en el sistema XOY y graficarla en dicho sistema.*

Solución

Si θ es el ángulo que se debe rotar el eje x para obtener la ecuación de la cónica en un sistema de coordenadas con eje focal paralelo a uno de los nuevos ejes de coordenadas, entonces:

$$\tan 2\theta = \frac{4}{3}$$

$$\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{4}{3} \quad \text{y} \ \tan\theta = \frac{1}{2}$$

Entonces $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$
Y las ecuaciones de rotación serían:

$$\begin{cases} x = \frac{2u-v}{\sqrt{5}} \\ y = \frac{2v+u}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

reemplazando en la ecuación dada, esta se transforma en:

$$\frac{\left(u+2/\sqrt{5}\right)^2}{4} + \frac{\left(v-1/\sqrt{5}\right)^2}{9} = 1$$

Obteniéndose que el centro en el sistema UOV es $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ y en el sistema XOY es $(-1; 0)$.

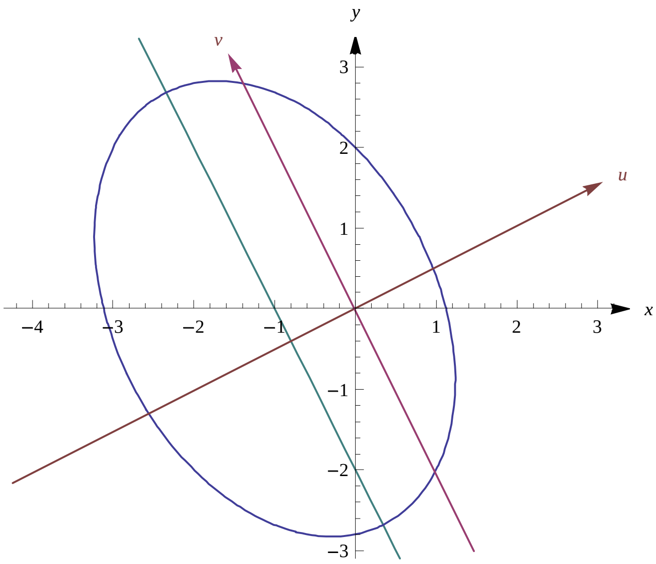


Figura 3.69 Ubicación de la elipse en los sistemas xy y uv

El eje focal en el sistema UOV es $u = \frac{-2}{\sqrt{5}}$ y en el sistema XOY es $y + 2x + 1 = 0$.

Ejemplo 1.57 *Dada la curva de ecuación* $x^2 + 4xy + 4y^2 + 6\sqrt{5}\,x - 18\sqrt{5}\,y + 45 = 0$,

a)Hallar las ecuaciones de rotación del sistema de coordenadas rectangulares XY al sistema UV que permiten identificar la curva.

b)Hallar la ecuación de la curva en el sistema UV.

c)Hallar las coordenadas en el sistema XY del vértice de la curva.

Solución

a) $\tan(2\theta) = \frac{-4}{3}$ entonces $\tan(\theta) = 2$ ó $\tan(\theta) = -1/2$

Entonces

$$x = \frac{u-2v}{\sqrt{5}} \quad y = \frac{v+2u}{\sqrt{5}}$$

b) Reemplazando en la ecuación dada se obtiene:

$$(u-3)^2 = 6v$$

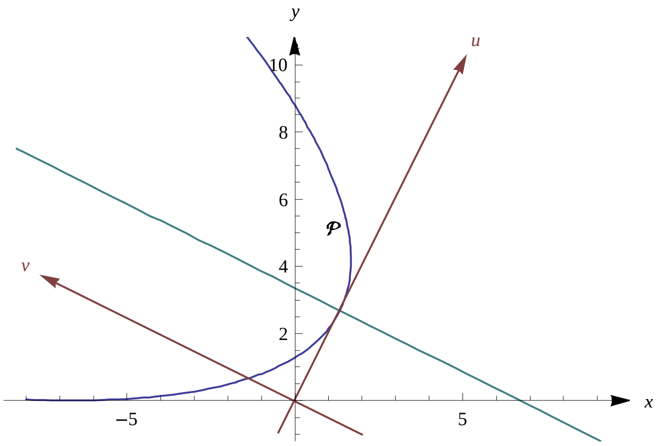


Figura 3.70 Ubicación de la parábola en los sistemas xy y uv

c) En UV el vértice es $(3;0)$, el eje focal tiene ecuación $u = 3$ y la recta que contiene al lado recto tiene ecuación $v = 3/2$.

Reemplazando estos valores en las ecuaciones de transformación,

En XY : Vértice=$\left(\frac{3}{\sqrt{5}}; \frac{6}{\sqrt{5}}\right)$.

Ejemplo 1.58 *Considerar la elipse $\mathcal{E}$ de vértices $V_1(-1;-1)$ y $V_2(3;3)$ y excentricidad $\frac{1}{2}$. La hipérbola $\mathcal{H}$ tiene como focos a los vértices de $\mathcal{E}$ y como vértices a los focos de $\mathcal{E}$. Hallar:*

a)La ecuación de $\mathcal{H}$ en el sistema UV, considerando que el eje focal de $\mathcal{E}$ coincide con el eje coordenado U.

b)La ecuación general de segundo grado de $\mathcal{H}$ en el sistema XY.

c)La ecuación de una de las asíntotas de $\mathcal{H}$ en el sistema XY.

Solución

a) En el sistema UV:

La elipse $\mathcal{E}$**:** longitud del semieje mayor $a = 2\sqrt{2}$.

De la excentricidad $e = c/a$ obtenemos $c = \sqrt{2}$

Centro $C(\sqrt{2};0)$

Entonces en la hipérbola $\mathcal{H}$: Centro $C(\sqrt{2},0)$; $a = \sqrt{2}$; $c = 2\sqrt{2}$ y de la relación $c^2 = a^2 + b^2$ obtenemos $b = \sqrt{6}$.

La ecuación de la hipérbola en el sistema UV es:

$$\frac{(u-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{v^2}{(\sqrt{6})^2} = 1 ...(\alpha)$$

b) **En el sistema** XY

Ecuaciones de Rotación :

$$\begin{cases} u = x\cos\theta + y\sin\theta \\ v = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

Con $\theta = \pi/4$ se tiene:

$$\begin{cases} u = x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2} \\ v = -x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2} \end{cases}$$

Reemplazando en la ecuación (α) se tiene

$$\mathcal{H}: x^2 + y^2 + 4xy - 6x - 6y = 0$$

c) Las ecuaciones de las asíntotas de $\mathcal{H}$ en UV son: $v = \pm\sqrt{3}\ (u - \sqrt{2})$
Luego en XY las asíntotas de $\mathcal{H}$ son:

$$-x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2} = \pm\sqrt{3}(x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2} - \sqrt{2})$$

Las ecuaciones de las asíntotas serán:

$$\mathcal{A}_1 : (\sqrt{3}+1)x + (\sqrt{3}-1)y = 2\sqrt{3}$$

$$\mathcal{A}_2 : (\sqrt{3}-1)x + (\sqrt{3}+1)y = 2\sqrt{3}$$

Ejemplo 1.59 *Dada la curva $\mathcal{C}$ cuya ecuación es:* $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 = 10$,

a) hallar las ecuaciones de rotación del sistema XY al sistema UV que permitan identificar la curva $\mathcal{C}$.
b) hallar la ecuación de la curva $\mathcal{C}$ en el sistema UV, y graficarla en el plano, mostrando los dos sistemas de coordenadas.
c) hallar la ecuación del eje focal en ambos sistemas.
Solución
a)De la curva

$$\mathcal{C} : 2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 = 10(*)$$

Determinando el ángulo de rotación: $\cot(2\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, por lo tanto $\theta = 30^0$.

Las ecuaciones de rotación son: $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v \\ y = \frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v \end{cases}$

b) Reemplazando en $(*)$ y
simplificando se obtiene: $\frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{20} = 1$.
Cuya gráfica es:

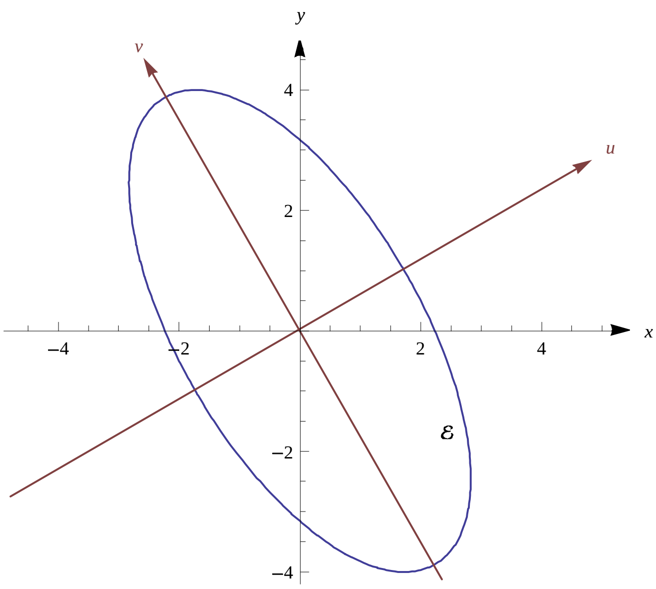


Figura 3.71 Ubicación de la elipse en los sistemas xy y uv

c) La elipse tiene como eje focal al eje V.
Por lo tanto la ecuación de su eje focal en UV es $u = 0$ y en XY es $y = -\sqrt{3}x$.

Ejemplo 1.60 *Los ejes coordenados de un sistema cartesiano XY son rotados un ángulo θ entre 0 y $\pi/2$, obteniéndose un nuevo sistema UV, en el cual la ecuación de la parábola $\mathcal{P}$ viene dada por $\mathcal{P} : (v-4)^2 = -8(u-2)$. Si en el sistema XY, la ecuación del eje focal de $\mathcal{P}$ es $y = \frac{24}{7}x + b$,*

a) Hallar las ecuaciones de rotación del sistema XY al sistema UV.
b) Determinar la ecuación de la parábola $\mathcal{P}$ en el sistema XY.
c) Encontrar las ecuaciones del eje focal de $\mathcal{P}$ en ambos sistemas.
d) Graficar $\mathcal{P}$ en el sistema XY.

Solución
a)El eje focal de $\mathcal{P}$ es paralelo al eje U, luego la pendiente del eje U (en el sistema XY) es igual a $\frac{24}{7}$.
Luego, $\tan\theta = \frac{24}{7}$.
Las ecuaciones de rotación del sistema XY al sistema UV son:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{25}(7u - 24v) \\ y = \frac{1}{25}(24u + 7v) \end{cases}$$

b)Para determinar una ecuación de la parábola $\mathcal{P}$, encontramos u y v en términos de x e y.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{25}(7u - 24v) \\ y = \frac{1}{25}(24u + 7v) \end{cases},$$

reemplazando en la ecuación dada de la parábola, tenemos:

$$\mathcal{P} : \left(-\frac{24}{25}x + \frac{7}{25}y - 4\right)^2 = -8\left(\frac{7}{25}x + \frac{24}{25}y - 2\right)$$

c)La ecuación del eje focal en UV es $v = 4$.
La ecuación del eje focal en XY es :

$$y = \frac{24}{7}x + \frac{100}{7}$$

d) Y la gráfica correspondiente es la siguiente:

Figura 3.72 Ubicación de la parábola en los sistemas xy y uv

Ejemplo 1.61 *Considerar la elipse $\mathcal{E}$, cuyos centro y vértice en el sistema XY son los puntos $(8;4)$ y $(2;-4)$, respectivamente. Si además se sabe que cada uno de sus lados rectos mide 5 unidades,*

a)Hallar el ángulo de rotación adecuado para que el eje focal de $\mathcal{E}$ sea paralelo a uno de los ejes coordenados del nuevo sistema de coordenadas.

b)Encontrar la ecuación de $\mathcal{E}$ en el nuevo sistema.

c)Graficar $\mathcal{E}$, mostrando en el mismo gráfico los dos sistemas de coordenadas y señalando las coordenadas de los focos en ambos sistemas.

Solución

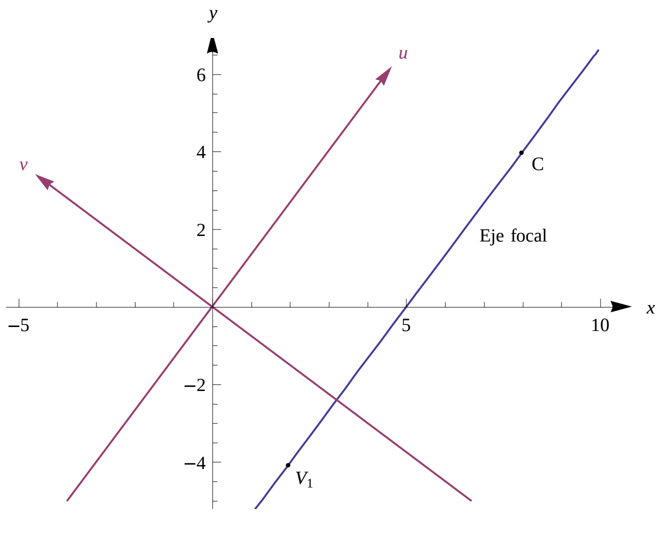


Figura 3.73 Ubicación del eje focal de la elipse y del nuevo sistema uv

a)Como el centro y el vértice dado pertenecen al eje focal, la pendiente de la recta que los contiene será la pendiente del eje U. Luego, sea θ el ángulo de giro, así $\tan\theta = \frac{4}{3}$

Las ecuaciones de rotación son:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{5}(3u - 4v) \\ y = \frac{1}{5}(4u + 3v) \end{cases}$$

b) Hallamos los valores de a y b:

$$a = d(P_0; V_1) = 10 \text{ unidades.}$$

Como la longitud de sus lados rectos son 5 unidades:

$$\frac{2b^2}{a} = 5.$$

De aquí, $b = 5$ unidades.

Determinamos las coordenadas de P_0 y V_1, en el nuevo sistema UV, considerando las ecuaciones:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{5}(3x + 4y) \\ v = \frac{1}{5}(-4x + 3y) \end{cases}$$

Centro: $C(8; -4)$.

Luego, la ecuación de la elipse en el nuevo sistema es:

$$\mathcal{E} : \frac{(u-8)^2}{100} + \frac{(v+4)^2}{25} = 1.$$

c) Y la respectiva gráfica será:

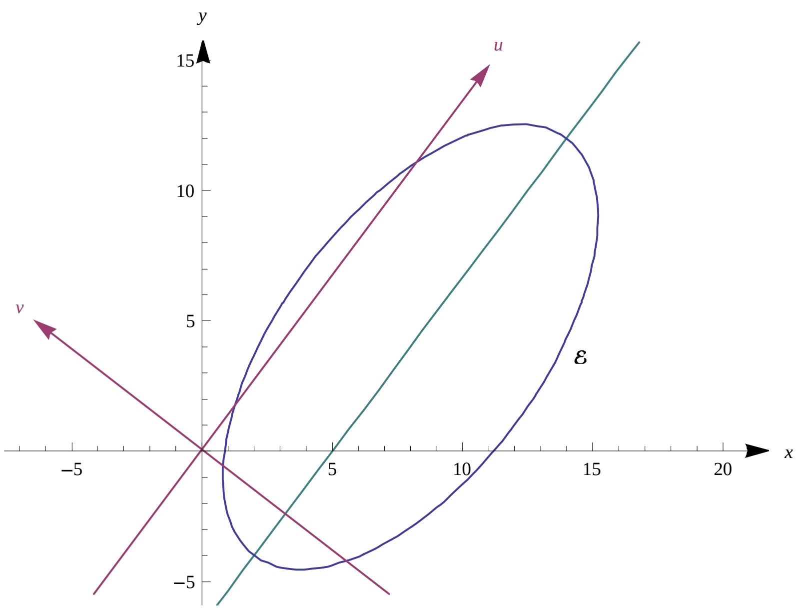


Figura 3.74 Ubicación de la elipse en los sistemas uv y xy

Ejemplo 1.62 *Hallar las coordenadas de los puntos de intersección del eje focal de la cónica*

$$\mathcal{C} : 48xy - 18x^2 - 32y^2 + 40x + 280y - 200 = 0$$

con la elipse cuyo centro se encuentra en el punto $\left(-3; \frac{5}{2}\right)$*, tiene un vértice en* $\left(-8; \frac{5}{2}\right)$ *y un foco en* $\left(1; \frac{5}{2}\right)$.

Solución:

$$\begin{aligned} & 9x^2 + 16y^2 - 24xy - 20x - 140y + 100 = 0 \\ & \Rightarrow \tan(2\theta) = \tfrac{24}{7} \\ \text{tenemos} \quad & \Rightarrow \cos(2\theta) = \tfrac{7}{25} \text{ó} \quad \tan\theta = \tfrac{3}{4} \\ & \Rightarrow sen(\theta) = \tfrac{3}{5} \text{ y } \cos(\theta) = \tfrac{4}{5} \\ & \Rightarrow \cdots v^2 - 4u - 4v + 4 = 0. \end{aligned}$$

Entonces

$$\mathcal{C} : (v-2)^2 = 4u.$$

Su eje focal en UV es : $v = 2$
entonces eje focal en XY es:

$$y = \tan(\theta) + \frac{2}{\cos(\theta)} = \frac{3}{4}x + \frac{10}{4}$$

Por otro lado, como la ecuación de la elipse es:

$$\mathcal{E} : \frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(y-2,5)^2}{9} = 1$$

al intersecar dichas curvas se obtendrá:

$$\frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(3x)^2}{16 \times 9} = 1$$

El punto de intersección será:

$$x = \frac{-48 \pm 80\sqrt{2}}{41}, \ y = \frac{133 \pm 120\sqrt{2}}{82}$$

Ejemplo 1.63 *Considerar la ecuación*

$$25x^2 + 30xy + 9y^2 + 24\sqrt{34}x - 40\sqrt{34}y + 816 = 0$$

a) Reemplazar las variables x e y por las expresiones

$$x = u\cos\theta - v\sin\theta, y = u\sin\theta + v\cos\theta$$

e identificar el coeficiente del término uv en función de $\sin\theta$ y $\cos\theta$.
b) Resolver la ecuación trigonométrica generada al exigir que el coeficiente hallado en a) sea cero.
Dar como respuesta el valor de $\tan\theta$, para θ que corresponde a un ángulo de rotación en el intervalo $\left]0; \ \frac{\pi}{2}\right]$.
Solución
a)
$25(u\cos\theta - v\sin\theta)^2 + 30(u\cos\theta - v\sin\theta)(u\sin\theta + v\cos\theta) + \cdots$

$\cdots + 9(u\sin\theta + v\cos\theta)^2 + 24\sqrt{34}(u\cos\theta - v\sin\theta) - \cdots$

$\cdots - 40\sqrt{34}(u\sin\theta + v\cos\theta) + 816 = 0.$
Identificando el coeficiente del término mixto se tiene:

$$-50\cos\theta\sin\theta + 30\cos^2\theta - 30\sin^2\theta + 18\sin\theta\cos\theta$$

b) Al resolver la ecuación trigonométrica

$$-50\cos\theta\sin\theta + 30\cos^2\theta - 30\sin^2\theta + 18\sin\theta\cos\theta = 0$$

se obtiene $\tan(2\theta) = \frac{15}{8}$
y usando la identidad de la tangente del ángulo doble:

$$\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{15}{8}.$$

Resolviendo la ecuación cuadrática, se obtiene:

$$\tan\theta = \frac{3}{5} ó \tan\theta = -\frac{5}{3}.$$

Por la condición dada, elegimos $\tan\theta = \frac{3}{5}$.

Ejemplo 1.64 *Sean las ecuaciones, en el sistema XY, de las curvas:*

$$\mathcal{S} : 9x^2 - 24xy + 16y^2 - 86x - 52y + 41 = 0 \qquad y \quad \mathcal{C} : x^2 + y^2 - 4x = 0$$

El sistema de coordenadas XY se rota un ángulo agudo en sentido antihorario, de modo que en el nuevo sistema de coordenadas UV la curva $\mathcal{S}$ no tiene término uv. Hallar, en ambos sistemas de coordenadas, la ecuación de la recta $\mathcal{L}$ que pasa por un vértice de $\mathcal{S}$ y por el centro de $\mathcal{C}$.

Solución

$$\tan(2\theta) = \frac{B}{A-C} = \frac{-24}{-7} = \frac{24}{7},$$

entonces $\cos(2\theta) = \frac{7}{25}$.

Luego, $\sin\theta = \frac{4}{5}$ y $\cos\theta = \frac{3}{5}$.

Entonces las ecuaciones de rotación son:

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{5}(3u+4v) \\ y = \frac{1}{5}(4u-3v) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u = \frac{1}{5}(4x+3y) \\ v = \frac{1}{5}(-3x+4y) \end{array}\right.$$

Reemplazando en $\mathcal{S}$ se obtiene:

$$\frac{9}{25}(16u^2 - 24uv + 9v^2) - \frac{24}{25}(12u^2 + 7uv - 12v^2) + \frac{16}{25}(9u^2 + 24uv + 16v^2) -$$

$$-\frac{86}{5}(4u - 3v) - \frac{52}{5}(3u + 4v) + 41 = 0$$

De donde: $25v^2 - 80u + 10v + 41 = 0$ ó $(5v+1)^2 = 80(u - \frac{1}{2})$

Es decir, $(v + \frac{1}{5})^2 = \frac{16}{5}(u - \frac{1}{2})$ una parábola y por lo tanto tiene un solo vértice.

Para el caso de la circunferencia, basta considerar su centro rotado, el centro en el sistema XY es $(2;0)$, luego en el sistema UV es

$$\left\{\begin{array}{l} u = \frac{1}{5}(4(2) + 3(0)) \\ v = \frac{1}{5}(-3(2) + 4(0)) \end{array}\right.$$

Entonces la recta en el sistema UV ha de pasar por los puntos $(\frac{1}{2}; -\frac{1}{5})$ y $(\frac{8}{5}; -\frac{6}{5})$

Por lo tanto la recta en este sistema tiene por ecuación:

$$\mathcal{L} : 50u + 55v - 14 = 0$$

1.8.3 Problemas propuestos

1) Dada la ecuación

$$x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 8\sqrt{3}x - 8y + 48 = 0,$$

graficarla con respecto al sistema de coordenadas XOY dado y hallar las coordenadas de su vértice.

2) Hallar la ecuación de la curva cuya ecuación en el sistema XY es:

$$5x^2 - 20xy - 10y^2 + 8x - 4y - 28 = 0$$

en un sistema de coordenadas donde no esté presente el término rectangular y graficarla.

3) Hallar las ecuaciones de rotación para que el eje focal de la parábola con foco $F\,(11;6)$ y vértice $V\,(14;8)$ sea paralelo a uno de los nuevos ejes coordenados.

Capítulo 2

Introducción al Álgebra Lineal

2.1 Introducción al espacio $\mathbb{R}^n$

2.1.1 Vectores en $\mathbb{R}^n$.

El conjunto de las n-uplas de número reales, $n \geq 1$, se representa por $\mathbb{R}^n$; es decir

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R} \text{ para } i = 1, ..., n\}.$$

Los elementos de $\mathbb{R}^n$ serán llamados *vectores* y al vector $(a_1, ..., a_n)$ lo denotaremos por A. El número a_i se llama i-ésima componente del vector A.

En $\mathbb{R}^n$ definimos una relación de igualdad y dos operaciones:

1. *Igualdad de vectores.* Si $A = (a_1, ..., a_n)$ y $B = (b_1, ..., b_n)$ son vectores en $\mathbb{R}^n$, entonces
$$A = B \Leftrightarrow a_i = b_i \text{ para todo } i = 1, ..., n$$

2. *Adición de vectores.* Si $A = (a_1, ..., a_n)$ y $B = (b_1, ..., b_n)$ son vectores en $\mathbb{R}^n$, entonces
$$A + B = (a_1 + b_1, ..., a_n + b_n).$$

3. *Multiplicación de vectores por escalares.* Si α es un número real y $A = (a_1, ..., a_n)$ es un vector en $\mathbb{R}^n$, entonces
$$\alpha A = (\alpha a_1, ..., \alpha a_n).$$

Proposición 2.1 *El conjunto $\mathbb{R}^n$ con la relación de igualdad y las operaciones de adición de vectores y multiplicación de vectores por números reales, se llama espacio vectorial real n-dimensional.*

1.$\forall A, B \in \mathbf{R}^n$ se cumple que $A + B \in \mathbf{R}^n$.

2.$\forall A, B \in \mathbf{R}^n$, $A + B = B + A$.

3.$\forall A, B, C \in \mathbf{R}^n$, $A + (B + C) = (A + B) + C$.

4.$\exists! \theta \in \mathbf{R}^n, \forall A \in \mathbf{R}^n$:
$$A + \theta = A.$$

El elemento θ de $\mathbf{R}^n$, llamado vector cero, está dado por

$$\theta = (0, ..., 0).$$

5.$\forall A \in \mathbf{R}^n, \exists! (-A) \in \mathbf{R}^n$:
$$A + (-A) = \theta.$$

El vector $-A$, llamado opuesto de A, es

$$-A = (-1)\,A.$$

6.$\forall A \in \mathbf{R}^n, \forall \alpha \in \mathbf{R},\ \alpha A \in \mathbf{R}^n.$

7.$\forall A \in \mathbf{R}^n, \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R},\ (\alpha + \beta)\,A = \alpha A + \beta A.$

8.$\forall A, B \in \mathbf{R}^n, \forall \alpha \in \mathbf{R},\ \alpha\,(A + B) = \alpha A + \alpha B.$

9.$\forall A \in \mathbf{R}^n, \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R},\ \alpha\,(\beta A) = (\alpha\beta)\,A.$

10.$\forall A \in \mathbf{R}^n : 1A = A.$

La expresión *espacio vectorial* $\mathbf{R}^n$ se referirá, al espacio $(\mathbf{R}^n, +, \mathbf{R}, \cdot)$ con las operaciones definidas anteriormente. Observar que para $n = 1, 2, 3$ tenemos los conocidos $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ respectivamente.

La sustracción de vectores puede ser definida en términos de la adición del siguiente modo.

Definición 2.1 *Para $A, B \in \mathbb{R}^n$ cualesquiera*

$$A - B = A + (-B)$$

es decir,

$$A - B = (a_1 - b_1, ..., a_n - b_n)\,.$$

Definición 2.2 *Si $A_1, ..., A_m$ son vectores en $\mathbf{R}^n$ y $\alpha_1, ..., \alpha_m$ son escalares, el vector*

$$\alpha_1 A_1 + ... + \alpha_m A_m$$

se llama combinación lineal de los vectores A_i con coeficientes α_i.

En la siguiente proposición, enunciamos algunas propiedades básicas.

Proposición 2.2 *Demostrar que*
1. $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha\theta = \theta,$
2. $\forall A \in \mathbb{R}^n : 0A = \theta,$ *y*
3. $\alpha A = \theta \Rightarrow \alpha = 0$ *o* $A = \theta.$

Representación geométrica de vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

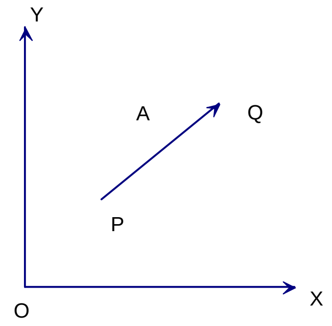
Representación geométrica de un vector. Cada vector en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ puede ser representado gráficamente en el plano o el espacio de la siguiente manera:

a. Como un punto.

b. Como un radio vector. Es decir como flechas con origen en el origen de coordenadas y su extremo en un punto del plano o del espacio con coordenadas las componentes del vector

$$P = (a_1, a_2) \qquad\qquad\qquad\qquad P = (a_1, a_2, a_3)$$

c. Como una flecha o segmento dirigido. El origen es un punto P cualquiera y el extremo será el punto Q tal que $A = Q - P$. Por ejemplo, en el plano se tiene



$$A = Q - P$$

2.1.2 Paralelismo de vectores.

Definición 2.3 *Sean A y B dos vectores en $\mathbb{R}^n$, decimos que A es paralelo a B, si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $B = \alpha A$.*

Observemos que el vector cero es paralelo a todos los vectores, pues $\theta = 0A$ para todo $A \in \mathbf{R}^n$.

Definición 2.4 *Sean A y B dos vectores no nulos en $\mathbb{R}^n$, si A es paralelo a B decimos que:*

1. *tienen sentidos iguales si $B = \alpha A$ donde $\alpha > 0$, y*
2. *tienen sentidos opuestos si $B = \alpha A$ con $\alpha < 0$.*

2.1.3 Producto escalar y norma.

Definición 2.5 *Dados los vectores $A = (a_1, ..., a_n)$ y $B = (b_1, ..., b_n)$ en $\mathbb{R}^n$, el producto escalar de A y B, representado por $A \cdot B$, es el número real*

$$A \cdot B = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

En particular, si $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$ en $\mathbb{R}^2$

$$A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

y si $A=(a_1,a_2,a_3)$ y $B=(b_1,b_2,b_3)$ en $\mathbb{R}^3$

$$A\cdot B=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

Nótese que el producto escalar de dos vectores es un número real y no es un vector. Las propiedades fundamentales del producto escalar son:

Teorema 2.1 *Para $A,B,C\in\mathbb{R}^n$ y para todo $\alpha\in\mathbb{R}$*

1. $A\cdot B=B\cdot A$

2. $\alpha(A\cdot B)=(\alpha A)\cdot B=\alpha(A\cdot B)$

3. $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$

4. $A\cdot A\geq 0$, $A\cdot A=0$ *si y sólo si* $A=\theta$

Definición 2.6 *La norma (o módulo) de un vector $A=(a_1,...,a_n)$ en $\mathbb{R}^n$, representada por $\|A\|$, es el número real*

$$\|A\|=\sqrt{A\cdot A}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}.$$

En particular, si $A=(a_1,a_2)$ en $\mathbb{R}^2$

$$\|A\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$$

y si $A=(a_1,a_2,a_3)$ en $\mathbb{R}^3$

$$\|A\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.$$

A $\mathbb{R}^n$ con la norma que acabamos de definir se le llama *espacio vectorial euclideano n-dimensional*. Las propiedades fundamentales de la norma de un vector son enunciadas a continuación.

Proposición 2.3 *Para $A,B\in\mathbb{R}^n$ y para $\alpha\in\mathbb{R}$ cualesquiera se cumplen:*

1.$\|A\|\geq 0$, $\|A\|=0\Leftrightarrow A=0$.

2.$\|\alpha A\|=|\alpha|\,\|A\|$.

3.(Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

$$|A\cdot B|\leq\|A\|\,\|B\|\,.$$

4.(Desigualdad triangular)

$$\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|\,.$$

La desigualdad triangular corresponde al teorema geométrico: la longitud de un lado de un triángulo no degenerado es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados.

Definición 2.7 *1.Un vector de norma igual a la unidad se llama vector unitario.*

2. El versor de un vector es un vector unitario con la misma dirección y sentido del vector.

Proposición 2.4 *Si A es un vector no nulo en $\mathbb{R}^n$, su versor es el vector*

$$U_A=\frac{A}{\|A\|}.$$

2.1.4 Ortogonalidad de vectores.

Sean A y B dos vectores no nulos en $\mathbb{R}^n$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz $\left(\frac{|A\cdot B|}{\|A\|\|B\|}\right)^2 \leq 1$, de donde $-1 \leq \frac{A\cdot B}{\|A\|\|B\|} \leq 1$. Por lo tanto, existe un único ángulo $\varphi \in [0,\pi]$ tal que $\cos(\varphi) = \frac{A\cdot B}{\|A\|\|B\|}$.

Definición 2.8 *El ángulo que forman los vectores no nulos A y B en $\mathbb{R}^n$, es el número real $\varphi \in [0,\pi]$ tal que*

$$\cos(\varphi) = \frac{A\cdot B}{\|A\|\,\|B\|}.$$

Definición 2.9 *Sean A y B dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^n$. Decimos que A es ortogonal a B, si el ángulo que forman es $\frac{\pi}{2}$.*

De acuerdo con la definición de ángulo entre dos vectores,

$$A \text{ es ortogonal a } B \Longleftrightarrow A\cdot B = 0$$

Como $A\cdot B = B\cdot A$, es claro que A ortogonal a B implica que B es ortogonal a A. Por esta razón se usa con frecuencia la expresión *mutuamente ortogonales.* Diremos también que A y B son ortogonales. El vector cero tiene la propiedad de ser ortogonal a todo los vectores.

2.1.5 Proyección ortogonal y componentes.

Definición 2.10 *Sean A y B vectores en $\mathbb{R}^n$ con $B \neq 0$. La proyección ortogonal de A sobre B, denotada $Proy_B A$, es el vector*

$$Proy_B A = \left(\frac{A\cdot B}{\|B\|^2}\right) B$$

Definición 2.11 *El número $\dfrac{A\cdot B}{\|B\|}$ se llama componente de A en la dirección de B y se denota $Comp_B A$, es decir*

$$Comp_B A = \frac{A\cdot B}{\|B\|}$$

En consecuencia, la relación entre la proyección y la componente es

$$\text{Proy}_B A = (\text{Comp}_B A)\, U_B,$$

es decir,

1. Si $\text{Comp}_B A > 0$, entonces $\text{Proy}_B A$ tiene el mismo sentido que B, y
2. Si $\text{Comp}_B A < 0$ entonces $\text{Proy}_B A$ y B tiene sentidos opuestos.
3. Si $\text{Comp}_B A = 0$ entonces A y B son ortogonales.

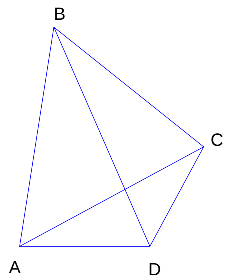
Ejercicios Propuestos

1. Probar que si $A, B \in \mathbb{R}^n$ son vectores no paralelos y
$$\alpha A + \beta B = \theta,$$
entonces $\alpha = \beta = 0$.

2. Sean $A, B \in \mathbb{R}^n$ vectores no paralelos dados, $C = (\alpha + \beta - 1) A + (\alpha + \beta) B$ y $D = (\alpha - \beta) A + (2\alpha - \beta) B$. Hallar los valores de α y β para que se cumpla la relación $C = 3D$.

3. Demuestre que el vector $\|A\| B + \|B\| A$ es paralelo a la bisectriz del ángulo que forman A y B. Hallar un vector unitario en la dirección de dicha bisectriz.

4. En el tetraedro de la figura



$a_1 = \overrightarrow{AD}$, $a_2 = \overrightarrow{CB}$, $a_3 = \overrightarrow{BD}$, $a_4 = \overrightarrow{AC}$, $a_5 = \overrightarrow{CD}$ y $a_6 = \overrightarrow{BA}$. Demostrar que
$$a_1 \cdot a_2 + a_3 \cdot a_4 + a_5 \cdot a_6 = 0.$$

5. Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$, demostrar que:

   (a) $\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$
   (b) $\|a+b\| \|a-b\| \leq \|a\|^2 + \|b\|^2$
   (c) $\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$
   (d) $\|a+b\| \|a-b\| \leq \|a\|^2 + \|b\|^2$

6. Sean A y B dos vectores unitarios que forman un ángulo θ. Demuestre que $\|A - B\| = 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$.

7. Halle un vector unitario que forme un ángulo de $45°$ con el vector $(2, 2, -1)$ y un ángulo de $60°$ con el vector $(0, 1, -1)$.

8. Los vectores $A, B \in \mathbb{R}^n$ forman un ángulo de $45°$ y $\|A\| = 3$. ¿Cuál debe ser el valor de $\|B\|$ para que:

   (a) $A - B$ sea perpendicular a A?
   (b) $A + B$ forme un ángulo de $30°$ con A?

9. Demostrar que dos vectores A y B en $\mathbb{R}^n$ son ortogonales si y sólo si
$$\|A + B\| = \|A - B\|$$

10. **(Teorema de Pitágoras).** Dos vectores A y B en $\mathbb{R}^n$ son ortogonales si y sólo si
$$\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2.$$

2.1.6 Producto vectorial y producto mixto en $\mathbb{R}^3$.

En esta sección introducimos el concepto de producto vectorial entre dos vectores de $\mathbb{R}^3$. Este concepto juega un papel importante en el electromagnetismo como también en la mecánica de fluídos cuando estudiamos los rotacionales de campos vectoriales.

Definición 2.12 *Dados los vectores $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$, el producto vectorial de A y B en ese orden, es el vector $A \times B$ definido por*

$$A \times B = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Proposición 2.5 *$A \times B$ es ortogonal tanto al vector A como al vector B.*
1.$A \times B = -B \times A$
2.$(\alpha A) \times B = \alpha (A \times B)$
3.$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
4.$(A + B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$
5.$\|A \times B\|^2 = \|A\|^2 \|B\|^2 - (A \cdot B)^2$
6.$\|A \times B\| = \|A\| \|B\| \sin(\varphi)$ *donde φ es el ángulo que forman A y B.*
El número $\|A \times B\|$ representa el área del paralelogramo determinado por los vectores A y B.

Proposición 2.6 *Los vectores A y B son paralelos si, y sólo si $A \times B = \theta$.*

Proposición 2.7 *Para $A, B, C \in \mathbf{R}^3$ cualesquiera*

$$A \times (B \times C) = (C \cdot A) B - (B \cdot A) C.$$

Corolario 2.2 *Si A, B y N son vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que $A \perp N$ y $B \perp N$, entonces $A \times B \parallel N$.*

Definición 2.13 *Dados los vectores A, B y C, el producto mixto de A, B y C en ese orden, es el número real $[A, B, C]$ definido por*

$$[A, B, C] = (A \times B) \cdot C.$$

Proposición 2.8 *1.Si $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ y $C = (c_1, c_2, c_3)$, entonces*

$$[A, B, C] = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

2.$[A, B, C] = [B, C, A] = [C, A, B]$.
3.$A \cdot (B \times C) = (A \times B) \cdot C$

Proposición 2.9 *1.Si $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ y $C = (c_1, c_2, c_3)$, entonces*

$$[A, B, C] = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

2.$[A, B, C] = [B, C, A] = [C, A, B]$.
3. $A \cdot (B \times C) = (A \times B) \cdot C$

El número $|[A, B, C]|$ representa el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores A, B y C.

2.1.7 Rectas en $\mathbb{R}^3$

Sea A un vector no nulo en $\mathbb{R}^3$. Si P_0 es un punto dado, entonces existe una única recta $\mathcal{L}$ que pasa por P_0 y tiene la dirección de A.

Sea P un punto genérico de la recta $\mathcal{L}$. Se verifica que

$$P = P_0 + \overrightarrow{P_0P}$$

y como $\overrightarrow{P_0P}$ es equivalente a t_0A, para algún $t_0 \in \mathbb{R}$, resulta que

$$P = P_0 + t_0A.$$

Para cada $t \in \mathbb{R}$ se tiene un punto perteneciente a la recta $\mathcal{L}$. Así

$$\mathcal{L} = \left\{P \in \mathbb{R}^3 : P = P_0 + tA,\ t \in \mathbb{R}\right\}$$

y

$$\mathcal{L} : P = P_0 + tA,\ t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

es la *ecuación vectorial* de la recta $\mathcal{L}$.

Si asumimos que $P = (x, y, z)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y $A = (a_1, a_2, a_3)$, sustituyendo en (1) tenemos

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t\,(a_1, a_2, a_3)\,,\ t \in \mathbb{R}$$

de donde

$$\mathcal{L} : \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$$

las que se denominan *ecuaciones paramétricas* de la recta $\mathcal{L}$.

Si las componentes a_1, a_2 y a_3 son distintas de cero, eliminando a t, se obtiene

$$\mathcal{L} : \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

que es la *ecuación simétrica de la recta.*

Definición 2.14 *Sean las rectas*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &: P = P_0 + tA,\ t \in \mathbb{R}, \\ \mathcal{L}_2 &: P = Q_0 + tB,\ t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

1.Las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son paralelas si A es paralelo a B.
2.Las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son perpendiculares si A es ortogonal a B.

Observación 2.1 *1.Si $\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2$, entonces $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \phi$ o $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$.*
2.Si $\mathcal{L}_1$ no es paralela, entonces $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{Punto\}$ o $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \phi$.

Definición 2.15 *Si $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ se intersecan, definimos el ángulo entre las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, al ángulo formado por sus respectivos vectores de dirección, es decir,*

$$\theta = \measuredangle(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = \measuredangle(A, B)$$

El ángulo θ se calcula mediante la siguiente relación:

$$\cos\theta = \frac{A \cdot B}{\|A\| \, \|B\|}, \quad 0 \leq \theta < \pi.$$

Ejemplo 2.1 *Hallar la ecuación vectorial de la recta $\mathcal{L}$ que pasa por el punto $Q = (3, 4, 0)$ y corta al eje Z, si se sabe que la distancia del origen de coordenadas a dicha recta $\mathcal{L}$ es 4 unidades.*

Solución
Considere $S = (0, 0, z_0)$ un punto del eje Z.
Sea $\mathcal{L}$ la recta pedida que tiene como vector de dirección $\overrightarrow{QS} = S - Q = (-3, -4, z_0)$.
Por condición del problema:

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{L}}(O) &= 4 \Longleftrightarrow \frac{\left\|\overrightarrow{QO} \times \overrightarrow{QS}\right\|}{\left\|\overrightarrow{QS}\right\|} = 4 \Longrightarrow \frac{\|(-3,-4,0) \times (-3,-4,z_0)\|}{\|(-3,-4,z_0)\|} = 4 \\ \frac{\|(-4z_0, -3z_0, 0)\|}{\sqrt{z_0^2 + 25}} &= 4 \Longrightarrow \frac{\sqrt{25z_0^2}}{\sqrt{z_0^2+25}} = 4 \Longrightarrow z_0 = \pm\frac{20}{3}. \end{aligned}$$

Así, $\overrightarrow{QS} = \left(-3, -4, \pm\frac{20}{3}\right) = -\frac{1}{3}(9, 12, \pm 20)$.
Luego, las ecuaciones de las rectas son :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &: P = (3,4,0) + t\,(9,12,20)\,, t \in \mathbf{R} \\ \text{o} \quad \mathcal{L}' &: P = (3,4,0) + t\,(9,12,-20)\,, t \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2 *Un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia*

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z = 3 \\ x + y + z = 1 \end{cases}.$$

tiene un vértice en la recta

$$\mathcal{L} : P = \left(-1, 1, \frac{1}{3}\right) + t\ \ (2, -1, 1)\,, t \in \mathbf{R}.$$

Hallar dos de sus vértices del triángulo.

Solución

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}.$$

Sea $P_1 \in \mathcal{L}$ vértice del triángulo: $P_1 = \left(-1 + 2t, 1 - t, \frac{1}{3} + t\right)$.
$P_1 \in \mathcal{P} : x + y + z = 1$,entonces $-1 + 2t + 1 - t + \frac{1}{3} + t = 1$, de donde $t = \frac{1}{3}$.Así, $P_1 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.Se observa que $P_1 \in \mathcal{E} : (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 6$, esfera con centro $C = (-1, -1, -1)$.

Considere la recta

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_N &: \; P = C + t\,N, t \in \mathbf{R}, \\
\mathcal{L}_N &: \; P = (-1,-1,-1) + t\,(1,1,1)\,, t \in \mathbf{R}.
\end{aligned}$$

Sea P_0 el centro de la circunferencia $-$.

$P_0 \in \mathcal{L}_N : P_0 = (-1+t, -1+t, -1+t) \in \mathcal{P} : x+y+z = 1$, de donde $-1+t-1+t-1+t = 1$ entonces $t = \frac{4}{3}$. Así, $P_0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Sea $P_2 = (a,b,c) \in \Gamma : \begin{cases} a^2+b^2+c^2 = 1 \\ a+b+c = 1 \Longrightarrow c = 1-a-b \end{cases}$.

Luego, $\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = \left(a+\frac{1}{3}, b-\frac{2}{3}, c-\frac{2}{3}\right)$

$\overrightarrow{P_1P_0} = P_0 - P_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}(2,-1,-1)$ forma un ángulo de $\frac{\pi}{6}$ con el vector $\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = \left(a+\frac{1}{3}, b-\frac{2}{3}, c-\frac{2}{3}\right)$. Luego,

$\cos(\frac{\pi}{6}) = \dfrac{\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}}{\left\|\overrightarrow{P_1P_0}\right\|\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\|} \Longleftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{(2,-1,-1)\cdot\left(a+\frac{1}{3}, b-\frac{2}{3}, c-\frac{2}{3}\right)}{\|(2,-1,-1)\|\left\|\left(a+\frac{1}{3}, b-\frac{2}{3}, c-\frac{2}{3}\right)\right\|}$

$\Longrightarrow$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2a-b-c+2}{\sqrt{3}\sqrt{\frac{2}{3}a - \frac{4}{3}b - \frac{4}{3}c + \underbrace{a^2+b^2+c^2}_{1} + 1}} \Longrightarrow$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2a-b-(1-a-b)+2}{\sqrt{6}\sqrt{\frac{2}{3}a - \frac{4}{3}b - \frac{4}{3}(1-a-b)+2}}$

$\Longrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a+1}{\sqrt{6}\sqrt{2a+\frac{2}{3}}} \Longrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a+1}{\sqrt{6}\frac{\sqrt{2}\sqrt{3a+1}}{\sqrt{3}}} \Longrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a+1}{2\sqrt{3a+1}} \Longrightarrow$

$\sqrt{3} = \sqrt{3a+1} \Longrightarrow a = \dfrac{2}{3}.$

Luego, $P_2 = \left(\dfrac{2}{3}, b, 1-\dfrac{2}{3}-b\right) = \left(\dfrac{2}{3}, b, \dfrac{1}{3}-b\right)$pertenece a $\Gamma : x^2+y^2+z^2 = 1$, de donde $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + b^2 + \left(\dfrac{1}{3}-b\right)^2 = 2b^2 - \frac{2}{3}b + \frac{5}{9} = 1 \Longrightarrow 9b^2-3b-2 = 0 : b = -\frac{1}{3}$ o $b = \frac{2}{3}$.

Por tanto, $P_2 = \left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ o $P_2' = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$.

Ejemplo 2.3 *Sea $\mathcal{L}$ la recta que pasa por el punto $M = (12,0,5)$ e interseca al eje Y en el punto N. Hallar la ecuación vectorial de la recta $\mathcal{L}$ si la distancia del origen de coordenadas a dicha recta $\mathcal{L}$ es 12 unidades.*

Solución

Considere $N = (0, y_0, 0)$ un punto del eje Y.

Sea $\mathcal{L}$ la recta pedida que tiene como vector de dirección $\overrightarrow{MN} = N - M = (0,y_0,0) - (12,0,5) = (-12, y_0, -5)$.

Por condición del problema:

$$\begin{aligned}
d_{\mathcal{L}}(O) &= 12 \Longleftrightarrow \frac{\left\|\overrightarrow{MO}\times\overrightarrow{MN}\right\|}{\left\|\overrightarrow{MN}\right\|} = 12 \\
&\Longrightarrow \frac{\|(-12,0,-5)\times(-12,y_0,-5)\|}{\|(-12,y_0,-5)\|} = 12 \\
\frac{\|(-5y_0,0,-12y_0)\|}{\sqrt{y_0^2+169}} &= 12 \Longrightarrow \frac{\sqrt{169y_0^2}}{\sqrt{y_0^2+169}} = 12 \Longrightarrow y_0 = \pm\frac{156}{5}.
\end{aligned}$$

Así, $\overrightarrow{MN} = (-12, y_0, -5) = \left(-12, \pm\frac{156}{5}, -5, \right)$.

Luego, las ecuaciones de las rectas son :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &: \quad P = (12,0,5) + t\left(-12, \frac{156}{5}, -5, \right), t \in \mathbb{R} \quad \text{o} \\ \mathcal{L}' &: \quad P = (12,0,5) + t\left(-12, -\frac{156}{5}, -5, \right), t \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos

1. Sean

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &: P = P_0 + tA,\ t \in \mathbb{R}\\ \mathcal{L}_2 &: P = Q_0 + tB,\ t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

   Demostrar que $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ si, y sólo si $P_0 \in \mathcal{L}_2$ y A es paralelo a B.

2. Si P_0 y Q_0 son puntos distintos, demostrar que la recta

$$\mathcal{L} : P = P_0 + t\,(Q_0 - P_0)\,,\ t \in \mathbb{R}$$

   pasa por P_0 y Q_0, siendo la única con esta propiedad.

3. Sea $A = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ un vector no nulo, probar que si B es ortogonal al vector A, entonces $B = \alpha\,(-a_2, a_1)$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$.

   Dado el vector $A = (a_1, a_2)$, el vector $(-a_2, a_1)$ será llamado *ortogonal* de A, y se representará por $A^{\perp}$. Así tenemos que la ecuación de la recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa por el punto P_0 y tiene la dirección del vector A también se puede escribir en la forma $\mathcal{L} : (P - P_0) \cdot A^{\perp} = 0$.

4. La recta $\mathcal{L} : 2x = 4z + 3,\ y = 2z - 5$ se proyecta (ortogonalmente) sobre los planos coordenados. Halle las ecuaciones de las rectas resultantes.

5. Halle la intersección de las rectas $\mathcal{L}_1 : P = (2, 1, 3) + t\,(1, 2, 1)$ y $\mathcal{L}_2 : P = (3, 1, 2) + s\,(-1, 1, 2)$.

6. Halle la ecuación vectorial de la recta que satisface las tres condiciones siguientes:

   (a) Pasa por el punto $(3, 4, -5)$.

   (b) Intersecta a la recta $P = (1, 3, -2) + t\,(4, 3, 2)$.

   (c) Es perpendicular a la recta $\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y-2}{3}$, $z = 5$.

2.1.8 Planos en $\mathbb{R}^3$

Sea N un vector no nulo en $\mathbf{R}^3$. Si P_0 es un punto dado, entonces existe un único plano $\mathcal{P}$ que pasa por P_0 y tiene normal N.

Sea P un punto genérico del plano $\mathcal{P}$. Se verifica que

$$\overrightarrow{P_0P} \perp N$$

y como $\overrightarrow{P_0P} = P - P_0$, resulta que

$$(P - P_0) \cdot N = 0.$$

Así

$$\mathcal{P} = \left\{P \in \mathbb{R}^3 : (P - P_0) \cdot N = 0\right\}$$

y

$$\mathcal{P} : (P - P_0) \cdot N = 0 \tag{2}$$

es la *ecuación normal* del plano $\mathcal{P}$.

Si asumimos que $P = (x, y, z)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y $N = (n_1, n_2, n_3)$, sustituyendo en (2) tenemos

$$[(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)] \cdot (a, b, c) = 0$$

de donde se obtiene

$$\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$$

que se denomina *ecuación cartesiana* del plano $\mathcal{P}$.

Definición 2.16 *Dada la recta $\mathcal{L} : P = P_0 + tA$, $t \in \mathbb{R}$ y el plano $\mathcal{P} : (P - P_0) \cdot N = 0$. Decimos que la recta $\mathcal{L}$ es paralela al plano*
$\mathcal{P}$ si y solo si A es ortogonal a N.

Observación 2.2 *1.Si $\mathcal{L}$ es paralela al plano $\mathcal{P}$ se tienen los casos :*
(i) $\mathcal{L} \cap \mathcal{P} = \mathcal{L}$
(ii) $\mathcal{L} \cap \mathcal{P} = \phi$.
2. Si $\mathcal{L}$ no es paralela al plano $\mathcal{P}$, entonces $\mathcal{L} \cap \mathcal{P} = \{Punto\}$

Definición 2.17 *Sean los planos $\mathcal{P}_1 : (P - P_0) \cdot N_1 = 0$ y $\mathcal{P}_2 : (P - Q_0) \cdot N_2 = 0$. Decimos que :*
(a)$\mathcal{P}_1$ es paralela al plano $\mathcal{P}_2$ si y solo si N_1 es paralelo a N_2.
(b)$\mathcal{P}_1$ es perpendicular al plano $\mathcal{P}_2$ si y solo si N_1 es ortogonal a N_2.

Observación 2.3 *Si $\mathcal{P}_1$ no es paralela a $\mathcal{P}_2$ entonces $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \mathcal{L}$.*

Ejemplo 2.4 *Hallar la ecuación cartesiana del plano que interseca a la recta*

$$\mathcal{L} : P = (1, 3, -3) + t\,(2, 1, -2)\,, t \in \mathbf{R}$$

en el punto $(m, 0, n)$ *y es perpendicular a otro plano* $\mathcal{P} : 3x - 3y + z = 2$. *Se sabe que el punto* $Q = (1, 1, 2)$ *está en la intersección de ambos planos.*

Solución

Sea π el plano buscado, entonces $Q = (1, 1, 2) \in \pi$. Bastará hallar el vector normal $n = (a, b, c)$

$n_P = (3, -3, 1) \rightarrow n_P \cdot n = 0 \rightarrow 3a - 3b + c = 0$ (condición 1)

$$\begin{array}{l}
\mathcal{L} : x = 1 + 2t\ ; y = 3 + t\ ; z = -3 - 2t \\
\mathcal{L} \cap \pi = (m, 0, n) \rightarrow y = 0 \rightarrow t = -3 \rightarrow x = -5, z = 3 \\
\rightarrow R = (-5, 0, 3) \in \pi \\
Q - R = (6, 1, -1) \perp n \rightarrow 6a + b - c = 0 \rightarrow c = 6a + b \text{ (cond.2)}
\end{array}$$

Resolviendo:

$$\begin{array}{rcl}
3a - 3b + (6a + b) & = & 0 \Longrightarrow 9a - 2b = 0 \rightarrow a = \dfrac{2}{9}b \rightarrow c = 6(\dfrac{2}{9}b) + b \rightarrow c = \dfrac{7}{3}b \\
(\dfrac{2}{9}b, b, \dfrac{7}{3}b) & = & \dfrac{1}{9}b(2, 9, 21) \rightarrow n = (2, 9, 21) \\
\pi & : & 2x + 9y + 21z + d = 0 \\
Q & = & (1, 1, 2) \in \pi \rightarrow 2(1) + 9(1) + 21(2) + d = 0 \rightarrow d = -53 \\
\pi & : & 2x + 9y + 21z - 53 = 0
\end{array}$$

Ejemplo 2.5 *Hallar la ecuación cartesiana de un plano* $\mathcal{P}$ *que pasa por los puntos* $Q = (0, 7, 0)$ *y* $R = (1, 5, 2)$, *y forma un ángulo de* $\dfrac{\pi}{4}$ *con el plano* $\mathcal{P}_1 : x + y - 4z + 5 = 0$.

Solución

Sea $N = (a, b, c)$ la normal del plano $\mathcal{P}$ buscado .

Consideren $Q = (0, 7, 0)$ y $R = (1, 5, 2)$ entonces $\overrightarrow{QR} = R - Q = (1, 5, 2) - (0, 7, 0) = (1, -2, 2)$ es el vector que está contenido en el plano $\mathcal{P}$.

Como $\overrightarrow{QR}$ está contenido en el plano $\mathcal{P}$ entonces $\overrightarrow{QR}$ es perpendicular al vector normal del plano $\mathcal{P}$. Así :

$$\begin{array}{rcl}
\overrightarrow{QR} & \perp & N \Longleftrightarrow N \cdot \overrightarrow{QR} = 0 \\
 & \Longleftrightarrow & (a, b, c) \cdot (1, -2, 2) = 0 \\
 & \Longrightarrow & a - 2b + 2c = 0 \Longrightarrow a = 2b - 2c
\end{array}$$

Por tanto, $N = (2b - 2c, b, c)$.

Si $N_1 = (1, 1, -4)$ y N son los vectores normales de $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}$, respectivamente.

Luego, $\cos(\dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{N_1 \cdot N}{\|N_1\|\,\|N\|}$

$\Longleftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{(1, 1, -4) \cdot (2b - 2c, b, c)}{\|(1, 1, -4)\|\,\|(2b - 2c, b, c)\|}$

$\Longleftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{3b - 6c}{3\sqrt{2}\sqrt{5b^2 + 5c^2 - 8bc}} \Longleftrightarrow 1 = \dfrac{b - 2c}{\sqrt{5b^2 + 5c^2 - 8bc}}$

$\Longrightarrow 5b^2 + 5c^2 - 8bc = b^2 + 4c^2 - 8bc$

$\Longrightarrow 4b^2 - 4bc + c^2 = 0 \Longrightarrow (2b - c)^2 = 0 \Longrightarrow c = 2b.$

Luego, $a = 2b - 2c = a = 2b - 2\,(2b) = -2b$

Así, $N = (-2b, b, 2b) = -b\,(2, -1, -2) \parallel (2, -1, -2)$.
Luego la ecuación del plano buscado es.:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P} & : & 2x - y - 2z + d = 0 \\ Q & = & (0,7,0) \in \mathcal{P} \to 2(0) - 7 - 2(0) + d = 0 \to d = 7. \end{array}$$

Así, $\mathcal{P} : 2x - y - 2z + 7 = 0$.

Ejemplo 2.6 *(a) Dadas dos rectas* ***no paralelas*** *que se* ***cruzan*** *(no se intersectan)*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}_1 & : & P = P_0 + t\,\overrightarrow{a},\ t \in \mathbf{R} \\ \mathcal{L}_2 & : & P = Q_0 + r\,\overrightarrow{b},\ r \in \mathbf{R} \end{array}$$

contenidas en los planos paralelos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ respectivamente. Demostrar que la distancia entre $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ está dada por:

$$d\,(\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2) = \frac{\left|\overrightarrow{P_0Q_0}\ .\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right\|}$$

b) Hallar la ecuación vectorial de la recta $\mathcal{L}$ que pasa por el punto $P_0 = (1,3,-1)$, es paralela al plano $\mathcal{P} : x + z - 2 = 0$ y dista 3 unidades de la recta

$$\mathcal{L}_0 : \left\{ \begin{array}{l} x - y - z = 2 \\ x - z = 2 \end{array} \right.$$

Solución

(a)Construimos dos planos paralelos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ que contengan a $\mathcal{L}_1$ y a $\mathcal{L}_2$ respectivamente. Puesto que $N = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ es normal a ambos planos entonces es perpendicular a los vectores de dirección de $\mathcal{L}_1$ y a $\mathcal{L}_2$.

Así, $d\,(\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2) = \left\|Proy_{\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}}\overrightarrow{P_0Q_0}\right\| = \left|Comp_{\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}}\overrightarrow{P_0Q_0}\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{P_0Q_0}\ .\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right\|}.$

(b)Sea $A = (a,b,c)$ el vector de dirección de $\mathcal{L}$. Como $\mathcal{L} \parallel \mathcal{P}$, entonces $A \cdot N = 0$, donde $N = (1,0,1)$ es el vector del plano $\mathcal{P}$. Entonces $(a,b,c) \cdot (1,0,1) = 0$, de donde $a + c = 0$ y así, $c = -a$. Luego, $A = (a, b, -a)$.

De $\mathcal{L}_0 : \left\{ \begin{array}{l} x - y - z = 2 \\ x - z = 2 \end{array} \right.$. ,se tiene: $y = 0$.

Parametrizando $\mathcal{L}_0$: sea $z = t$, $x = 2 + t$. Así, $\mathcal{L}_0 : P = (2,0,0) + t\underbrace{(1,0,1)}_{B}, t \in \mathbf{R}$.

$\mathcal{L}$ no es paralela a $\mathcal{L}_0$, por condición del problema se tiene:

$$3 = d\,(\mathcal{L},\mathcal{L}_0) = \frac{\left|\overrightarrow{P_0Q_0}\ .(A \times B)\right|}{\|(A \times B)\|}$$

$\overrightarrow{P_0Q_0} = Q_0 - P_0 = Q_0 = (2,0,0) - (1,3,-1) = (1,-3,1)$
$A \times B = (a, b, -a) \times (1,0,1) = (b, -2a, -b)$.
Así,

$$3 = d\,(\mathcal{L},\mathcal{L}_0) = \frac{\left|\overrightarrow{P_0Q_0}\ .((A \times B))\right|}{\|(A \times B)\|} = \frac{|(1,-3,1)\ \cdot (b,-2a,-b)|}{\|(b,-2a,-b)\|} = \frac{|6a|}{\sqrt{4a^2 + 2b^2}}\ ,$$

de donde $b = 0$.

Así, $A = (a, 0, -a) = a\,(1, 0, -1)$. Por tanto, la recta

$$\mathcal{L} : P = (1, 3, -1) + t\ \ (1, 0, -1)\,, t \in \mathbf{R}.$$

Ejemplo 2.7 *Sean el plano* $\mathcal{P}_1 : 3x+2y-z-5 = 0$ *y la recta* $\mathcal{L} : P = (1, -2, 2)+t(2, -3, 2)$, $t \in \mathbb{R}$. *Hallar:*

(a)*El punto de intersección de la recta con el plano* $\mathcal{P}_1$.

(b)*La ecuación cartesiana del plano* $\mathcal{P}_2$ *que contiene a la recta* $\mathcal{L}$ *y es perpendicular a* $\mathcal{P}_1$.

(c)*La ecuación vectorial de la recta* $\mathcal{L}_1$ *que contenida en* $\mathcal{P}_1$ *y* $\mathcal{P}_2$.

Solución

(a)Sea $\mathcal{L} : P = (1, -2, 2) + t(2, -3, 2) = (1 + 2t, -2 - 3t, 2 + 2t)$, $t \in \mathbf{R}$

$Q \in \mathcal{L}$ entonces $Q = (1 + 2t, -2 - 3t, 2 + 2t) \in \mathcal{P}_1 : 3x + 2y - z - 5 = 0$:

$3\,(1 + 2t) + 2(-2 - 3t) - (2 + 2t) - 5 = 0 \Longrightarrow -2t - 8 = 0 \Longrightarrow t = -4.$

Por tanto, $Q = (-7, 10, -6)$.

(b)Sea $N_2 = A \times N_1 = (2, -3, 2) \times (3, 2, -1) = (-1, 8, 13)$ la normal del plano buscado. Luego la ecuación del plano es

$$\mathcal{P}_2 : x - 8y - 13z + d = 0$$

puesto que $P_0(1, -2, 2) \in \mathcal{P}_2 : x-8y-13z+d = 0$ entonces $1-8\,(-2)-13\,(2)+d = 0$,de donde $d = 9$.

Por lo tanto,

$$\mathcal{P}_2 : x - 8y - 13z + 9 = 0.$$

(c)Sea $\mathcal{L}_1 : \begin{cases} 3x + 2y - z - 5 = 0....\,(4) \\ x - 8y - 13z - 9 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 12x + 8y - 4z = 20 \\ x - 8y - 13z = 9 \end{cases}$,

se tiene : $13x - 17z = 29$.

Parametrizando $\mathcal{L}_1$: sea $z = t$, $x = \frac{29}{13} + \frac{17}{13}t$.

De $3x+2y-z-5 = 0$, se tiene $2y = z+5-3x = t+5-3\left(\frac{29}{13} + \frac{17}{13}t\right) \Longrightarrow y = -\frac{19}{13}t-\frac{11}{13}$.

Así, $\mathcal{L}_1 : P = \left(\frac{29}{13}, -\frac{11}{13}, 0\right) + t\underbrace{\left(\frac{17}{13}, -\frac{19}{13}, 1\right)}_{B}, t \in \mathbf{R}.$

Ejemplo 2.8 *Dado un punto* $P_0 = (1, 1, 1)$. *Hallar la ecuación cartesiana de los planos* $\mathcal{P}$ *tales que* $d\,(P_0, \mathcal{P}) = \sqrt{10}$ *y es ortogonal a la recta*

$$\mathcal{L} : P = (0, 1, 2) + t(1, 0, 3), t \in \mathbb{R}.$$

Solución

Se observa que $P_0 = (1, 1, 1) \notin \mathcal{L} : P = (0, 1, 2) + t(1, 0, 3), t \in \mathbb{R}$.

Considere la recta

$$\mathcal{L}_N : P = (1, 1, 1) + t(1, 0, 3), t \in \mathbb{R}.$$

Sea $Q \in \mathcal{L}_N$ entonces existe un $t \in \mathbb{R}$ tal que $Q = (1 + t, 1, 1 + 3t)$.

Sea $d\,(P_0, \mathcal{P}) = d\,(P_0, Q) = \left\|\overrightarrow{P_0Q}\right\| = \|(t, 0, 3t\| = \sqrt{10t^2} = \sqrt{10} \Longrightarrow t = \pm 1.$

Si $t = 1 : Q = (2, 1, 4)$

La ecuación del plano es, $\mathcal{P} : (x - 2, y - 1, z - 4) \cdot (1, 0, 3) = 0$

Por tanto $\mathcal{P} : x + 3z - 14 = 0$.

Si $t = -1 : Q = (0, 1, -2)$

La ecuación del plano es, $\mathcal{P} : (x, y - 1, z + 2) \cdot (1, 0, 3) = 0$

Por tanto $\mathcal{P} : x + 3z + 6 = 0$

Ejemplo 2.9 *Dadas las rectas*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 \quad &: \quad P = (2,3,-3) + t \ \ (13,1,-4)\,, t \in \mathbb{R} \\ \mathcal{L}_2 \quad &: \quad P = (5,6,-3) + r \ \ (-13,-1,4)\,, t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

(a)*Hallar la ecuación cartesiana del plano $\mathcal{P}$ que contiene a las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$.*

(b)*Hallar la ecuación vectorial de la recta $\mathcal{L}$ que corta perpendicularmente a la recta $\mathcal{L}_1$ en el punto $Q = (2,3,-3)$ y es*
paralela al plano $\pi : 2x - z + 3 = 0$.

Solución

(a)Se observa que $\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2$

Sea $A = (13,1,-4)$ el vector de dirección de $\mathcal{L}_1$.

$\overrightarrow{P_0Q_0} = Q_0 - P_0 = (5,6,-3) - (2,3,-3) = (3,3,0)\,.$

Sea $N = A \times \overrightarrow{P_0Q_0} = (13,1,-4) \times (3,3,0) = (12,-12,36) = 12\,(1,-1,3)$

$N = (1,-1,3)$ la normal del plano buscado. Luego la ecuación del plano es

$$\mathcal{P} : x - y + 3z + d = 0$$

puesto que $P_0\,(2,3,-3) \in \mathcal{P} : x - y + 3z + d = 0$ entonces $\mathcal{P} : 2 - 3 + 3\,(-3) + d = 0$, de donde $d = 10$.

Por lo tanto,

$$\mathcal{P} : x - y + 3z + 10 = 0.$$

(b)Sea $u = (a,b,c)$ el vector de dirección de $\mathcal{L}$.

Si $\mathcal{L} \perp \mathcal{L}_1$, entonces $u = (a,b,c) \perp A = (13,1,-4) \Longrightarrow (a,b,c) \cdot (13,1,-4) = 0 \Longrightarrow 13a + b - 4c = 0 \Longrightarrow b = 4c - 13a$.

Así, $u = (a, 4c - 13a, c)$

Por otro lado, $\mathcal{L} \| \pi$, entonces $u \perp N = (2,0,-1) \Longrightarrow (a, 4c - 13a, c) \cdot (2,0,-1) = 0 \Longrightarrow c = 2a$. Luego,

$u = (a, 4\,(2a) - 13a, 2a) = (a, -5a, 2a) = a\,(1,-5,2) \parallel (1,-5,2)\,.$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L} : P = (2,3,-3) + t\,(1,-5,2)\,, t \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 2.10 *Considere los planos $\mathcal{P}_1 : x - y + z = 0$ y $\mathcal{P}_2 : x + y - z = 2$.*

(a)*Hallar la ecuación de la recta $\mathcal{L}$ que es intersección de $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$.*

(b)*Hallar la ecuación vectorial de la recta $\mathcal{L}_1$ que pasa por el punto $(2,1,3)$ y no corta a ninguno de los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$.*

Solución

(a)Sea $P \in \mathcal{L} := \mathcal{P}_1 \ \cap \mathcal{P}_2 : \begin{cases} x - y + z = 0 \cdots (1) \\ x + y - z = 2 \cdots (2) \end{cases}$

Sumanado (1) y $(2) : 2x = 2 \Longrightarrow x = 1$.

De $x - y + z = 0 \Longrightarrow 1 - y + z = 0 \Longrightarrow z = y - 1$.

Sea $y = t \Longrightarrow z = t - 1$.

Por lo tanto,

$$\mathcal{L} : P = (1, t, t-1) = (1,0,-1) + t\,(0,1,1)\,, t \in \mathbb{R}$$

(b)Es claro que $(2,1,3)$ no se encuentra en ninguno de los planos dados.

Basta elegir una recta $\mathcal{L}_1$ pasando por $(2,1,3)$ y sea paralela a $\mathcal{L}$. Por lo tanto,

$$\mathcal{L}_1 : P = (2,1,3) + r\,(0,1,1)\,, r \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 2.11 *Sean* $\mathcal{P}_1 : x + 2y - 3z + 2 = 0$ *y* $\mathcal{P}_2 : -x + z = 0$.

(a)*Hallar la proyección ortogonal de la recta* $\mathcal{L}$*, que es intersección de* $\mathcal{P}_1$ *con* $\mathcal{P}_2$ *sobre el plano coordenado* XY.

(b)*Hallar el área del triángulo que dicha proyección forma con los ejes* X, Y.

Solución

(a)Sea $P \in \mathcal{L} := \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 : \begin{cases} x + 2y - 3z + 2 = 0 \cdots (1) \\ -x + z = 0 \cdots (2) \end{cases}$

De $(2) : -x + z = 0 \Longrightarrow z = x = t$,

En $(1) : x + 2y - 3z + 2 = 0 \Longrightarrow t + 2y - 3t + 2 = 0 \Longrightarrow y = t - 1$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L} : P = (t, t-1, t) = (0, -1, 0) + t\,(1, 1, 1)\,, t \in \mathbb{R}$$

Sea la recta $\mathcal{L}_{\mathcal{R}} : P = Q + t\ \overrightarrow{QP_0'}$, $t \in \mathbb{R}$ que resulta de hacer la proyección ortogonal de la recta $\mathcal{L}$ sobre el plano coordenado XY,

donde $Q \in \mathcal{L} \cap \mathcal{P}_{XY}$, $P_0' = \Pr oy_{XY} P_0$

Sea $Q \in \mathcal{L}$, entonces existe un $t \in \mathbb{R}$ tal que $Q = (t, t-1, t) \in \mathcal{P}_{XY} : z = 0 \Longrightarrow t = 0$.

Luego, $Q = (0, -1, 0)$.

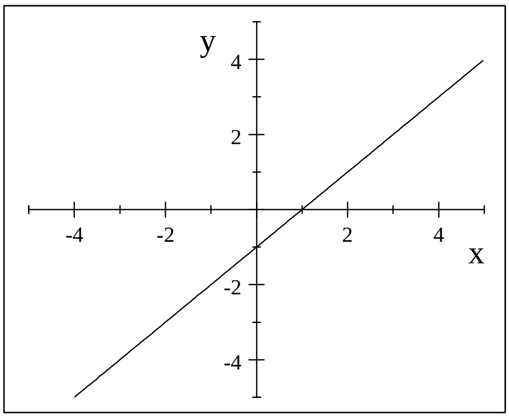
Sea $P_0 = (1, 0, 1) \in \mathcal{L}$ entonces $P_0' = (1, 0, 0)$

$\overrightarrow{QP_0'} = P_0' - Q = (1, 0, 0) - (0, -1, 0) = (1, 1, 0)$

Por tanto,

$$\mathcal{L}_{\mathcal{R}} : P = (0, -1, 0) + t\,(1, 1, 0)\,, t \in \mathbb{R}.$$

$(b)\ \mathcal{L}_{\mathcal{R}} : \begin{cases} x = t \cdots (1) \\ y = -1 + t \cdots (2) \\ z = 0 \cdots (3) \end{cases} \Longrightarrow y = -1 + x$ es una recta en el plano XY.



Sea $A = \mathcal{L}_{\mathcal{R}} \cap X$: haciendo $y = z = 0$, de donde $A = (1, 0, 0)$,

$B = \mathcal{L}_{\mathcal{R}} \cap Y$: haciendo $x = z = 0$, de donde $B = (0, -1, 0)$.

Por tanto el área del triángulo OAB es: $A\,(\triangle OAB) = \frac{1}{2}u^2$.

Ejemplo 2.12 *Sea* $\mathcal{L} : P = P_0 + t\ \overrightarrow{a},\ t \in \mathbb{R}$ *una recta en* $\mathbb{R}^3$ *y* $Q_0 \in \mathbb{R}^3$. *Demostrar que*

$$d\,(Q,\mathcal{L}) = \frac{\|(Q_0 - P_0) \times \overrightarrow{a}\|}{\|\overrightarrow{a}\|}$$

Solución

En el triángulo P_0HQ_0 de la figura, (H es el pie de la perpendicular trazada), se tiene que:

$$d(Q_0, P_0) = \left\|\overrightarrow{P_0Q_0}\right\| \quad \text{y} \quad d(P_0, H) = \left|\text{Comp}_A\overrightarrow{P_0Q_0}\right|.$$

Por el Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}
d_{\mathcal{L}}^2(Q_0) &= d^2(Q_0, P_0) - d^2(P_0, H) = \left\|\overrightarrow{P_0Q_0}\right\|^2 - \left|\text{Comp}_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{P_0Q_0}\right|^2 \\
&= \left\|\overrightarrow{P_0Q_0}\right\|^2 - \left[\frac{\overrightarrow{P_0Q_0}\cdot\overrightarrow{a}}{\|\overrightarrow{a}\|}\right]^2 = \left\|\overrightarrow{P_0Q_0}\right\|^2 - \frac{\left\|\overrightarrow{P_0Q_0}\right\|^2\|\overrightarrow{a}\|^2\cos^2\theta}{\|A\|^2} \\
&= \left\|\overrightarrow{P_0Q_0}\right\|^2\left(\frac{\|\overrightarrow{a}\|^2 - \|\overrightarrow{a}\|^2\cos^2\theta}{\|\overrightarrow{a}\|^2}\right) = \left\|\overrightarrow{P_0Q_0}\right\|^2\|\overrightarrow{a}\|^2\frac{\sin^2\theta}{\|\overrightarrow{a}\|^2},
\end{aligned}$$

siendo θ el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{P_0Q}$ y A. Tomando raíz cuadrada en ambos miembros

$$d_{\mathcal{L}}(Q_0) = \frac{\left\|\overrightarrow{P_0Q_0}\right\|\|\overrightarrow{a}\|\sin\theta}{\|\overrightarrow{a}\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{P_0Q_0}\times\overrightarrow{a}\right\|}{\|\overrightarrow{a}\|}.$$

Ejemplo 2.13 *Sea* $\mathcal{L} : P = (1, -2, 3) + t\ (-1, 2, -4), t \in \mathbb{R}$. *Hallar* $Q \in \mathbb{R}^3$ *tal que* $d\,(Q,\mathcal{L}) = \sqrt{\frac{24}{21}}$ *y* Q *es un punto de la recta*

$$\mathcal{L}_1 : \begin{cases} z = 2x + 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Solución

Sea $Q = (x, y, z)$ tal que $d\,(Q,\mathcal{L}) = \sqrt{\frac{24}{21}}$, entonces

$$\begin{aligned}
d\,(Q,\mathcal{L}) &= \frac{\|((x, y, z) - (1, -2, 3)) \times (-1, 2, -4)\|}{\|(-1, 2, -4)\|} \\
&= \frac{\|(x - 1, y + 2, z - 3) \times (-1, 2, -4)\|}{\|(-1, 2, -4)\|} \\
d\,(Q,\mathcal{L}) &= \frac{\|(-4y - 2z - 2, 4x - z - 1, 2x + y)\|}{\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{24}{21}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{(4y + 2z + 2)^2 + (4x - z - 1)^2 + (2x + y)^2} &= \sqrt{24} \Longrightarrow \\
(4y + 2z + 2)^2 + (4x - z - 1)^2 + (2x + y)^2 &= 24 \cdots (*)
\end{aligned}$$

Como $Q \in \mathcal{L}_1$ entonces de $(*)$ se tiene :

$(4(-2) + 2\,(2x + 1) + 2)^2 + (4x - (2x + 1) - 1)^2 + (2x - 2)^2 = 24 \Longrightarrow 24\,(x - 1)^2 = 24$, de donde $x = 0, x = 2$

Si $x = 0 : Q = (0, -2, 1)$,
Si $x = 2 : Q = (2, -2, 5)$.

Ejemplo 2.14 *Dado el plano* $\pi : kx - y + 2z + 1 = 0$ *y el punto* $M = (0, 1, 0)$.
(a)*Hallar el valor de* k *sabiendo que el plano* π *es paralelo a la recta*

$$\mathcal{L} : P = (1, 2, 3) + t\ \ (1, 0, -1), t \in \mathbb{R}$$

(b)*Hallar las ecuaciones cartesianas de aquellos planos* $\mathcal{P}$ *paralelos al plano* π *tales que la distancia del punto* M *al plano* $\mathcal{P}$ *es 2.*

Solución
(a)Si π es paralelo a la recta $\mathcal{L}$ entonces $u = (1, 0, -1) \perp N = (k, -1, 2) \Longrightarrow (1, 0, -1) \cdot (k, -1, 2) = 0 \Longrightarrow k = 2$.
(b)Si $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$ es paralelo al plano $\mathcal{P}$ entonces la ecuación del plano $\mathcal{P}$: $2x - y + 2z + d = 0$.
Por condición se tiene:

$$\begin{aligned} 2 &= d(M, \pi) = \frac{|2\,(0) - (1) + 2\,(0) + d|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|d - 1|}{3} \Longrightarrow |d - 1| = 6 \\ d - 1 &= 6 \vee d - 1 = -6 \Longrightarrow d = 7 \vee d = -5. \end{aligned}$$

Por tanto, los planos son :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &: \ 2x - y + 2z + 7 = 0, \\ \mathcal{P}' &: \ 2x - y + 2z - 5 = 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.15 *Dado el plano* $\mathcal{P} : x + y - z = 0$ *y la recta*

$$\mathcal{L} : \left\{ \begin{array}{l} y + 2z = 8 \\ 2x - y = 0 \end{array} \right.$$

Hallar las ecuaciones vectoriales de las rectas $\mathcal{L}_1$ *y* $\mathcal{L}_2$ *que están contenidas en el plano* $\mathcal{P}$*, tales que* $\mathcal{L}_1$ *es*
perpendicular a $\mathcal{L}$ *y* $\mathcal{L}_2$ *es la proyección ortogonal de* $\mathcal{L}$ *sobre el plano* $\mathcal{P}$.

Solución
Parametrizando $\mathcal{L} : \left\{ \begin{array}{c} y + 2z = 8 \\ 2x - y = 0 \Longrightarrow y = 2x \end{array} \right.$.
Sea $x = t$ entonces $y = 2t$.
De $y + 2z = 0$ se tiene $2t + 2z = 8 \Longrightarrow z = 4 - t$
Por lo tanto,

$$\mathcal{L} : P = (t, 2t, 4 - t) = (0, 0, 4) + t\,(1, 2, -1), t \in \mathbb{R}$$

Hallando Q.
Sea $Q \in \mathcal{L}$ entonces existe un $t \in \mathbb{R}$ tal que $Q = (t, 2t, 4 - t) \in \mathcal{P} : x + y - z = 0$, entonces $t + 2t - (4 - t) = 0$, de donde $t = 1$.Así, $Q = (1, 2, 3)$.
Hallando $\mathcal{L}_1$.
Como $\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}$ entonces $A_1 \perp A = (1, 2, -1)$
$\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{P}$entonces $A_1 \perp N = (1, 1, -1)$
Entonces $A_1 \| A \times N = (1, 2, -1) \times (1, 1, -1) = (-1, 0, -1)$
Por lo tanto,

$$\mathcal{L}_1 : P = (1, 2, 3) + t\,(-1, 0, -1), t \in \mathbb{R}$$

Hallando $\mathcal{L}_2$.

Sea la recta $\mathcal{L}_2 : P = Q + t\, \overrightarrow{QP_0'}$, $t \in \mathbb{R}$

que resulta de hacer la proyección ortogonal de la recta $\mathcal{L}$ sobre el plano coordenado $\mathcal{P}$, $P_0' = \Pr oy_{\mathcal{P}} P_0 = \mathcal{L}_N \cap \mathcal{P}$,

$\mathcal{L}_N : P = (0,0,4) + t\,(1,1,-1)\,, t \in \mathbb{R}$

Sea $P_0' \in \mathcal{L}_N$, entonces existe un $t \in \mathbb{R}$ tale que $P_0' = (t, t, 4-t) \in \mathcal{P} : x + y - z = 0 \Longrightarrow t + t - 4 + t = 0 \Longrightarrow t = \frac{4}{3}$.

Luego,$P_0' = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

$\overrightarrow{QP_0'} = P_0' - Q = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right) - (1,2,3) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}(1,-2,-1)$

Por tanto,

$$\mathcal{L}_2 : P = (1,2,3) + t\,(1,-2,-1)\,, t \in \mathbb{R}$$

Ejercicios Propuestos

1. Un rayo luminoso sale del punto $P_0 = (0,-2,0)$ según la dirección del vector $A = (1,2,2)$ e incide en el espejo plano $\mathcal{P} : 3x + 4y - 5z = 0$. Halle la recta que contiene al rayo reflejado.

2. Identifique los conjuntos solución de cada una de las siguientes ecuaciones:

   (a) $A \times P = B$ siendo A y B vectores dados.

   (b) $(P - P_1) \times (P_2 - P_1) = \theta$ siendo P_1 y P_2 puntos distintos dados.

3. Hallar la ecuación del plano π que es perpendicular al plano

$$\mathcal{P} : 3x - 4y - 2z = 3$$

   y que contiene a la recta

$$\mathcal{L} : \begin{cases} x - 4y + 2z = 3 \\ 2x + y - 4z = 4 \end{cases}.$$

4. Sean U, V y W tres vectores no coplanares y no nulos tales que sus representaciones como segmentos dirigidos tienen un punto inicial común. Demostrar que el plano que pasa por los puntos finales de dichos segmentos dirigidos, es perpendicular al vector $U \times V + V \times W + W \times U$.

5. Determine si existe un plano que contiene a las rectas $\mathcal{L}_1 : P = (2,-1,3) + t\,(1,2,1)$ y $\mathcal{L}_2 : P = (2,-1,33) + s\,(3,-1,4)$.

6. Similar al ejercicio 5 para las rectas $\mathcal{L}_1 : P = (4,1,0) + t\,(1,2,1)$ y $\mathcal{L}_2 : P = (-2,-3,2) + s\,(2,-1,3)$.

7. Halle la ecuación cartesiana del plano que pasa por el punto $(-1,-1,2)$ y es perpendicular a los planos $x - 2y + z = 0$, $x + 2y - 2z + 4 = 0$.

8. Halle la intersección de la recta $\mathcal{L} : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z+3}{3}$ con el plano $\mathcal{P} : 2x + y - z = 0$.

9. Si los vectores $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$ son representados por segmentos coplanarios, demuestre que:

$$(A \times B) \times (C \times D) = \theta$$

   ¿Es verdadero el resultado recíproco?

10. Hallar el plano bisector del diedro agudo formado por los planos $6x+9y+2z+18=0$, $x-8y+4z-20=0$.

11. Halle la distancia del centro de gravedad del triángulo formado por las rectas

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 &: P=(5,11,-2)+r\,(0,8,-1)\,,\ r\in\mathbb{R}\\
\mathcal{L}_2 &: P=(8,-23,3)+s\,(3,-10,-4)\,,\ s\in\mathbb{R}\\
\mathcal{L}_3 &: P=(8,1,-6)+t\,(3,-2,5)\,,\ t\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

al plano $5x+12z+14=0$.

12. Halle la distancia del punto $(1,-2,1)$ al plano determinado por los puntos $(2,4,1)$, $(-1,4,2)$ y $(-1,0,1)$.

13. Sean $P_1=(1,2,3)$ y $P_2=(4,5,6)$ los vértices de un cuadrado. Sabiendo que P_2 pertenece a la recta real $\mathcal{L}: P=(4,5,6)+t\,(1,0,-1)$, $t\in\mathbb{R}$, hallar los otros vértices del cuadrado(dos soluciones).

14. Hallar las ecuación del plano π que contiene a la recta

$$\mathcal{L}:\left\{\begin{array}{l} x+y+3z=0\\ 3x+2y-z=0\end{array}\right. .$$

y es perpendicular al plano $2x+y-z+1=0$.

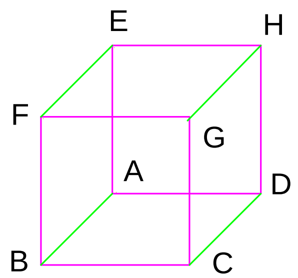
15. El punto $Q=(-4,2,1)$ se proyecta ortogonalmente sobre los planos $\pi_1: 3x+y-z=0$ y $\pi_2: -x+y+z+5=0$ determinado por los puntos A y B respectivamente.Hallar la distancias entre A y B.

16. Dadas las rectas

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 &: P=(-1,3,-1)+t\,(3,1,2)\,,\ t\in\mathbb{R}\\
\mathcal{L}_2 &: P=(0,0,-11)+r\,(1,2,6)\,,\ r\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

   (a) hallar el punto Q que es intersección de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$.
   (b) hallar el punto R simétrico de $(-1,-9,-1)$ respecto a la recta $\mathcal{L}_2$.
   (c) hallar la ecuaciones paramétricas de la recta $\mathcal{L}$ que pasa por Q y R.

17. En un paralelepípedo $ABCDEFGH$ como en la figura, sean P_1,P_2,P_3,P_4,P_5 y P_6 los opuntos medios de las aristas FE, EH, HD, CB y BF respectivamente. Analizar si los seis puntos mencionados están en un mismo plano o no.



18. Dadas las rectas
$$\mathcal{L}_1 : P = (1, -2, 5) + t\,(2, 3, -4)\,,\ t \in \mathbb{R}$$
$$\mathcal{L}_2 : x - 2,\ y - 1 = \frac{z+2}{2}$$

Hallar la recta $\mathcal{L}$ que pasa por el punto $(-1, 2, 0)$, si la recta es perpendicular a $\mathcal{L}_1$ y corta a $\mathcal{L}_2$.

19. Dados los planos :
$$\pi_1 : x - 2y + z = 0 \quad \text{y} \quad \pi_2 : x - 2y - 2z - 4 = 0.$$

(a) Hallar una ecuación vectorial de la recta $\mathcal{L}$ que está contenida en ambos planos.

(b) Sea $\pi : ax + by + cz + d = 0$ un plano tal que la recta $\mathcal{L}$ de la parte (a) está contenida en π y la distancia de $P_1 = (1, -1, 0)$ a π es 1. Hallar una ecuación normal para π.

20. Hallar la ecuación cartesiana del plano que pasa por $P_0 = (1, 0, 0)$, sabiendo que la recta $\mathcal{L} : x - 5 = \dfrac{z+5}{-1}$, $y = 1$ dista una unidad de dicho plano.

21. Sea $P = (x, y, z)$ un punto de $\mathbb{R}^3$.

(a) Calcular la distancia de P a los ejes coordenados X e Y.

(b) Analizar la verdad o falsedad de los siguientes enunciados :

i. La distancia de $P = (x, y, z)$ al eje X es igual a la distancia de $Q = (x, -y, -z)$ al eje X,

ii. La superficie determinada por los puntos de $\mathbb{R}^3$ tales que las distancias a los ejes X e Y son iguales, es un único plano,

iii. La ecuación cartesiana de la superficie $\mathcal{S}$ determinada por los puntos de $\mathbb{R}^3$ cuya distancia al eje X es el doble de su distancia al eje Y es $2x^2 - y^2 + 6z^2 = 0$.

22. Hallar el punto $P(a, b, c)$ con $c > 1$, que pertenece a la recta
$$\mathcal{L} : x - 1 = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{3}$$

tal que las distancias de P a los planos
$$\mathcal{P}_1 : x + 2y + z - 1 = 0 \quad y \quad \mathcal{P}_2 : 2x + y - z - 3 = 0$$

son iguales.

23. Sea π un plano que pasa por el origen y contiene a la recta $\mathcal{L} : P = (1, 2, 3) + t\,(1, -1, -1)$, $t \in \mathbb{R}$. Hallar una ecuación cartesiana de dicho plano.

24. Considerar los planos
$$\pi_1 : 2x + 3y - z + 1 = 0 \quad \text{y} \quad \pi_2 : x - y + 2z + 3 = 0.$$

(a) Halle la ecuación vectorial de la recta $\mathcal{L}$ contenida en π_1 y π_2.

(b) Halle la ecuación cartesiana de un plano que contiene a la recta $\mathcal{L}$ y que forma un ángulo de $\dfrac{\pi}{3}$ con el plano π_1.

25. Halle las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $A(-1,2,-3)$, es perpendicular al vector $\overrightarrow{v}=(6,-2,-3)$ e interseca a la recta

$$\mathcal{L}: P=(1,-1,3)+t(3,2,-5), t \in \mathbb{R}.$$

26. Dadas dos rectas oblicuas en $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &: P=P_0+tA,\ t\in\mathbb{R} \\ \mathcal{L}_2 &: P=Q_0+rB,\ r\in\mathbb{R}, \end{aligned}$$

hallar una fórmula para calcular la distancia entre las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$.

27. Determine la ecuación de la recta que intercepta a las rectas

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1: &\quad P=(1,-1,1)+t(1,0,-1),\ t\in\mathbb{R} \\ \mathcal{L}_2: &\quad Q=(1,0,0)+s(-1,1,1),\ s\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

en los puntos A y B, respectivamente, de tal manera que la longitud del segmento $\overline{AB}$ sea mínima.

28. ¿Para qué valores de a y b, la recta $\mathcal{L}$: $P=(2,-1,5)+t(a,4,-3),\ t\in\mathbb{R}$ es perpendicular al plano

$$\pi: 3x-2y+bz+1=0\,?$$

29. Considere la recta

$$\mathcal{L}: P=(1,2,3)+t\ (0,1,1), \quad t\in\mathbb{R} \quad .$$

Hallar la ecuación del plano $\mathcal{P}$ que contiene a la recta $\mathcal{L}$ y cuyas intersecciones del plano $\mathcal{P}$ con los planos coordenados XY e YZ forman un ángulo $\frac{\pi}{3}$.

30. Dadas las rectas

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1: &\quad P=(1,1,3)+t(-4,10,-1),\ t\in\mathbb{R} \\ \mathcal{L}_2: &\quad Q=(2,1,-2)+s(7,-2,7),\ s\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

Hallar la ecuación de la recta que pasa por la intersección y es perpendicular a ambas.

31. Considere la recta

$$\mathcal{L}: P=(1,2,3)+t\ (0,1,1), \quad t\in\mathbb{R} \quad .$$

Hallar la ecuación del plano $\mathcal{P}$ que contiene a la recta $\mathcal{L}$ y cuyas intersecciones del plano $\mathcal{P}$ con los planos coordenados XY e YZ forman un ángulo $\frac{\pi}{3}$.

32. Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por la intersección y es perpendicular a ambas.

    (a) Hallar la ecuación vectorial de la recta $\mathcal{L}$ que pasa por los puntos $(2,3,1)$ y $(-1,4,1)$.

    (b) Uno de los puntos $R\,(5,2,1)$ y $Q\,(3,1,2)$ pertenece a $\mathcal{L}$. Hallar la ecuación simétrica de la recta perpendicular a $\mathcal{L}$ que pase por el punto que no pertenece a la recta $\mathcal{L}$.

33. Sean $S=(1,-1,2)$ y $R=(1,0,1)$.

   (a) Hallar la ecuación del plano que contiene a los puntos S y R , y es paralelo a la recta
   $$\mathcal{L}: P=(1,5,1)+t\ (1,1,1)\ , \quad t\in\mathbb{R}$$

   (b) Sea M el punto medio entre S y R.Hallar el punto de la recta $\mathcal{L}$ más cercano a M.

34. Sean los planos
   $$\mathcal{P}_1 : x+y-z+1=0 \quad \text{y} \quad \mathcal{P}_2 : x-y+2z+5=0.$$

   (a) Hallar la ecuación vectorial de la recta $\mathcal{L}$ que pasa por el punto $(0,0,1)$, está contenida en el plano $\mathcal{P}_1$ y forma un ángulo $\dfrac{\pi}{4}$ con el plano $\mathcal{P}_2$.

35. Sean $\mathcal{L}: P=(-3,-3,5)+t(1,2,-2)$, $t\in\mathbb{R}$ una recta y $\mathcal{P}$, un plano que pasa por los puntos $Q=(2,-1,2)$, $R=(3,1,-1)$ y $S=(2,3,1)$.Desde el punto $B=(2,-2,3)$ se trazan rectas que cortan a la recta $\mathcal{L}$ e intersectan al plano $\mathcal{P}$ en puntos que se alinean formando otra recta al que llamaremos $\mathcal{L}_1$.Hallar la ecuación cartesiana de $\mathcal{L}_1$.

2.2 Matrices. Sistemas de ecuaciones lineales

Definición 2.18 *Una* matriz de orden $m\times n$ *es un arreglo rectangular de* mn *números acomodados o dispuestos en* m *filas y* n *columas.*

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Los elementos $a_{11},\ldots,a_{mn}\in\mathbb{R}$, y se conocen como las entradas de la matriz A; el elemento de A ubicado en la intersección de la i-ésima fila y la j-ésima columna se denota por a_{ij}. La matriz A se denota brevemente por $A=[a_{ij}]$. La i-ésima fila de A se denota por $A_{(i)}=[a_{i1},\ldots,a_{in}]$ y puede considerarse como un vector de, la j-ésima columna de A se representa por

$$A^{(j)}=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

y puede considerarse como un vector de $\mathbb{R}^m$

Las matrices se denotan por letras mayúsculas $A,B,C,\ldots$,etc.

Observación 2.4 *Si* $m=n$,*se dice que la matriz es* cuadrada.

En lo que sigue una matriz de m filas y n columnas será denotada por $A_{m\times n}=[a_{ij}]$ o simplemente por A.

Ejemplo 2.16

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

es una matriz de orden 2×4 *y*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

es una matriz cuadrada de orden 3.

Definición 2.19 *(Igualdad de matrices). Dos matrices A y B del mismo orden son iguales si todos sus elementos correspondientes son iguales. En tal caso se usa la notación $A = B$.*

En símbolo:
Dos matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$, del mismo tamaño, son iguales si y solo si $a_{ij} = b_{ij}$, para cada $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.
Denotemos por $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices de orden $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$.

2.2.1 Adición de matrices

Sean $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ dos matrices en $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, entonces

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$$

2.2.2 Multiplicación de un escalar por una matriz

El producto de un escalar k por una matriz A es otra matriz kA la cual se obtiene multiplicando cada elemento de A por k.
$k. A = k.[a_{ij}] = [k\, a_{ij}]$, $k \in \mathbb{R}$.
Por ejemplo, si k es un escalar y $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ entonces

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{bmatrix}$$

Propiedades

Para A, B y C matrices de orden $m \times n$ cualesquiera y para $r, s \in \mathbb{R}$, se cumplen

1. $r(A + B) = rA + rB$
2. $(r + s)A = rA + sA$
3. $r(sA) = (rs)A$
4. $1A = A$.

2.2.3 Multiplicación de matrices

El producto de dos matrices no está definida de manera obvia; esto es, el producto de dos matrices *no* se obtiene multiplicando sus componentes correspondientes.
Antes de definir la multiplicación matricial, se requiere una definición previa.

Definición 2.20 *Sea* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$ *una matriz o vector fila* $n-$*dimensional y sea*

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$$

una matriz o vector columna $n-$*dimensional. Entonces el producto,* AB*, de* A *y* B *está dado por*

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ . \\ . \\ . \\ b_{n1} \end{bmatrix} \\ &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + ... + a_{1n}b_{n1} \end{aligned}$$

Obsérvese que el producto de un vector fila y un vector columna no se puede definir a menos que sean de tamaños compatibles. Además, el vector fila debe escribirse a la izquierda.

Ejemplo 2.17 *El producto de* $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ *es*

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 3\,(4) + 2\,(3) + 5\,(2) = 12 + 6 + 10 = 28.$$

Usando la definición de un vector fila por un vector columna se puede definir la multiplicación matricial.

Definición 2.21 *Dadas las matrices*

$$A = [a_{ij}] \text{ de orden } m \times \boxed{p}$$

y

$$B = [b_{ij}] \text{ de orden } \boxed{p} \times n;$$

el producto $A \times B$*, en ese orden, es la matriz* $C = [c_{ij}]$ *de orden* $m \times n$ *cuya componente*

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},$$

es el producto de la fila i *de* A *y la columna* j *de* B*.*

Ejemplo 2.18 *Determinar el elemento de la segunda fila y la tercera columna del producto* AB *de las matrices* $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Solución El elemento a determinar, c_{23}, se obtiene multiplicando la fila 2 de A por la columna 3 de B.

$$c_{23} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2.2 + 5.1 = 9.$$

Ejemplo 2.19 *Calcular el producto* $AB = C$ *donde*

$$A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & -5 & 1 \end{bmatrix} \; y \; B_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución La matriz producto C es de orden 2×2, esto es, tiene 4 elementos.

$$\begin{aligned} c_{11} &= (\text{fila 1 de } A)\times(\text{columna 1 de } B) = 2\,(3) + 1\,(2) + (-3)1 = 5 \\ c_{12} &= (\text{fila 1 de } A)\times(\text{columna 2 de } B) = 2(-1) + 1\,(4) + (-3)5 = -13 \\ c_{21} &= (\text{fila 2 de } A)\times(\text{columna 1 de } B) = 4\,(3) + (-5)2 + 1\,(1) = 3 \\ c_{22} &= (\text{fila 2 de } A)\times(\text{columna 2 de } B) = 4(-1) + (-5)4 + 1\,(5) = -19 \end{aligned}$$

De lo anterior se concluye que $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -13 \\ 3 & -19 \end{bmatrix}$.

Observación 2.5 *Dadas dos matrices, por ejemplo,* $A_{3\times 3}$ *y* $B_{3\times 4}$ *es posible efectuar* $AB = C_{3\times 4}$,*debido a que sus tamaños son compatibles, es decir, el número de columnas de* A *es igual al número de filas de* B*; sin embargo, no es posible calcular* BA.

Ejemplo 2.20 *Hallar todas las matrices cuadradas* A *de orden* 2×2 *que conmutan con la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Solución
Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Entonces $AB = BA$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a+2b & -b \\ c+2d & -d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b \\ 2a-c & 2b-d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{cases} a + 2b = a \cdots (1) \\ -b = b \cdots (2) \Longrightarrow b = 0 \\ c + 2d = 2a - c \cdots (3) \\ -d = 2b - d \cdots (4) \end{cases}$$

De $(3) : c + 2d = 2a - c \Longrightarrow d = a - c$
$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & a-c \end{bmatrix}$, $a, c \in \mathbb{R}$.

2.2.4 Matrices especiales

1. **Matriz diagonal.** Es la *matriz cuadrada* $A_{n\times n} = [a_{ij}]$ definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} \lambda_i \; si \; i = j \\ 0 \; si \; i \neq j \end{cases}$$

en donde $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Es decir

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Es decir, los valores λ_i se ubican en la diagonal principal.

2. **Matriz identidad.-** Llamada también matriz unidad, es un caso particular de matriz diagonal, en la cual los elementos de la diagonal principal son iguales a 1. Se representa por I_n o simplemente por I.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Propiedad fundamental

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

3. **Matriz triangular superior.-** Es la matriz cuadrada que verifica $a_{ij} = 0$, $\forall i > j$.

Ejemplo 2.21

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{bmatrix},$$

es una matriz triangular superior.

4. **Matriz inversa** Sea A una matriz cuadrada de orden n . Se dice que A *es invertible* si existe una matriz cuadrada B de orden n tal que: $AB = BA = I$.

B se llama inversa de A y se denota por $B = A^{-1}$

A se llama inversa de B y se denota por $A = B^{-1}$

Ejemplo 2.22 *Si* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix}$ *entonces* $AB = BA = I$, *por lo que* $B = A^{-1}$

Los métodos para determinar la inversa de una matriz se verán más adelante, sin embargo se debe tener en cuenta que no toda matriz cuadrada A es inversible.

Propiedades

Supongamos que existen las inversas de A y B, entonces se cumplen

1. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

2. $(A^{-1})^{-1} = A$

3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

4. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1},\ k \neq 0$ (k escalar)

2.2.5 Transformaciones elementales con las filas de una matriz

Son operaciones con matrices que no modifican ni su orden ni su rango. Son transformaciones elementales las siguientes.

1. El intercambio de la fila i y la fila j. Se denota por $f_{ij.}$

2. El producto de todos los elementos de la fila i por una constante $k \neq 0$.Se denota por $kf_{i.}$

3. La suma de los elementos de la fila i con los correspondientes de la fila j multiplicados por una constante $k \neq 0$. Se denota por $f_i + kf_j$.

Ejemplo 2.23 *Con la matriz* $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$ *e pueden efectuar las transformaciones*

1. $f_{23} : \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$ *2.* $4f_2 : \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 16 & 36 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ *3.* $f_3 - 2f_1 : \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 9 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

2.2.6 Rango de una matriz

El rango de una matriz A_{mxn} es el número real r si el determinante de al menos uno de sus menores cuadrados de orden r es distinto de cero,siendo nulos los correspondientes a todos los menores cuadrados de orden $r + 1$, si es que existen.

Definición 2.22 *El rango de* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ *es igual a 2, ya que el determinante de* $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ *es distinto de cero,*

siendo $|A| = 0$. *En realidad, el cálculo del rango de una matriz mediante la definición anterior puede ser muy laborioso si aumenta el orden de la matriz, de ahí que es conveniente encontrar algún método que simplifique estos cálculos, para lo cual es necesario conocer los siguientes conceptos.*

2.2.7 Matrices Equivalentes

Dos matrices A y B se llaman equivalentes,lo que se denota por $A \sim B$, si una de ellas se obtiene a partir de la otra mediante un número finito de transformaciones elementales filas.

Propiedad 1 Las matrices equivalentes tienen el mismo orden y el mismo rango.

Ejemplo 2.24 *A partir de la matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ *se puede obtener la matriz* $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ *mediante dos transformaciones elementales:* $f_2 - 2f_1$ *y* $f_3 - f_1$ *por lo que* $A \sim B$ *y* $rango(A) = rango(B)$.

2.2.8 Matriz escalonada

Una matriz está en su *forma escalonada* si verifica las siguientes condiciones:

1. La primera componente distinta de cero de cualquier fila no nula es $\boxed{1}$.
2. Todas las componentes que se encuentran debajo de $\boxed{1}$ son iguales a cero.
3. El número de ceros que preceden a $\boxed{1}$ aumenta conforme las filas aumentan.
4. Todas las filas nulas (si en caso existen) se ubican en la parte inferior de la matriz.

Observación 2.6 *Si en la segunda condición además se verifica que las componentes que se encuentran sobre* $\boxed{1}$ *son ceros, entonces se dice que la matriz está en su forma* escalonada reducida.

Ejemplo 2.25 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$*; en cambio la matriz* $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ *no está en la forma escalonada.*

Propiedad 2 Toda matriz A puede reducirse a una forma escalonada, mediante transformaciones elementales por filas.

Ejemplo 2.26 *Reducir la matriz* $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 & 25 \\ 2 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ *a la forma escalonada.*

Solución

Operaciones: 1) $f_{12}: \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 25 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ 2) $\frac{1}{2}f_1$ y $\frac{1}{5}f_2: \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

3)$f_3 - 3f_2: \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -15 \end{bmatrix}$ 4) $\frac{-1}{2}f_3 \; : B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{15}{2} \end{bmatrix}$.

En la última matriz el rango se puede calcular directamente. Basta observar que $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, por lo que $rango(B) = 3$. Además como A y B son matrices equivalentes, se concluye que $rango(A) = 3$. Este procedimiento se puede generalizar a todo tipo de matrices, obteniéndose la siguiente.

Propiedad 3 El rango de una matriz A es igual al número de filas no nulas de cualquier matriz escalonada B equivalente a A.

Ejemplo 2.27 *Hallar el rango de la matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -6 & 7 \end{bmatrix}$.

Solución Primero se escalona la matriz, mediante transformaciones elementales filas.

$$f_2 - 2f_1,\ f_3 - f_1 : \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \sim \tfrac{1}{5}f_2\ , \tfrac{-1}{5}f_3 : \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{5} \end{bmatrix} \sim$$

$$f_3 - f_2 : B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz B tiene dos filas no nulas y es equivalente a A, de donde se concluye que $rango(A) = 2$.

2.2.9 Sistemas de ecuaciones lineales

En álgebra se han estudiado sistemas de ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 4 \\ x + 7y - z = -2 \\ 3x - 4y + 6z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}.$$

Ahora, tales sistemas pueden escribirse en forma matricial. El primer sistema es equivalente a

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 7 & -1 \\ 3 & -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$A_{3\times3} \cdot X_{3\times1} = B_{3\times1}$$

El segundo sistema se puede representar mediante

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$$A_{3\times4} \cdot X_{4\times1} = B_{3\times1}.$$

Estos casos particulares se pueden generalizar a sistemas de m ecuaciones con n variables (incógnitas), en tal caso se usará la notación $A_{m\times n} \cdot X_{n\times1} = B_{m\times1}$ o simplemente $AX = B$.

Notar que en esta representación A es la matriz de los coeficientes, X es la matriz de las variables y B es la matriz de los términos independientes del sistema. La resolución de sistemas escritos en su forma matricial, exige el uso de *la matriz ampliada del sistema*, la cual se representa por $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$.

Ejemplo 2.28 *La matriz ampliada del primer sistema es*

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & -1 & -2 \\ 3 & -4 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observar que cada una de las filas de la matriz anterior es una representación abreviada de dicho sistema; para leer la ecuación de una fila basta con añadir apropiadamente las incógnitas y los signos $+, -, =$.

Sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

El objetivo general de este tema es discutir y resolver sistemas de ecuaciones lineales, haciendo abstracción del tipo de problemas que origina su planteamiento.

Discutir un sistema consiste en averiguar si tiene o no tiene solución y, en caso de tenerla, saber si es única o si no lo es.

Resolver un sistema es calcular su solución (o soluciones).

Los casos más sencillos (2 ecuaciones con 2 incógnitas, 3 ecuaciones con 3 incógnitas, ...). Aquí, analizaremos el caso general: número arbitrario de ecuaciones y número de incógnitas.

Definición 2.23 *Un Sistema de m ecuaciones con n incógnitas ,es :*

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

donde,
x_j son las incógnitas, $(j = 1, 2, ..., n)$.
a_{ij}son los coeficientes, $(i = 1, 2, ..., m)(j = 1, 2, ..., n)$.
b_i son los términos independientes, $(i = 1, 2, ..., m)$.

Los números m y n son enteros positivos : $m > n$, $m = n$ ó $m < n$.

Los escalares a_{ij}y b_i son números reales.

El escalar a_{ij}es el coeficiente de x_j en la i-ésima ecuación.

Cuando n es pequeño, es usual designar a las incógnitas con las letras $x, y, z, t, \ldots\ldots\ldots$

Obsérvese que el número de ecuaciones no tiene por qué ser igual al número de incógnitas.

Cuando b_i=0 para todo i, el sistema se llama *homogéneo.*

Definición 2.24 *Una Solución de un sistema es una n-upla $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ de números reales que satisface a todas las ecuaciones.*

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. \quad (*)$$

Es decir,

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \ldots + a_{mn}c_n = b_m \end{array}\right.$$

Definición 2.25 *El sistema $(*)$ se llama* compatible *si admite por lo menos una solución, y se denomina* incompatible *en caso contrario.*

Un sistema compatible se llama determinado *si admite solamente una solución, y se llama* indeterminado *si tiene infinitas soluciones.*

Observación 2.7 *Es evidente que todo sistema homogéneo es compatible ya que por lo menos admite la solución $(0, 0, \cdots, 0)$, llamada solución trivial.*

2.2.10 Método de Gauss-Jordan.

Para *resolver sistemas de ecuaciones* usamos el método de Gauss-Jordan. Este se sustenta en el uso de la matriz ampliada sustituyéndose la matriz A por una matriz escalonada reducida equivalente, C, aplicando transformaciones elementales de fila.

Ejemplo 2.29 *Resolver el sistema*

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 3x + y - 2z = 1 \\ 4x - 3y - z = 3 \\ 2x + 4y + 2z = 4 \end{cases}$$

Solución. La matriz ampliada

$$[A \;\; B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente el sistema tiene por solución:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

En la matriz terminal del sistema se observa que $rango\,[A\ B] = rango\,[A] = 3 =$ número de variables ($n = 3$), concluyéndose que el sistema tiene solución única. En general la solución de un sistema de ecuaciones depende de la relación existente entre el rango de la matriz ampliada y el rango de la matriz de los coeficientes, la cual es consecuencia de la definición de matrices equivalentes. Antes de enunciar la relación mencionada es oportuno conocer lo siguiente.

Definición 2.26 *El sistema $AX = B$ se llama* compatible *si admite por lo menos una solución, y se denomina* incompatible *en caso contrario.*

Definición 2.27 *Un sistema compatible puede tener* solución única *(sistema determinado) o* infinitas soluciones *(sistema indeterminado).*

Definición 2.28 *El sistema $AX = B$ se llama* homogéneo, *cuando $B = 0 =$ matriz nula.*

Observación 2.8 *Todo sistema homogéneo es compatible ya que admite por lo menos la solución: $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, llamada solución trivial (ST).*

Como se anotó anteriormente, existen resultados que simplifican la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, los cuales se pueden resumir en la siguiente.
Propiedad Si $A_{m\times n}.X_{n\times 1} = B_{m\times 1}$ es un sistema m de ecuaciones con n incógnitas, entonces

1. La condición necesaria y suficiente para que el sistema sea compatible es que $rango\,[A\ B] = rango\,[A]$.

2. Si $rango\,[A\ B] = rango\,[A] = n =$número de incógnitas, entonces el sistema tiene solución única.

3. Si $rango\,[A\ B] = rango\,[A] = r < n$, entonces el sistema tiene infinitas soluciones. En este caso se pueden elegir $n-r$ variables libres a las cuales se les llama parámetros. Al asignar valores arbitrarios a estas $n-r$ incógnitas, las otras r quedan perfectamente determinadas.

4. La condición necesaria y suficiente para que el sistema sea incompatible es que $rango\,[A\ B] \neq rango\,[A]$.

Ejemplo 2.30 *Resolver el sistema*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$$

Solución. Se considera la matriz ampliada del sistema

$$[A\ B] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

la que debe escalonarse.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{bmatrix} \sim f_2 - f_1 \ y \ f_3 - f_1 : \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} ;\sim$$

$$\frac{-1}{2} f_2 \ y \ \frac{1}{4} f_3 : \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \ f_3 - f_2 : \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se observa que rango$[A\ B] = 2 =$rango$[A] < n = 4$. Según la propiedad anterior el sistema tiene infinitas soluciones con $n - r = 2$ parámetros. La última matriz se puede leer de la siguiente manera: $x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1$, $x_4 = 1$, $0 = 0$, de donde se tiene $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. En esta ecuación se pueden tomar como parámetros $x_2 = s \ \ y \ \ x_3 = t$, obteniéndose $x_1 = 2s - t$. Las soluciones del sistema se pueden expresar como

$$x_1 = 2s - t \ , \ x_2 = s \ , \ x_3 = t \ , \ x_4 = 1,$$

con $s \ y \ t$ números reales.

Ejemplo 2.31 *Resolver el sistema*

$$\begin{cases} x + 4y - z + 3w = 10 \\ x + y - 7z = 22 \\ x + 8y + 4z - 8w = 3 \\ 5x + 17y - 5z + 13w = 44 \end{cases}$$

Solución. La matriz ampliada del sistema es

$$[A\ B] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 & 10 \\ 1 & 1 & -7 & 0 & 22 \\ 1 & 8 & 4 & -8 & 3 \\ 5 & 17 & -5 & 13 & 44 \end{bmatrix}$$

Escalonando la matriz anterior se obtienen las siguientes matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 & 10 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & 12 \\ 0 & 4 & 5 & -11 & -7 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & 5 & -11 & -7 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -15 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & -18 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & -18 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -24 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se deduce que $rango\,[A\ B] = rango\,[A] = 4$ =número de incógnitas, por lo que el sistema tiene solución única. Tal solución se obtiene leyendo la última matriz, obteniéndose

$x = -1 \quad y = 2 \quad z = -3 \quad w = 0$

Ejemplo 2.32 *La Texas Electronics Inc. (TEI) produce tres modelos de computadoras: 1, 2 y 3. Como parte del proceso de elaboración, estos productos pasan por la planta técnica de la empresa y se emplean 30, 12 y 36 minutos por unidad de los modelos 1, 2 y 3, respectivamente. Se sabe que, durante el mes, en total se emplearon 116 horas para el respectivo chequeo técnico de las computadoras.En el proceso de ensamblaje de estos productos se requirieron en total 740 horas durante ese mes. Se empleó una hora para ensamblar cada computadora del modelo 1 y cuatro horas para ensamblar cada computadora del modelo 2 y del modelo 3.¿Cuántas unidades de cada modelo produjo la empresa si obtuvo una utilidad mensual de 37 500 dólares, sabiendo que las ganancias obtenidas por la venta de los modelos 1, 2 y 3 fueron de 200, 50 y 100 dólares por cada unidad, respectivamente? Resolver el problema empleando el método de eliminación gaussiana.*

Solución

Sean las cantidades de computadoras, x, y, z de los modelos 1, 2 y 3 respectivamente, entonces de los datos se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 0,5x + 0,2y + 0,6z = 116 \\ x + 4y + 4z = 740 \\ 200x + 50y + 100z = 37500 \end{cases}$$

La matriz ampliada, después de multiplicar por 10 la primera fila y luego, permutar la primera fila con la segunda, es

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 740 \\ 5 & 2 & 6 & 1160 \\ 20 & 5 & 10 & 3750 \end{bmatrix}$$

Después de las operaciones elementales sobre las filas de la matriz ampliada, resulta

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 740 \\ 0 & 1 & \frac{7}{9} & \frac{1270}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 40 \end{bmatrix}$$

Y sustituyendo, se obtiene $z = 40$, $y = 110$, $x = 140$.

Ejemplo 2.33 *Micaela desea cubrir sus requerimientos vitamínicos semanales de exactamente 13 unidades de vitamina A, 22 de vitamina B y 31 de vitamina C.Existen disponibles tres marcas de cápsulas vitamínicas en el mercado. La marca I contiene 1 unidad de cada una de las vitaminas A, B y C por cápsula; la marca II contiene 1 unidad de vitamina A, 2 de B y 3 de C, y la marca III contiene 4 unidades de A, 7 de B y 10 de C.*

Si las cápsulas de la marca I cuestan 50 céntimos cada una, las de la marca II cuestan 70 céntimos cada una y las de la marca III, 2 soles cada una, ¿qué combinación de cápsulas de las marcas I, II y III producirá exactamente las unidades de vitaminas deseadas y le ocasionará menor gasto semanal a Micaela? Emplear eliminación gaussiana.

Solución. Sean:
x = número de cápsulas de la marca I
y = número de cápsulas de la marca II
z = número de cápsulas de la marca III

$$\begin{cases} x + y + 4z = 13 \\ x + 2y + 7z = 22 \\ x + 3y + 10z = 31 \end{cases}$$

Resolviendo usando el método de Gauss Jordan

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 13 \\ 1 & 2 & 7 & 12 \\ 1 & 3 & 10 & 22 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 6 & 18 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema equivalente es

$$\begin{cases} x + y + 4z = 13 \\ y + 3z = 9 \end{cases}$$

El sistema es consistente con más de una solución
Si $z = t$, entonces $y = 9 - 3t$, reemplazando en la ecuación $x + y + 4z = 13$ obtenemos $x = 4 - t$
Soluciones posibles:

x	y	z	Costo$= 0,5x + 0,7y + 2z$
4	9	0	8,3 soles
3	6	1	7,9 soles
2	3	2	7,1 soles
1	0	3	6,5 soles

El costo es mínimo cuando $x = 1$,$y = 0, z = 3$.

Ejemplo 2.34 *En la siguiente figura se ilustra una red de calles y los números indican la cantidad de*

autos por hora que salen o entran (según sea el sentido de las flechas) de las intersecciones. Así por ejemplo, en una de las intersecciones, en una hora, ingresan x_1 *y* x_2*autos y salen 400 autos por una de las calles y 400 por otra.*

Solución

(a) Sistema por resolver:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 500 \\ x_1 + x_2 = 800 \\ x_3 + x_4 = 800 \\ x_2 + x_3 = 1100 \end{cases}$$

(b) Planteando la matriz y realizando las operaciones filas elementales:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 500 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 800 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 800 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1100 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 500 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1100 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 800 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 800 \end{bmatrix}$$

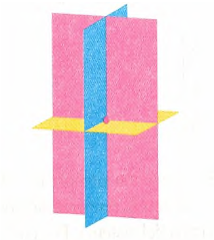
de donde resulta un sistema con infinitas soluciones de la forma:

$$\begin{aligned} x_3 &= 800 - x_4 \\ x_2 &= x_4 + 300 \\ x_1 &= 500 - x_4 \end{aligned}$$

con $x_4 \geq 0$ y entero.

Ejemplo 2.35 *La ecuación lineal* $ax + by + cz = d$ *en las variables* x, y *y* z *corresponde a la ecuación de un plano en un sistema coordenado tridimensional. Es posible que dados tres planos, estos:*

Se corten solo en un punto: *Se corten en infinitos puntos:* *No se corten*

Considerando los planos :

$$\pi_1 : 2x - 3y + 5z = 1$$

$$\pi_2 : x - 4y + 3z = -4$$

$$\pi_3 : x - 3y + cz = -6$$

Señalar si es posible encontrar valores para c de modo que los planos no se corten.
Señalar si es posible encontrar valores para c de modo que los planos se corten en un único punto.
Señalar si es posible encontrar valores para c de modo que los planos se corten en infinitos puntos.

Solución
Realizando operaciones fila elementales, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & 4 \\ 1 & -4 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & c & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & c-3 & -2 \\ 0 & 0 & 14-2c & 19 \end{bmatrix}$$

Para que los planos no se corten, basta exigir que $14 - 5c = 0$, $c = 14/5$.
Para que el sistema tenga solución única, basta exigir $14 - 5c \neq 0$, $c \neq 14/5$
Y no es posible hallar valores de c para los que el sistema tiene infinitas soluciones pues eso implicaría que $c = 14/5$ y
$19 = 0$.

Ejemplo 2.36 *Un proveedor de productos para el campo tiene cuatro tipos de fertilizantes A, B, C y D que tienen contenidos de nitrógeno de 30%, 20%, 15% y 60% respectivamente. Se ha planeado mezclarlas para obtener 700 kg. de fertilizante con un contenido de nitrógeno de 30%. Esta mezcla debe contener 100 kg. más del tipo C que del tipo B y además la cantidad que intervenga del tipo A debe ser exactamente igual a la suma de las cantidades de los tipos C y D con el doble del tipo B. Hallar por métodos matriciales la cantidad de kg. que se deben usar por cada tipo.*

Solución.Sean
x : cantidad de kg. a emplearse del tipo A.
y : cantidad de kg. a emplearse del tipo B.
z : cantidad de kg. a emplearse del tipo C.
t : cantidad de kg. a emplearse del tipo D.
De las condiciones del problema se forma el siguiente sistema

$$\begin{cases} x + y + z + t &= 700, \\ 0.3x + 0.2y + 0.15z + 0.6t &= 210, \\ y - z &= -100, \\ x - 2y - z - t &= 0. \end{cases}$$

En la segunda ecuación, tener en cuenta que se trabaja con porcentajes(30% de 700=210)

La tercera ecuación es consecuencia de $z = y + 100$ y la cuarta es consecuencia de $x = 2y + z + t$.

Se forma la matriz ampliada del sistema y se escalona mediante transformaciones elementales filas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 700 \\ 0.3 & 0.2 & 0.15 & 0.6 & 210 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -100 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 700 \\ 0 & -1 & -1.5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -100 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & -700 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 700 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -100 \\ 0 & -1 & -1.5 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & -700 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 700 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & -2.5 & 3 & -100 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -200 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 700 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-6}{5} & 40 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & -1000 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 700 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-6}{5} & 40 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -800 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 700 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-6}{5} & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 100 \end{bmatrix}$$

De donde se obtiene que $t = 100,\ z = 160,\ y = 60,\ x = 380.$

2.3 Determinantes

Los determinantes de las matrices pueden ser considerados como funciones que cumplen cuatro propiedades básicas. En este capítulo veremos que cualquier función del álgebra de matrices cuadradas $\mathcal{M}_n(K)$(en el cuerpo K que cumpla dichas propiedades es necesariamente la función determinante. Nuestra primera lección esta dedicada al estudio de las propiedades básicas.

Definición 2.29 *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K, una función multilineal de m argumentos sobre el espacio V es una función*

$$D : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{\text{m}-\text{veces}} \to K$$

que es lineal en cada argumento, es decir, D satisface las siguientes condiciones:
a)$D(v_1, \ldots, v_i + u_i, \ldots, v_m) = D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_m) + D(v_1, \ldots, u_i, \ldots, v_m)$,
para cada $1 \le i \le m$.
b)$D(v_1, \ldots, a\,.\,v_i, \ldots, v_m) = a\,.\,D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_m)$,
para cada $1 \le i \le m$.
c) D es alternada si D cumple la siguiente condición:

$$D(v_1, \ldots, v_i, v_i, \ldots, v_m) = 0$$

para cada $1 \le i \le m-1$. Es decir, D es alternada si D se anula cuando dos argumentos consecutivos *coinciden.*

Sea D una función multilineal alternada de m argumentos sobre un espacio V. Entonces se puede demostrar facilmente que D satisface las siguientes propiedades.

d)Si se intercambian dos argumentos de D el signo cambia, es decir,
$D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_m) = -D(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_m)$,
para cualquier par $i \neq j$.

e) Si existe un par $i \neq j$ tal que $v_i = v_j$, entonces
$D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_m) = 0$

f) Si a un argumento le sumamos otro multiplicado por un escalar, entonces el valor de la función D no cambia. Es decir,
$D(v_1, \ldots, v_i + a\,.\,v_j, \ldots, v_m) = D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_m)$,
para cada par $i \neq j$ y cada escalar $a \in K$.

g) Si un argumento de D es nulo, entonces D se anula, es decir,
$D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, 0, \ldots, v_m) = 0$.

Cada fila de una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(K)$ puede considerarse como un vector de K^n de tal forma que podemos definir funciones multilineales de $\mathcal{M}_n(K)$ en K.
Según la Proposición de la lección anterior, cada función multilineal alternada $D : \mathcal{M}_n(K) \to K$ queda completamente determinada por su acción sobre los vectores de una base. Esto permite definir el concepto de función determinante de la siguiente manera.

Sea $\mathcal{M}_n(K)$ el álgebra de matrices cuadradas de tamaño $n \geq 1$ y sea $X = \{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canónica de K^n. Se define la función determinante como la única función multilineal alternada

$$\det : \mathcal{M}_n(K) \to K$$

que satisface la condición $\det(e_1, \ldots, e_n) = 1$, es decir, $\det(E) = 1$, donde E es la matriz idéntica de orden n.

Si $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(K)$, entonces cada fila $A_{(i)}$ de A puede expresarse en la forma $A_{(i)} = a_{i1}\,.\,e_1 + \cdots + a_{in}\,.\,e_n$ y, de acuerdo a la prueba de la Proposición , necesariamente se tiene que

$$\det(A) = [\textstyle\sum_{f \in S} signo(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}] \det(e_1, \ldots, e_n),$$

es decir,

$$\det(A) = [\textstyle\sum_{f \in S} signo(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}],$$

donde S es el conjunto de funciones biyectivas de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en si mismo. El signo de la función f fue definido en al prueba de la Proposición . Cualquier función multilineal alternada D de $\mathcal{M}_n(K)$ en K tal que $D(E) = 1$ coincide con la definición anterior de la función det.

Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(K).$$

A partir de la definicón de la función det demuestre que

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})$$

Teniendo en cuenta que la función determinante es multilineal y alternada respecto de sus filas, entonces tiene las propiedades que se enuncian a continuación. Sea A una matriz cuadrada de orden $n \geq 1$.

a)

$$\det \begin{bmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} + u_i \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{bmatrix} = \det(A) + \det \begin{bmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{bmatrix},$$

donde $u_i \in K^n$.

b)

$$\det \begin{bmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ a \,.\, A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{bmatrix} = a \det A.$$

donde $a \in K$.

c) Si existe un par $i \neq j$ tal que $A_{(i)} = A_{(j)}$, entonces $\det(A) = 0$.

d)

$$\det \begin{bmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{bmatrix},$$

para cada par $i \neq j$.

e)

$$\det \begin{bmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} + a \,.\, A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{bmatrix} = \det(A),$$

para cada par $i \neq j$.

f)

$$\det \begin{bmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{bmatrix} = 0.$$

Además de las propiedades anteriores se tienen las siguientes.

g) La matriz A se dice que es triangular superior si $a_{ij} = 0$ para $i > j$, es decir, A tiene el siguiente aspecto

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{in} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Si A es una matriz triangular superior, entonces $\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}$, es decir, el determinante de A es el producto de los elementos de la diagonal.

h) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

i) Si A es una matriz invertible, entonces $\det(A) \neq 0$, y además, $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$.

j) Si A es similar a B, entonces $\det(A) = \det(B)$.

k) Sea $T : V \to V$ una transformación lineal de un espacio de dimensión finita $n \geq 1$. Entonces el determinante de T se define como el determinante de la matriz de T en cualquier base (véase en el próximo Capítulo).

l) $\det(A^t) = \det(A)$.

Determinante de Vandermonde. Sean $x_1, \ldots, x_n \in K$, entonces

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Sea A una matriz de orden n , B una matriz de orden m y C un matriz de orden $n \times m$. Entonces

$$\det \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} = \det(A)\det(B).$$

Sea A, B y C como en el ejercicio anterior. Entonces

$$\det \begin{bmatrix} C & A \\ B & 0 \end{bmatrix} = (-1)^{nm} \det(A)\det(B).$$

La teoría de determinantes puede ser emprendida por medio de los llamados menores de una matriz. La definición de una nueva función det en este caso se hace por inducción sobre el tamaño de las matrices.

Definimos

$$\begin{aligned} \det_1 : \mathcal{M}_1(K) &\to K \\ [a] &\mapsto \det_1(a) = a \\ \det_2 : \mathcal{M}_2(K) &\to K \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} &\mapsto a_{11} Det_1[a_{22}] - a_{21} Det_1[a_{12}] \\ &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \end{aligned}$$

La función $\det_{n-1} : \mathcal{M}_{n-1}(K) \to K$ se supone definida y queremos construir la función

$$\det = \det_n : M_n(K) \to K \ .$$

Sea $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(K)$, para el elemento a_{ij} definimos la matriz $A_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(K)$ suprimiendo la i-ésima fila y la j-ésima columna de A, es decir,

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

La imagen de A_{ij} a través de la función $\det_{n-1}$ se conoce como el menor del elemento a_{ij} y se denota por M_{ij}, es decir,

$$M_{ij} = \det_{n-1}(A_{ij}).$$

det se define entonces por

$$\det(A) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} \qquad (1).$$

det es una función multilineal alternada sobre las filas de las matrices de orden n que cumple además la condición $\det(E) = 1$.

Se dice que la fórmula (1) define la función determinante por los menores de la primera columna, adaptando esta fórmula a cualquier otra columna se puede probar también la proposición anterior, además, como $\det(A^T) = \det(A)$, entonces se tienen las siguientes igualdades:

$$\det(A) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \qquad (2)$$

para cada $1 \leq i, j \leq n$. Estas fórmulas pueden usarse para probar la regla de Crammer que estudiaremos enseguida.

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden n, se define la matriz de cofactor de A por

$$Cof(A) = [(-1)^{i+j} M_{ij}].$$

La regla de Crammer está entonces dada por el siguiente teorema.

Teorema 2.3 *Sea A una matriz cuadrada de orden $n \geq 1$. Entonces,*

$$ACof(A)^T = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \det(A) \end{bmatrix} = Cof(A)^T A.$$

Una consecuencia importante de este útil teorema es el siguiente corolario.

Sea A una matriz de orden $n \geq 1$. Entonces, A es invertible si y solo si $\det(A) \neq 0$. En tal caso, $A^{-1} = (\det(A))^{-1} Cof(A)^T$.

Ejemplo 2.37 *Hallar el valor de x tales que*

$$\det\left(\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4x & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución

Primera forma:

$$\det\left|\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4x & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}\right|$$

$$= \begin{vmatrix} 4x+25 & 31 & 8x+4 & 13 & 14 \\ 3x+9 & 13 & 4x & -1 & -1 \\ -12 & -13 & -4 & -15 & -16 \\ -23 & -25 & -4x-8 & -29 & -31 \\ -30 & -31 & -12 & -33 & -34 \end{vmatrix} = 16\,(9x+1)\,(2x-5) = 0,$$

la Solución es: $x = -\frac{1}{9}, x = \frac{5}{2}$

Segunda forma:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4x & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 2\,(-1)\,(-1)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 2\,(-1)\,(-1)\,(-2) = -4$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 3\,(-1)\,(-1)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 3\,(-1)\,(-1)\,(-2) = -6$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \end{bmatrix}\right) = 4\,(-4) - 3\,(-6) = 2$$

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4x & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4x & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4x & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 4x\begin{vmatrix} 4x & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} - 2.5\begin{vmatrix} 4x & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$
$$= 4x\,(36x+4) - 10\,(36x+4) = (4x-10)\,(36x+4)$$

$$2\,(4x-10)\,(36x+4) = 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{9}, x = \frac{5}{2}.$$

Ejemplo 2.38 *Calcular el determinante de* $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & k+2 \\ 2 & -3 & 2k \\ 1 & -k & k^2+k-3 \end{bmatrix}$

Solución

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & k+2 \\ 2 & -3 & 2k \\ 1 & -k & k^2+k-3 \end{vmatrix}$$
$$\det A = 1.\begin{vmatrix} -3 & 2k \\ -k & k^2+k-3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 2k \\ 1 & k^2+k-3 \end{vmatrix} + (k+2)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -k \end{vmatrix}$$
$$\det A = -k^2 - 3k + 9 + 2\left(2k^2 - 6\right) + (k+2)\,(3-2k) = k^2 - 4k + 3 = (k-1)\,(k-3)$$

Ejemplo 2.39 *Dado el sistema de ecuaciones lineales en las variables* x, y, z :

$$\begin{cases} x & - & 2y & + & (k+2)\,z & = & 5 \\ 2x & - & 3y & + & 2kz & = & 8 \\ x & - & ky & + & \left(k^2+k-3\right)z & = & 3k \end{cases}.$$

Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ *para que dicho sistema :*

(a)*tenga una única solución*

(b)*tenga infinitas soluciones.*

(c)*no tenga solución*

Solución

Trabajando en la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k+2 & 5 \\ 2 & -3 & 2k & 8 \\ 1 & -k & k^2+k-3 & 3k \end{array}\right] \begin{array}{c} F_2 \longleftrightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \longleftrightarrow F_3 - F_1 \end{array} \sim$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k+2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 2-k & k^2-5 & 3k-5 \end{array}\right] \; F_3 - (2-k)F_2 \;\sim$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k+2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & k^2-4k+3 & k-1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k+2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & (k-1)\,(k-3) & (k-1) \end{array}\right]$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x - 2y + (k+2)\,z = 5 \\ y - 4z = -2 \\ (k-3)\,(k-1)\,z = (k-1) \end{cases}$$

(a)Si $k \neq 1$ y $k \neq 3$, el sistema tiene solución única.

$C.S. = \left\{(x,y,z) = \left(\frac{3}{k-3}, -\frac{2k-10}{k-3}, \frac{1}{k-3}\right) : k \neq 1, k \neq 3\right\}.$

(b)El sistema tiene infinitas soluciones si $k = 1$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ y - 4z = -2 \longrightarrow y = -2 + 4z \end{cases}$$

De : $x - 2y + 3z = 5 \longrightarrow x = 2y - 3z + 5 = 2\,(-2+4z) - 3z + 5 = 1 + 5z$

$C.S. = \{(x,y,z) = (1+5z, -2+4z, z) : z \in \mathbb{R}\}.$

(c)El sistema no tiene solución si $k=3$, pues
$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \Longrightarrow 0=-2.$

Otra forma: Sea

Si $\det A=(k-1)(k-3)\neq 0 \Longrightarrow k\neq 1$ y $k\neq 3$.Entonces el sistema tiene solución única.

Si $\det A=0 \Longrightarrow k=1$ o $k=3$.

Si $k=1$:
$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} F_2 \longleftrightarrow F_2-2F_1 \\ F_3 \longleftrightarrow F_3-F_1 \end{array} \sim$
$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \end{array}\right] \quad F_3 \longleftrightarrow F_3-F_2 \sim$
$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x-2y+3z=5 \\ y-4z=-2 \longrightarrow y=-2+4z \end{array}\right.$

De : $x-2y+3z=5 \longrightarrow x=2y-3z+5=2(-2+4z)-3z+5=1+5z$

$C.S.=\{(x,y,z)=(1+5z,-2+4z,z): z\in\mathbb{R}\}$.

Si $k=3$:
$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & -3 & 6 & 8 & 8 \\ 1 & -3 & 9 & 9 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{c} F_2 \longleftrightarrow F_2-2F_1 \\ F_3 \longleftrightarrow F_3-F_1 \end{array} \sim$
$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & 4 \end{array}\right] \quad F_3 \longleftrightarrow F_3+F_2 \sim$
$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \Longrightarrow 0=-2.$

El sistema no tiene solución.

Ejemplo 2.40 *Sea* $A=\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & a & 1 & 0 \\ a^3 & a^2 & a & 1 \end{array}\right]$

(a)*Hallar todos los valores de a para las cuales existe* A^{-1}.

(b)*Calcular* A^{-1}.

(c)*Hallar la inversa de*

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} & 1 \end{array}\right]$$

Solución

(a)Existe A^{-1}si $\det A\neq 0$

$|A|=\left|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & a & 1 & 0 \\ a^3 & a^2 & a & 1 \end{array}\right|=1.\left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^2 & a & 1 \end{array}\right|=1.\left|\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ a & 1 \end{array}\right|=1$

$$(b)\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a^3 & a^2 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} F_2 \longleftrightarrow F_2 - aF_1 \\ F_3 \longleftrightarrow F_3 - a^2F_1 \\ F_4 \longleftrightarrow F_3 - a^3F_1 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & -a^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a^2 & a & 1 & -a^3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} F_3 \longleftrightarrow F_3 - aF_2 \\ F_4 \longleftrightarrow F_4 - a^2F_2 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & -a^2 & 0 & 1 \end{array}\right] F_4 \longleftrightarrow F_4 - aF_3 \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 \end{array}\right]$$

Por tanto, $A^{-1} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 1 \end{array}\right]$

(c)Si $a = \sqrt{2}$, entonces $A^{-1} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 1 \end{array}\right]$

Ejemplo 2.41 *Sabiendo que*

$$\left|\begin{array}{cccc} x & 1 & 0 & 0 \\ 3 & x & 2 & 0 \\ 0 & 2 & x & 3 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{array}\right| = (x^m - 1)(x^m - 3^m)$$

Hallar m.

Solución

Sea $|A| = \left|\begin{array}{cccc} x & 1 & 0 & 0 \\ 3 & x & 2 & 0 \\ 0 & 2 & x & 3 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{array}\right| = x\left|\begin{array}{ccc} x & 2 & 0 \\ 2 & x & 3 \\ 0 & 1 & x \end{array}\right| - 1\left|\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 0 \\ 0 & x & 3 \\ 0 & 1 & x \end{array}\right|$

$|A| = x\left(x.\left|\begin{array}{cc} x & 3 \\ 1 & x \end{array}\right| - 2\left|\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 0 & x \end{array}\right|\right) - \left(3\left|\begin{array}{cc} x & 3 \\ 1 & x \end{array}\right| - 2\left|\begin{array}{cc} 0 & 3 \\ 0 & x \end{array}\right|\right) : 0$

$|A| = x\left(x\left(x^2 - 3\right) - 2(2x)\right) - \left(3\left(x^2 - 3\right) - 2\,(0)\right) : x^3 - 7x$

$|A| = x(x^3 - 7x) - \left(3x^2 - 9\right) = x^4 - 10x^2 + 9 = (x-1)(x+3)(x-3)(x+1)$

$|A| = \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - 3^2\right)$,de donde $m = 2$

Ejemplo 2.42 *Sabiendo que* $\left|\begin{array}{ccc} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{array}\right| = k\,(a-b)(a-c)(b-c)$

Hallar el valor de k.

Solución

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4(a+1) \\ b^2 & 2b+1 & 4(b+1) \\ c^2 & 2c+1 & 4(c+1) \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & a+1 \\ b^2 & 2b+1 & b+1 \\ c^2 & 2c+1 & c+1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 4 \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & a+1 \\ b^2-a^2 & 2(b-a) & b-a \\ c^2-a^2 & 2(c-a) & c-a \end{vmatrix} = 4(b-a)(c-a) \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & a+1 \\ b+a & 2 & 1 \\ c+a & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$\Delta = 4(b-a)(c-a)\left[a^2(0) - (2a+1)(b-c) + 2(a+1)(b-c)\right]$

$\Delta = 4(b-c)(a-c)(a-b)$, de donde $k = 4$.

Ejemplo 2.43 *Sea la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Demostrar que para todo $x \in \mathbb{R}$ la matriz A tiene inversa y hallar dicha matriz.

Solución

Puesto que :

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, entonces A tiene inversa para todo $x \in \mathbb{R}$.

Usando el método de Gauss -Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad F_2 \longleftrightarrow F_2 - xF_1 \quad \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{x^2}{2} & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} F_2 \longleftrightarrow F_2 - \frac{x^2}{2}F_3 \\ F_1 \longleftrightarrow F_1 - xF_3 \end{array} \quad \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & 0 & x & 1 & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \text{.Por tanto, } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x \\ x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicios Propuestos: Matrices y determinantes

1. Hallar todas las matrices cuadradas de orden 2, tales que:

   (a) Sus cuadrados son iguales a la matriz identidad

   (b) Sus cubos son iguales a la matriz nula.

2. Sea E_{pq} la matriz de orden $m \times n$ que contiene 1 en el lugar $pq-$ésimo, y el número cero en los demás lugares.

   (a) Obtenga las matrices $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ todas ellas de orden 2×2

   (b) Exprese la matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ como una suma

   $$aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22},$$

   donde a, b, c y d son escalares apropiados.

3. Si $A = [a_{ij}]_{4\times 5}$ es una matriz tal que la suma de los elementos de la diagonal principal de $A^t \cdot A$ es 0. Halle la matriz A.

4. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} a & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 6 \\ 6 & 7 & d \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -b & 4 \\ 6 & 7 & -d \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & e \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Hallar a, b, d, e y la matriz X, sabiendo que $AX = BX + I$ y $XC = I$.

5. Hallar la matriz inversa de A en los siguientes casos:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, donde $ad - bc \neq 0$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

6. Hallar la matriz incógnita X a partir de la siguiente ecuación

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

7. Se sabe que A es una matriz cuadrada tal que $A^n = 0$. Demuestre que $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + ... + A^{n-1}$.

8. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

tales que $A.X = B$, hallar la matriz X.

9. Considerar la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

(a) Determinar la matriz $B = A^2 - 2A$

(b) Determinar los valores de λ para que la matriz B tiene inversa.

(c) Calcular B^{-1}para $\lambda = 1$.

10. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} m & -1 & 4 \\ 3 & m & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, donde $m \in \mathbb{R}$.

(a) Determinar para qué valores de m la matriz A tiene inversa.

(b) para $m = 1$, resolver el sistema de ecuaciones lineales : $A.X = B$, con $B = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(c) Calcular $C - A^{-1}B$, siendo $C = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ y B definida en el apartado anterior.

11. Si $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 6 \\ 8 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$, calcule el determinante de A.

12. Dada la matriz $A = [a_{ij}]$ de orden 4, tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} ij + 2 & si\ i \geq j \\ ij - 2 & si\ i < j \end{cases}$$

Calcular el determinante de A.

Encontrar, si existe, la inversa de A.

13. Sean las matrices

$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

(a) Hallar la matriz AB^T, donde B^T indica la matriz transpuesta de B.¿Es inversible?

(b) Calcular $M = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ que verifique la ecuación $(AB^T + C).M = E$.

14. Si $A = \begin{bmatrix} 1+x & 1+x & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 2-2x & 0 \\ 2 & 1-2x & 2-2x & 0 \\ -2x & 1-2x & 2-2x & 0 \end{bmatrix}$

(a) Halle los valores de x para los cuales $|A| = 0$.

(b) ¿Para qué valores de x, A es inversible?

15. Dada la matrices : $A = \begin{bmatrix} x+2 & 4 & 6 \\ 2x+3 & 3 & 6 \\ 4x+4 & 2 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3y+5 & 7 & 12 \\ 2y+3 & 3 & 6 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

(a) Calcular el determinante de la matriz $3A$ y obtener el valor de x para que dicho determinante sea 162.

(b) Demostrar que la matriz B no tiene inversa.

16. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, calcular el valor del siguiente determinante : $\begin{vmatrix} 5a & -5b & 5c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

2.4 Espacio vectorial

Definición 2.30 *Un espacio vectorial sobre un cuerpo K (los elementos de K se llamarán escalares) es un conjunto V(cuyos elementos se llamarán vectores) dotados de dos operaciones. una de ellas interna (adición):*

$$\begin{array}{rcl} + & : & K \times V \to V \\ (u,v) & \mapsto & u+v \end{array}$$

respecto de la que V es un grupo conmutativo.
Una Operación externa, multiplicación por un escalar

$$\begin{array}{rcl} K \times V & \to & V \\ (a,v) & \mapsto & a.v \end{array}$$

que verifican los siguientes axiomas:
Para cualesquiera escalares $r, s \in K$ y cualesquiera vectores $u, v \in V$.
Adición:
$Conmutativa.u + v = v + u$
$Asociativa.u + (v + w) = (u + v) + w$
Elemento neutro de la adición. $u + e = e + u = u$
Elemento opuesto de la adición.$u + u^* = u^* + u = e$
Multiplicación por un escalar:
$r.(u + v) = r.u + r.v$
$(r + s).v = r.v + s.v$
$(rs).v = r.(s.v)$
$1.v = v$

Es costumbre denotar el espacio vectorial $(V, +, \cdot, \mathbb{R})$ simplemente por V; también se dice que V es un K-espacio vectorial.

Ejemplo 2.44 *El plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ de puntos de la forma (x,y) con $x, y \in \mathbb{R}$, es un espacio vectorial real respecto de las siguientes operaciones:*

$$\begin{array}{rcl} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) & = & (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ r.(x, y) & = & (rx, ry) \end{array}$$

El conjunto $\mathbb{R}^n$ con la relación de igualdad y las operaciones de adición de vectores y multiplicación de vectores por números reales. En $\mathbb{R}^n$ definimos una relación de igualdad y dos operaciones:

Igualdad de vectores. Si $A = (a_1, ..., a_n)$ y $B = (b_1, ..., b_n)$ son vectores en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$A = B \Leftrightarrow a_i = b_i \text{ para todo } i = 1, ..., n$$

Adición de vectores. Si $A = (a_1, ..., a_n)$ y $B = (b_1, ..., b_n)$ son vectores en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$A + B = (a_1 + b_1, ..., a_n + b_n).$$

Multiplicación de vectores por escalares. Si α es un número real y $A = (a_1, ..., a_n)$ es un vector en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\alpha A = (\alpha a_1, ..., \alpha a_n).$$

Proposición 2.10 *El conjunto $\mathbb{R}^n$se llama espacio vectorial real n-dimensional:*
1.$\forall A, B \in \mathbb{R}^n$ se cumple que $A + B \in \mathbb{R}^n$.
2.$\forall A, B \in \mathbb{R}^n$, $A + B = B + A$.
3.$\forall A, B, C \in \mathbb{R}^n$, $A + (B + C) = (A + B) + C$.

Proposición 2.11 *4.$\exists! \theta \in \mathbb{R}^n, \forall A \in \mathbb{R}^n$:*

$$A + \theta = A.$$

El elemento θ de $\mathbb{R}^n$, llamado vector cero, está dado por

$$\theta = (0, ..., 0).$$

5.$\forall A \in \mathbb{R}^n, \exists! (-A) \in \mathbb{R}^n$:

$$A + (-A) = \theta.$$

El vector $-A$, llamado opuesto de A, es

$$-A = (-1) A.$$

6.$\forall A \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha A \in \mathbb{R}^n$.
7.$\forall A \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$.
8.$\forall A, B \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$.
9.$\forall A \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha (\beta A) = (\alpha\beta) A$.
10.$\forall A \in \mathbb{R}^n : 1A = A$.

Ejemplo 2.45 *El conjunto R[x] de polinomios reales en la indeterminada x con las operaciones habituales de adición y multiplicación de real por polinomio, es un espacio vectorial real.*

Si cambiamos $\mathbb{R}$ por un cuerpo cualquiera K obtenemos el K-espacio vectorial $K[x]$ de polinomios con coeficientes en K.

Ejemplo 2.46 *Sea $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices de orden $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales de adición y multiplicación de de matriz por escalar conforma un espacio vectorial sobre los reales.*

Ejemplo 2.47 *Sea S un conjunto no vacío en $\mathbb{R}$. El conjunto $\mathbb{R}^S$ de todas las funciones de S en $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial real bajo las siguientes operaciones:*

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (r.f)(x) &= rf(x) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.48 ***Ejemplo 2.49*** ***Ejemplo 2.50*** *El espacio vectorial* $\mathbb{R}[t]$

Define una estructura de

Ejemplo 2.51 ***Ejemplo 2.52*** *espacio vectorial* en el conjunto $\mathbb{R}[t]$ de polinomios en t con coeficientes en $\mathbb{R}$.

Soluión. Si $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ and $q(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n$ son dos polinomios en $\mathbb{R}[t]$, entonces las definiciones:

$$\begin{aligned} p(t) + q(t) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \cdots + (a_n + b_n)t^n \\ ap(t) &= aa_0 + aa_1 t + \cdots + aa_n t^n \\ \mathbf{0} &= 0 \end{aligned}$$

proporcionan la estructura del espacio vectorial deseado.♦

Ejemplo 2.53 *Algunos ejemplos de espacios vectoriales son los siguientes:*
(a)El espacio vectorial trivial es el conjunto V ={0}, con respecto a cualquier
(b)Los conjuntos de polinomios $\mathbb{Q}$[x], $\mathbb{R}$[x] y $\mathbb{C}$[x] son espacios vectoriales con cuerpo de escalares, respectivamente, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

Proposición 2.12 *Si V es un espacio vectorial sobre un cuerpo K, se tienen las siguientes:*
1.Si $ru = 0$ entonces $r = 0$ o $u = 0$.
2.$(-r)v = r(-v) = -rv$.

Subespacio vectorial

Dados un V sobre un cuerpo K y un subconjunto no vacío S de V, resulta interesante preguntarse si S bajo la misma adición de vectores y la misma acción de escalares sobre vectores, conforma un espacio vectorial sobre K. En caso afirmativo, se dice que S es un Subespacio del espacio V. Esta relación se denota por $S \leq V$. Según esta definición, si deseamos establecer que $S \leq V$ deberíamos verificar el cumplimiento cuatro axiomas para la adición de vectores y cuatro axiomas para la acción de escalares sobre vectores. Sin embargo, solo es necesario verificar el cumplimiento de dos condiciones, como lo muestra la siguiente
proposición.

Proposición 2.13 *Un subconjunto W no vacío de V se dice un subespacio de él si W con las operaciones de suma y producto por un escalar real es un espacio vectorial. Para probar que W es un subespacio vectorial de V solo es suficiente verificar que se satisfacen las dos leyes de clausura, esto es:*
Si v,w en W entonces v+w en W y si $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $\lambda w \in W$.

Ejemplo 2.54 *En el plano cartesiano el subconjunto $S = \{(x, y), |y = mx\}$, donde $m \in \mathbb{R}$ es una constante, representa una recta que pasa por el origen y conforma un subespacio de $\mathbb{R}^2$.*

Ejemplo 2.55 *En el espacio de polinomios reales el subconjunto $\mathbb{R}_n[x]$ de polinomios de grado $\leq n$ conforma un subespacio.*

Ejemplo 2.56 *En el espacio de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ la colección de funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ conforma un subespacio. Se tienen dos subespacios notables: C^n(a,b) conformado por todas las funciones de (a,b) en $\mathbb{R}$ cuyas primeras n derivadas son continuas, y C^∞(a,b) constituido por las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ para las cuales las derivadas de cualquier orden son continuas. Similarmente, se tienen los subespacios C^n(a,b) y C^∞(a,b) de C($\mathbb{R}$). También, en el espacio de sucesiones reales la colección de sucesiones convergentes es un subespacio. Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que es polinómica si existe un entero positivo m tal que a_n=0 para cada n$\geq$m. Es claro que el conjunto de sucesiones polinómica es un subespacio del espacio de sucesiones convergentes.*

Ejemplo 2.57 *En cada espacio vectorial V se tienen dos subespacios propios: 0={0} y V.*

Proposición 2.14 *La intersección de dos subespacios es un subespacio. Más generalmente, la intersección de cualquier familia no vacíaa de subespacios de un espacio vectorial es un subespacio.*

Definición 2.31 *Sea V un espacio vectorial y S un subconjunto no vacío de V; nótese que el subespacio más* pequeño *de V que contiene a S es la intersección de todos los subespacios de V que contienen a S. Este subespacio se denota por $< S >$ y se conoce como el* subespacio generado por S.

A continuación veremos que $< S >$ puede describirse en términos de combinaciones lineales de elementos de S. Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$ elementos del espacio V, una *combinación lineal* de estos elementos es un vector $v \in V$ de la forma $v = a_1.v_1 + \cdots + a_n.v_n$, donde $a_1, \ldots, a_n$ son escalares del cuerpo K. Se puede entonces afirmar lo siguiente.

Proposición 2.15 *Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K y sea S un subconjunto no* vacío *de V. Entonces $< S >$ coincide con el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales realizadas con elementos de S.*
Más exactamente,

$$< S > = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.v_i \,|\, \lambda_i \in K\,, v_i \in S\,, n \geq 1 \right\}$$

Esta presentación permite identificar a $< S >$ como la *envolvente lineal* de S. Si $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es finito, entonces

$$< S > = \{\textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i.v_i \,|\, \lambda_i \in K\}\,.$$

En cada espacio vectorial existen ciertos subconjuntos conocidos como bases; la importancia de estos subconjuntos radica en que cada elemento del espacio puede ser representado de manera única a través de sus elementos. El propósito de la presente lección es explicar en detalle la noción de base, la cual es fundamental en álgebra lineal.

Ejemplo 2.58 *Analizar si el subconjunto*

$$H = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\right\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$con las operaciones usuales de la adición y multiplicación por un escalar.

Solución
Como $(0, 0, 0) \in H : 0 + 2.0 + 3.0 = 0, H \neq \phi$.
i) Sean $u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2) \in H$, entonces

$$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

Luego,

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2) &= x_1 + 2y_1 + 3z_1 + x_2 + 2y_2 + 3 + z_2 \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Por tanto $u + v \in H$
ii)Sea $u = (x, y, z) \in H$, y sea $c \in \mathbb{R}$ entonces

$$cu = (cx, cy, cz)$$

Luego,

$$\begin{aligned} (cx) + 2(cy) + 3(cz) &= c(x + 2y + 3z) \\ &= c0 = 0 \end{aligned}$$

Por tanto $cu \in H$.
H es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 2.59 *Sea $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, el conjunto de los polinomios de grado ≤ 3, con coeficientes reales, con las operaciones usuales de adición de polinomios y multiplicación de polinomios por un número real.Demostrar que el conjunto*

$$W = \{p(x) \in V : p(x) = ax^3 + bx^2 + (a+b)x + 2b, \quad a, b \in \mathbb{R}\},$$

es un subespacio vectorial de V.

Solución
$W \neq \phi$, pues $0(x) \in W : 0(x) = 0x^3 + 0x^2 + (0+0)x + 2\,(0)$
(i) Sean $p(x), q(x) \in W$ entonces

$$\begin{aligned} p(x) &= ax^3 + bx^2 + (a+b)x + 2b,\ a, b \in \mathbb{R} \\ q(x) &= a'x^3 + b'x^2 + (a'+b')x + 2b',\ a', b' \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= \left(a + a'\right) x^3 + \left(b + b'\right) x^2 + (a + a' + b + b')x + 2\left(b + b'\right),\ a, b,\ a', b' \in \mathbb{R} \\ &\Longrightarrow p(x) + q(x) \in W \end{aligned}$$

(ii)Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $(\lambda p)(x) = \lambda p(x) = \lambda\left(ax^3 + bx^2 + (a+b)x + 2b\right) = \lambda ax^3 + \lambda bx^2 + (\lambda a + \lambda b)x + 2\,(\lambda b)$
$\Longrightarrow (\lambda p)(x) \in W$

Ejemplo 2.60 *Sea $\mathbb{R}^3$el espacio vectorial con las operaciones usuales. Analizar si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$.*
$(a)\, S = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$.
$(b)\, T = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$.

Solución
$(a)\, S \neq \phi$, pues $(0, 0, 0) \in S : 0 = 0 = 0$
$(R1)$ Sean $u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2) \in S$ entonces $u = (x_1, x_1, x_1), v = (x_2, x_2, x_2) \Longrightarrow$
$u + v = (x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2) \in S$
$(R2)$Sean $u = (x, y, z) \in S$ y Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $u = (x, x, x)$
$\lambda u = (\lambda x, \lambda x, \lambda x) \in S$
Por tanto S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.
$(b)\, T \neq \phi$, pues $(0, 0, 0) \in S : 0 = 0^2 + 0^2$
$(R1)$ Sean $u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2) \in T$ entonces $z_1 = x_1^2 + y_1^2,\ z_2 = x_2^2 + y_2^2$
Entonces $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$
$z_1 + z_2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 \neq (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 = \left(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + +y_2^2\right) + 2x_1x_2 + +2y_1y_2$
Por ejemplo:
$(R1)$Sean $u = (1, 1, 2), v = (-1, -1, 2) \in T \Longrightarrow u + v = (0, 0, 4) \notin T$, pues $4 \neq 0^2 + 0^2$
o
$(R2)$Sean $u = (1, 1, 2) \in T$ y Sea $\lambda = 2$ entonces $\lambda u = 2u = (2, 2, 4) \notin T$, pues $4 \neq 2^2 + 2^2$
Por tanto T no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 2.61 *Analizar si los siguientes subconjuntos del espacio vectorial V (con las operaciones usuales) son subespacios.*

$(a)\,\mathcal{S} = \left\{A = (a_{ij})_{2\times 2} \in V : a_{11} + a_{22} = 0\right\},$

donde $V = \mathcal{M}_{2\times 2}$ *, es el conjunto de todas las matrices cuadradas de orden* 2×2.

$(b)\,\mathcal{T} = \{f \in V : \exists k \geq 0;\ \ |f\ \ (t)| \leq k,\ \forall t \in \mathbb{R}\},$

donde V*, es el conjunto de las funciones* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Solución

$(a)\,\mathcal{S} \neq \phi$, pues $(0, 0, 0) \in \mathcal{S}$.

$(R1)$ $A = (a_{ij})_{2\times 2}\,, B = (b_{ij})_{2\times 2} \in S$ entonces $\ a_{11} + a_{22} = 0, b_{11} + b_{22} = 0 \Longrightarrow$

$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{2\times 2}$

$(\ a_{11} + b_{11}) + (a_{22} + b_{22}) = (a_{11} + a_{22}) + (b_{11} + b_{22}) = 0$

Por tanto, $A + B \in \mathcal{S}$.

$(R2)$Sea $A = (a_{ij})_{2\times 2} \in \mathcal{S}$ y Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $\ a_{11} + a_{22} = 0$

$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{2\times 2}$

$\lambda a_{11} + \lambda a_{22} = \lambda\,(a_{11} + a_{22}) = 0$

Por tanto, $\lambda A \in \mathcal{S}$.

Por tanto $\mathcal{S}$ es un subespacio vectorial de V.

$(b)\,\mathcal{T} \neq \phi$, pues $f = 0 \in \mathcal{T}$.

$(R1)$ Sean $f, g \in \mathcal{T}$: existen $k_1 \geq 0$, $k_2 \geq 0$ tales que $|f\ \ (t)| \leq k_1$, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$|g\,(t)| \leq k_2$, $\forall t \in \mathbb{R}$

Luego, $|f\ \ (t) + g\,(t)| \leq |f\ \ (t)| + |g\,(t)| \leq k_1 + k_2 = k$,

existe un $k > 0 : |f\ \ (t) + g\,(t)| \leq k, \forall t \in \mathbb{R}$.

Por tanto, $f + g \in \mathcal{T}$.

$(R2)$Sea $f \in \mathcal{T}$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $\exists k \geq 0$; $|f\ \ (t)| \leq k$, $\forall t \in \mathbb{R}$

$|(\lambda f)\ \ (t)| = |\lambda|\,|f\ \ (t)| \leq |\lambda|\,k = k' \Longrightarrow \exists k' \geq 0;\ |(\lambda f)\ \ (t)| \leq k',\ \forall t \in \mathbb{R}$

Luego, $\lambda f \in \mathcal{T}$.

Por tanto $\mathcal{T}$ es un subespacio vectorial de V.

Ejercicios propuestos:Espacios vectoriales y subespacios vectoriales

1. Sea $\mathcal{M}_{2\times 2}$ el conjunto de las matrices reales de orden 2×2. Si $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se definen las operaciones $\oplus$ y $\odot$ del siguiente modo.

$$\begin{aligned} A \oplus B &= AB \text{ (producto usual de matrices)} \\ \alpha \odot A &= \alpha A \text{ (producto usual de un escalar por una matriz)} \end{aligned}$$

   Determinar, justificando su respuesta, cuales de los 10 axiomas de espacio vectorial se cumplen para estas operaciones.

2. Demostrar que $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial real con la adición definida por

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2 + 1)$$

   y la multiplicación por un escalar definida por

$$\alpha \odot (x_1, y_1) = (\alpha + \alpha x_1 - 1, \alpha + \alpha y_1 - 1)$$

3. Sea $V = \{(e^x, e^y) :\ x, y \in \mathbb{R}\}$ provisto de las operaciones siguientes:

$$\begin{aligned} (e^{x_1}, e^{y_1}) \oplus (e^{x_2}, e^{y_2}) &= (e^{x_1+x_2}, e^{y_1+y_2}) \\ \alpha \odot (e^x, e^y) &= (e^{\alpha x}, e^{\alpha y}) \end{aligned}$$

   Demostrar que V con estas operaciones es un espacio vectorial real.

4. En los siguientes casos determinar si el conjunto dado es o no un espacio vectorial. si no lo es, enuncie los axiomas que no se cumplen

   (a) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, tal que $x = y = z\}$ con las operaciones usuales de adición de vectores y multiplicación de un vector por un escalar.

   (b) $F = f : f$ es una función cuyo dominio es $\mathbb{R}$ y su rango es un subconjunto de $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales de adición de funciones y multiplicación de una función por un escalar.

   (c) $E = \mathcal{P}_n$, el conjunto de los polinomios de grado $\leq n$, con coeficientes reales, con las operaciones usuales de adición de polinomios y multiplicación de polinomios por un número real

5. Sea $E = \mathcal{C}\,[0,1]$ el conjunto de las funciones $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, tales que f es continua en $[0,1]$

   (a) Verificar que E con las operaciones usuales de adición y multiplicación de funciones por un número real, es un espacio vectorial

   (b) Si se consideran

   $$F_1 = \{f \in E : f(0) = f(1) = 0\}, \quad F_2 = \{f \in E : f(0) = 2\}$$

   Analizar si F_1 y F_2 son subespacios de E.

6. Determinar, justificando su respuesta, cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de los espacios vectoriales que los contienen.
(Asumimos que son espacios vectoriales bajos las operaciones usuales)

   (a) $H_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 - y^2 = 0\}$

   (b) $H_2 = \{(x-2y, x, 2y, -y) \in \mathbb{R}^4 :\ x, y \in \mathbb{R}\}$

   (c) $H_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \max\{x,y\} = x\}$

   (d) $H_4 = \{(x,y,x-y) \in \mathbb{R}^3 :\ x, y \in \mathbb{R}\}$

   (e) $H_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x \text{ es racional}\}$

   (f) $H_6 = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2} :\ \operatorname{tr}(A) = 0\}$

   (g) $H_7 = \{p \in \mathcal{P}_3 :\ p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0,\ a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R} \text{ y } a_1 \neq 0\}$

   (h) $H_8 = \{p \in \mathcal{P}_2 :\ p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0,\ a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R} \text{ y } a_2a_1 = 0\}$

7. Sean $F_1 = \{v = (x,x,x)\,,\, x \in \mathbb{R}\}$ y $F_2 = \{w = (x,y,0)\,;\, x,\, y \in \mathbb{R}\}$. Demostrar que F_1 y F_2 son subespacios de $\mathbb{R}^3$.

8. Sean S y T dos subespacios de un espacio vectorial V. Definimos el conjunto

   $$S + T = \{v \in V :\ v = s + t\,,\, s \in S \text{ y } t \in T\}$$

   El conjunto $S+T$ se llama suma de los subespacios S y T. Pruebe que $S+T$ es un subespacio de V.

   Hallar e identificar la suma de los subespacios de $\mathbb{R}^3$.

   $$\begin{aligned} S &= \{(t, 2t, 3t) \in \mathbb{R}^3 :\ t \in \mathbb{R}\} \\ T &= \{(3s, 2s, -5s) \in \mathbb{R}^3 :\ s \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

9. Responder con verdadero o falso

(a) El conjunto X formado por los vectores $v = (x, y, z)$ tales que $z = 3x$, $x = 2y$, es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

(b) El conjunto Y formado por los vectores $v = (x, y, z)$ tales que $xy = 0$, es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

(c) El conjunto L formado por los vectores $v = (x, 2x, 3x, ..., nx)$, es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

2.4.1 Bases y dimensión del espacio vectorial

Definición 2.32 *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y S un subconjunto no vacío de V, se dice que S* genera *V si la* envolvente lineal *de S coincide con V, es decir, $< S >= V$. El espacio V se dice finitamente generado si existe en V un subconjunto finito S de generadores.*

Definición 2.33 *Sea $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un subconjunto finito de V, se dice que X es un conjunto de vectores linealmente independientes (L I) si la única combinación lineal nula con los elementos de X es a través de escalares nulos. Más exactamente, los vectores de X son linealmente independientes si para cualesquiera escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ se cumple que*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i . x_i = 0 \Longleftrightarrow \lambda_i = 0,\, 1 \leq i \leq n.$$

Por definición asumimos que el conjunto vacío es L I. Un subconjunto cualquiera X de V es L I si cada subconjunto finito de X es L I. X es linealmente dependiente (L D) si no es L I.

La siguiente proposición reune algunas propiedades básicas sobre dependencia e independencia lineal.

Proposición 2.16 *Sea V un K-espacio y $\phi \neq V$. Entonces*

(a) S es L D si y solo si existe $x \in S$ tal que $x \in < S' >$, donde $S' = S - \{x\}$.

(b) Si $0 \in S$ entonces S es L D.

(c) Si S es L I entonces cada subconjunto de S es L I.

(d) Si S es finito con $n \geq 0$ elementos, entonces cada conjunto de $n+1$ elementos de $< S >$ es L D.

Ejercicios

1. Demuestre que en el espacio de funciones el conjunto $\beta = \{e^{nx} \mid n \in \mathbf{N}\}$ es L I.
2. Demuestre que dos vectores de $\mathbb{R}^2$ son L D si y solo si pertenecen a misma recta que pasa por el origen.

Ya estamos en capacidad de presentar la noción de base. $\beta \subset V$ es una *base* para V si se cumplen dos condiciones:

(a) $< \beta >= V$

(b) β es L I.

Ejemplo 2.62 *En $\mathbb{R}^n$ los vectores*

$$e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0), \qquad 1 \leq i \leq n$$

constituyen la llamada base canónica *(1 se encuentra en la i-ésima entrada de la n-upla). Cambiando $\mathbb{R}$ por cualquier cuerpo K obtenemos la base canónica de K^n.*

Ejemplo 2.63 *En el espacio de polinomios el conjunto de polinomios $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ constituye su base canónica. En el subespacio de polinomios de grado $\leq n$ la base canónica es $\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n\}$.*

Ejemplo 2.64 *En el espacio $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ el espacio de matrices reales 2×2 se tiene la siguiente base canónica:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.65 *En el espacio de sucesiones reales la colección de sucesiones*

$$e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0, \ldots), \, i \geq 1$$

conforman la base canónica para el subespacio de sucesiones polinómicas.

Ejemplo 2.66 *El conjunto ϕ es, por definición, la única base del espacio nulo* $0 = \{0\}$.

Terminamos esta lección con una de las principales caracterizaciones del concepto de base.

Proposición 2.17 *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio y β un subconjunto no vacío de V. β es una base de V si y solo si cada elemento $v \in V$ tiene una representación única (salvo sumandos nulos) como combinación lineal de elementos de β en la forma:*

$$v = \lambda_1.v_1 + \cdots + \lambda_n.v_n, \qquad \lambda_i \in K, \, v_i \in \beta, 1 \leq i \leq n.$$

Ejemplo 2.67 *Determine los valores de $c \in \mathbb{R}$ para que el siguiente conjunto de vectores,*

$$\mathcal{S} = \{u = (1, -1, 2), v = (2, 3, 1), w = (4, c, 5)\}$$

del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, sea linealmente dependiente.

Solución.

$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & c \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 3c - 3 = 0$, de donde $c = 1$.

Ejemplo 2.68 *En el espacio de polinomios de grado menor o igual que 3, $\mathcal{P}_3$.Analizar si el conjunto dado de vectores $\mathcal{T} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, donde $p_1(x) = x^3$, $p_2(x) = (x-1)^3$, $p_3(x) = (x-2)^3$, $p_4(x) = 1 + x^3$, es linealmente dependiente o linealmente*

Solución.

Considere la ecuación $c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x) + c_3 p_3(x) = 0$
expandiendo la ecuación

$$c_1 x^3 + c_2(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + c_3(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3,$$

se tiene que el sistema de ecuaciones resultante está dado por:

$$\begin{cases} 1c_1 + 1c_2 + 1c_3 = 0 \\ 0c_1 - 3c_2 - 6c_3 = 0 \\ 0c_1 + 3c_2 + 12c_3 = 0 \\ 0c_1 - 1c_2 - 8c_2 = 0 \end{cases}$$

La matriz aumentada en su forma original y en los sucesivos pasos de escalonamiento están dadas por

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 12 & 0 \\ 0 & -1 & -8 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 12 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 0 \end{bmatrix}$$

Evidentemente, el sistema de ecuaciones tiene una única solución, la trivial, y el conjunto formado por $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ es linealmente independiente.

Ejemplo 2.69 *Si $\mathcal{B}=\{v_1, v_2, \cdots .v_n\}$ es una base para un espacio vectorial V. Analizar para que valores de $n \in \mathbb{N}$,*

$$\mathcal{B}'=\{v_1+v_2, v_2+v_{3,}v_3+v_{4,}\cdots, v_{n-1}+v_n, v_n+v_1\}$$

es una base de V.

Solución. Si

$$\lambda_1(v_1+v_2)+\lambda_2(v_2+v_3)+\lambda_3(v_3+v_{4,})+\cdots+\lambda_{n-1}(v_{n-1}+v_n)+\lambda_n(v_n+v_1)=0$$

$$(\lambda_1+\lambda_n)v_1+(\lambda_1+\lambda_2)v_2+(\lambda_2+\lambda_3)v_3+\cdots+(\lambda_{n-1}+\lambda_n)v_n=0$$
$$\lambda_1=-\lambda_n, \lambda_2=\lambda_n, \cdots, \lambda_{n-1}=(-1)^{n-1}\lambda_n, \lambda_{n-1}=-\lambda_n$$

De donde se tiene que n es un número par natural.

Ejemplo 2.70 *En $\mathbb{R}^3$, sean los subconjuntos*

$$\begin{aligned} S &= \{(1,2,0),(1,0,1)\} \\ T &= \{(1,2,0),(2,0,2),(3,2,2)\} \end{aligned}$$

(a)Demostrar que los subespacios generados por S y T son iguales.Es decir,$\langle S\rangle=\langle T\rangle$.
(b)Representar graficamente el subespacio hallado en la parte (a) y hallar una base de dicho subespacio.

Solución.
(a) $\langle S\rangle=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y,z)=t(1,2,0)+r(1,0,1);t,r\in\mathbb{R}\right\}$,
Se observa que $(3,2,2)=(1,2,0)+2(1,0,1)$;
$\langle T\rangle=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y,z)=t(1,2,0)+r(1,0,1);t,r\in\mathbb{R}\right\}$
De donde $\langle S\rangle=\langle T\rangle$.
(b) $\langle S\rangle$, $\langle T\rangle$ representan planos que pasan por el origen de cooordenadas.
$\langle S\rangle=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y,z).(1,2,0)\times(1,0,1)=0\right\}$
$\langle S\rangle=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y,z)\cdot(2,-1,-2)=0\right\}$
$\langle S\rangle=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:2x-y-2z=0\right\}$
Sea $v=(x,y,z)\in\langle S\rangle:2x-y-2z=0\Longrightarrow y=2x-2z$
$\langle S\rangle=\{(x,y,z)=(x,2x-2z,z)=x(1,2,0)+z(0,-2,1):x,z\in\mathbb{R}\}$
$\langle S\rangle=\langle\{(1,2,0),(0,-2,1)\}\rangle$, además $(1,2,0)$ y $(0,-2,1)$ son linealmente independientes.
$\beta_{\langle S\rangle}=\{(1,2,0),(0,-2,1)\}$ es una base para $\langle S\rangle$.

Ejemplo 2.71 *Sea $V=\mathcal{P}_2$ el espacio vectorial de todos los poliniomios de grado ≤ 2.*
Considere $S=\{p_1(x),p_2(x),p_3(x)\}$, donde $p_1(x)=1$, $p_2(x)=1+x$, $p_3(x)=(1+x)^2$.Analizar si S es una base de $\mathcal{P}_2$.

Solución
(i) S es linealmente independiente
Si

$$\begin{aligned} c_1p_1(x)+c_2p_2(x)+c_3p_3(x) &= 0 \\ c_1(1)+c_2(1+x)+c_3(1+x)^2 &= 0 \\ c_3x^2+(+c_2+2c_3)x+c_1+c_2+c_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} c_3 = 0 \\ c_2 + 2c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 0 \end{cases}.$$

Trabajando en la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] F_1 \longleftrightarrow F_3 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] F_2 \longleftrightarrow F_2 + (-2)\, F_3 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] F_1 \longleftrightarrow F_1 + (-1)\, F_3 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}.$$

Por tanto S es linealmente independiente.

(ii) S Generan $\mathcal{P}_2$

Sea $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2$, entonces existen escalares c_1, c_2, c_3 tales que

$$p(x) = c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x) + c_3 p_3(x)$$

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= c_1(1) + c_2(1+x) + c_3(1+x)^2 \\ ax^2 + bx + c &= c_3 x^2 + (+c_2 + 2c_3)\, x + c_1 + c_2 + c_3 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} c_3 = a \\ c_2 + 2c_3 = b \\ c_1 + c_2 + c_3 = c \end{cases}$$

Trabajando en la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \end{array}\right] F_1 \longleftrightarrow F_3 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & c \\ 0 & 1 & 2 & b \\ 0 & 0 & 1 & a \end{array}\right] F_2 \longleftrightarrow F_2 + (-2)\, F_3 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & 1 & c \\ 0 & 1 & 0 & b-2a \\ 0 & 0 & 1 & a \end{array}\right] F_1 \longleftrightarrow F_1 + (-1)\, F_3 \sim \left[\begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & 0 & c-a \\ 0 & 1 & 0 & b-2a \\ 0 & 0 & 1 & a \end{array}\right] F_1 \longleftrightarrow F_1 + (-1)\, F_2 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|l} 1 & 0 & 0 & c-a-(b-2a) = a-b+c \\ 0 & 1 & 0 & b-2a \\ 0 & 0 & 1 & a \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = a-b+c \\ c_2 = b-2a \\ c_3 = a \end{cases}$$

Luego S genera $\mathcal{P}_2$.

Por tanto S es una base de $\mathcal{P}_2$.

Dimensión de un espacio vectorial

En esta lección discutiremos los siguientes aspectos relativos a las bases: existencia, unicidad y cardinalidad ($=$cantidad de elementos). Comenzamos con el siguiente teorema sobre existencia de bases en cualquier espacio vectorial. La prueba de este teorema se apoya en el Lema de Zorn (axioma de elección), el cual representa uno de los supuestos básicos de la teoría clasica de conjuntos. El lector no interesado en la prueba puede simplemente asumir el Teorema 1 como un axioma.

Teorema 2.4 *Todo espacio vectorial posee al menos una base.*

Con respecto a la unicidad de las bases podemos decir que, en general, un espacio vectorial tiene infinitas bases. Pensemos por ejemplo que el espacio V es no nulo (si V es nulo su única base es $\emptyset$); si β es una base cualquiera de V y v es un elemento de β, entonces cambiando v por $\lambda.v$ en β, con cada $\lambda \in K - \{0\}$, obtendremos bases diferentes en V. Cuando K es infinito esta colección de bases es infinita. En realidad, el único espacio con base única es el espacio nulo.

Mucho más interesante que la pregunta sobre la unicidad de las bases es el problema sobre el tamaño de éstas. Las siguientes proposiciones constituyen la prueba del Teorema 2 que enunciaremos más adelante.

Proposición 2.18 *Si un espacio vectorial V posee una base finita, entonces todas sus bases son finitas.*

La proposición anterior permite clasificar los espacios vectoriales en dos categorías: los de bases finitas y los de bases infinitas.

Proposición 2.19 *Sea V un espacio vectorial con bases finitas $\beta = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $\beta\prime = \{v_1, \ldots, v_m\}$. Entonces $n = m$.*

Proposición 2.20 *Sea V un espacio vectorial con bases infinitas β y β'. Entonces $card\,(\beta) = card\,(\beta\prime)$.*

Para cada espacio vectorial V se cumple que todas las bases tienen la misma cardinalidad.

El teorema anterior permite definir la noción de dimensión en un espacio vectorial V como el número de elementos que forma cualquiera de sus bases; denotaremos este invariante de V por $\dim_K(V)$, o simplemente por $\dim(V)$, es claro por el contexto sobre que cuerpo estamos trabajando. Si V es de bases infinitas diremos que V es de dimensión infinita. Si β es un subconjunto de V, definimos el *rango* de X, como la dimensión de la envolvente lineal de X, es decir, $rank_K(X) = \dim_K < X >$.

Ejemplo 2.72 $\dim(\mathbb{R}^n) = n$

Ejemplo 2.73 *El espacio de los polinomios es de dimensión infinita.*

Ejemplo 2.74 $\dim(\mathcal{P}_n) = n + 1$

Ejemplo 2.75 $\dim(0) = 0.$

Ejercicio. Demuestre que si un espacio vectorial V posee un subconjunto infinito L I, entonces V es de dimensión infinita.

Algunas propiedades interesantes relativas a espacios de dimensión finita se presentan a continuación.

Proposición 2.21 *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. Entonces,*

(a) Cada conjunto de n elementos $L\,I$ de V conforman una base.

(b) Cada conjunto de n generadores de V conforman una base de V.

(c) Sea $m < n$ y sean $v_1, \ldots, v_m$ vectores $L\,I$ de V. Entonces es posible encontrar vectores $v_{m+1}, \ldots, v_n$ en V tales que $\{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ es una base de V.

(d) Sea S un subespacio de V. Entonces, cada base de S puede extenderse hasta una base de V. En particular, $\dim(S) \leq \dim(V)$.

(e) Sean $x_1, \ldots, x_m$ elementos cualesquiera de V y S su envolvente lineal. Entonces, $\dim(S)$ coincide con el máximo número de vectores $L\,I$ encontrados en la colección $v_1, \ldots, v_m$ de vectores dados.

Ejercicios Propuestos:Bases y dimensión de espacios vectoriales

1. Determinar si el conjunto de vectores dado genera el espacio vectorial

   (a) En $\mathbb{R}^2$, $u = (1,1)$, $v = (2,1)$

   (b) En $\mathbb{R}^3$, $u = (1,-1,2)$, $v = (1,1,2)$, $w = (0,0,1)$

   (c) En $\mathcal{P}_2$, $p_1(x) = 1 - x$, $p_2(x) = 3 - x^2$, $p_3(x) = x$

2. Analizar si el conjunto dado de vectores es linealmente dependiente o linealmente independiente

   (a) En $\mathbb{R}^2$, $u = (1,2)$, $v = (-1,-3)$

   (b) En $\mathbb{R}^3$, $u = (1,1,1)$, $v = (1,2,1)\,, w = (2,1,2)$

   (c) En $\mathbb{R}$, $u = (1,0,1)$, $v = (0,1,1)\,, w = (1,1,0)$

   (d) En $\mathbb{R}^4$, $u_1 = (1,-2,1,1)$, $u_2 = (3,0,2,-2)$, $u_3 = (0,4,-1,1)$, $u_4 = (5,0,3,1)$

   (e) En $E = \mathcal{C}[0,1]$ el conjunto de las funciones $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, tales que f es continua en $[0,1]\,,$ $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos x$.

3. Determinar si el conjunto de vectores dado es una base del espacio vectorial dado

   (a) En $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{(1,1)\,,\ (-1,1)\}$. En caso afirmativo expresar cada uno de los vectores $e_1 = (1,0)$ y $e_2 = (0,1)$ como combinación lineal de los elementos de esta base

   (b) En $\mathbb{R}^2$, $F = \{u = (x,y) \in \mathbb{R} : 2x + y = 0\}$, $\qquad \mathcal{B} = \{(1,-2)\}$

   (c) En $\mathbb{R}^2$, $F = \{u = (x,y) \in \mathbb{R} : 2x + y = 0\}$, $\qquad \mathcal{B} = \{(1,-2)\,,\ (-5,10)\}$

   (d) En $\mathcal{P}_3 : \mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, donde $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = 1 + x$, $p_3(x) = 1 + x^2$, $p_4(x) = 1 + x^3$. En caso afirmativo expresar el polinomio $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 1$ como combinación lineal de los elementos de esta base

4. Demostrar que el conjunto solución $\{e^{x^2}, xe^{x^2}, x^2e^{x^2}\}$ es linealmente independiente en $C(\mathbb{R})$, el conjunto de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que f es continua.

5. Analizar la dependencia lineal de los polinomios $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_3$ dados por

$$\begin{aligned} p_1(x) &= 1 - 2x + x^2 + x^3 \\ p_2(x) &= -5 - 2x - 9x^2 + 7x^3 \\ p_3(x) &= 2 - x + 3x^2 - x^3 \end{aligned}$$

   y hallar una base y la dimensión del espacio generado por ellos.

6. Dadas las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & \alpha \end{pmatrix}$$

   hallar el valor de α para que A_4 esté en el subespacio generado por A_1, A_2 y A_3.

7. Dados los vectores $(k,1,0)\,, (1,k-1,k)\,, (1+k,1,k)$ de $\mathbb{R}^3$.

   (a) ¿Para cuáles valores de k estos vectores forman una base de $\mathbb{R}^3$?.

   (b) ¿Para cuáles valores de k estos vectores generan subespacios propios de $\mathbb{R}^3$?.Hallar dichos subespacios mostrando un conjunto generador para cada uno.

8. Dados los vectores $v_1 = (1,2,-2,1)\,, v_2 = (2,-1,1,2)$ y $v_3 = (1,-3,-1,3)$ de $\mathbb{R}^4$, hallar una base para el subespacio

$$H = \{v \in \mathbb{R}^4 : v \text{ es ortogonal a los tres vectores dados}\}.$$

9. Dado

$$H = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+w = 0 \wedge x+2y+3z+4w = 0\}.$$

   (a) Demostrar que H es un subespacio de $\mathbb{R}^4$.

   (b) Hallar una base para H.

10. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$,sea H el conjunto de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ formado por todas las matrices X tales que $AX = XA$.

   (a) Demostrar que H es un subespacio de $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

   (b) Hallar, justificando su respuesta, una base para H.

11. Sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base del espacio vectorial V de dimensión 4.Dados

$$\begin{aligned} v_1 &= 2u_1 + 3u_2 + u_3 - u_4 \\ v_2 &= u_1 + 2u_2 \\ v_3 &= u_1 - u_3 + 3u_4 \\ v_4 &= u_4 \end{aligned}$$

   analizar si el conjunto $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es una base de V.

12. Hallar una base del siguiente subespacio

$$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0\}.$$

13. Sea $E = \mathcal{M}_{m\times n}$ el conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ con elementos reales. Si la suma de matrices y la multiplicación de una matriz por un escalar son las usuales, se comprueba que $\mathcal{M}_{m\times n}$ es un espacio vectorial

   Determinar si el siguiente conjunto de vectores es una base de $\mathcal{M}_{2\times 2}$

   $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$; donde $abcd \neq 0$

14. Hallar una base para

   (a) $E = \left\{v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z}{5}\right\}$

   (b) $E = \{v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - 3z = 0\}$

   (c) $E = \{v = (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : ax + by + cz + dw = 0\}$, donde $abcd \neq 0$

Norberto Chau

Lima, 23 de enero de 2012

2.4.2 Vectores de coordenadas

Con el fin de ser capaz de enlazar el álgebra lineal con el álgebra de matrices, tenemos que encontrar una manera de representar los vectores numéricamente. Esto se puede hacer eligiendo una base para un espacio determinado y por escrito cada vector como una combinación única lineal de vectores de la base. Los coeficientes que surgen de esta manera son los escalares necesario.

Sea V un espacio vectorial $n-$dimensional sobre un campo k, sea $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V, y sea $x \in V$. Entonces x se puede escribir únicamente en la forma

$$x = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$$

en relación con la base S. Por lo tanto, tienen un mapeo invertible $V \to \Bbbk^n$ que asocia a cada vector $x \in V$ un vector columna única

$$[x]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \Bbbk^n,$$

determines a unique linear combination $\hat{y}_S = b_1v_1 + \cdots + b_nv_n \in V.$

conocido como el vector de coordenadas de x con respecto a la base de S. Por el contrario, cada vector columna

$$y = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \Bbbk^n$$

determina una única combinación lineal $\hat{y}_S = b_1v_1 + \cdots + b_nv_n \in V.$

Definición 2.34 *La aplicación $x \to [x]_S$ que asigna a cada vector $x \in V$ el vector de coordenadas $[x]_S \in k^n$ es la* aplicación de coordenadas *de V a k^n determinado por la base S para V.*

Definición 2.35 *La aplicación $y \to \hat{y}_S$ que asigna a cada vector columna $y \in k^n$ la combinación lineal $\hat{y}_S \in V$ es la* aplicación combinación lineal de coordenadas *de k^n en V determinado por la base S para V.*

Teorema 2.5 *Teorema de aplicación de coordenadas)Las aplicaciones $x \to [x]_S$ y $y \to \hat{y}_S$ son inversos el uno del otro.*

Prueba. Los cálculos necesarios para demostrar este teorema es trivial. Por definición,

$$x = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n \to [x]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = y \to \hat{y}_S = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = x$$

y

$$y = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \to \hat{y}_S = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n \to [\hat{\mathbf{y}}_S]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = y.$$

Por lo tanto, las aplicaciones de coordenadas son inversos el uno del otro. ■

Las aplicaciones combinación lineal de coordenadas, son útiles porque son inversos el uno del otro, y porque preservan la suma de vectores y la multiplicación por un escalar en el sentido del siguiente teorema.

Teorema 2.6 *Las aplicaciones de coordenadas* $\mathbf{x} \to [\mathbf{x}]_S$ *de* V *a* k^n *tiene la propiedad que* $[\mathbf{x}+\mathbf{y}]_S = [\mathbf{x}]_S + [\mathbf{y}]_S$ *y que* $[a\mathbf{x}]_S = a[\mathbf{x}]_S$.

Prueba. Sean $\mathbf{x} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$ y $\mathbf{y} = b_1\mathbf{v}_1 + \cdots + b_n\mathbf{v}_n$ son dos vectores en V y sea $\mathbf{x}+\mathbf{y} = (a_1+b_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (a_n+b_n)\mathbf{v}_n$ su suma. Entonces

$$[\mathbf{x}+\mathbf{y}]_S = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = [\mathbf{x}]_S + [\mathbf{y}]_S.$$

Además , para cualquier escalar $a \in \mathbb{k}$,

$$a\mathbf{x} = a(a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n) = (aa_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (aa_n)\mathbf{v}_n,$$

de modo que

$$[a\mathbf{x}]_S = \begin{bmatrix} aa_1 \\ \vdots \\ aa_n \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a[\mathbf{x}]_S.$$

Por lo tanto la aplicación de coordenadas preserva la suma de vectores y la multiplicación escalar. ■

Una aplicación entre dos espacios vectoriales con las propiedades descritas en el teorema anterior se llama una Transformación lineal

La pregunta obvia es ¿qué relación existe entre los vectores de coordenadas $[\mathbf{x}]_S$ y $[\mathbf{x}]_{S'}$ de un vector dado x con respecto a dos bases distintas S y S' de V. La respuesta resulta a ser bastante simple.

Si escribimos los vectores base $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ en S como combinaciones lineales de los vectores basicos en la base S', se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= a_{11}\mathbf{w}_1 + \cdots + a_{1n}\mathbf{w}_n \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_n &= a_{n1}\mathbf{w}_1 + \cdots + a_{nn}\mathbf{w}_n \end{aligned}$$

Los vectores de coordenadas de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ en la base S', por lo tanto

$$[\mathbf{v}_1]_{S'} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix} \quad \cdots \quad [\mathbf{v}_n]_{S'} = \begin{bmatrix} a_{n1} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} .$$

Sea

$$P = [[\mathbf{v}_1]_{S'} \ \cdots \ [\mathbf{v}_n]_{S'}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

la matriz cuyas columnas son los vectores de coordenadas. Entonces, por construcción, $P\,[\mathbf{x}]_S = [\mathbf{x}]_{S'}$.

Si escribimos los vectores base $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ en S' como combinaciones lineales de los vectores de la base S, obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= b_{11}\mathbf{v}_1 + \cdots + b_{1n}\mathbf{v}_n \\
&\vdots \\
\mathbf{w}_n &= b_{n1}\mathbf{v}_1 + \cdots + b_{nn}\mathbf{v}_n
\end{aligned}$$

Los vectores de coordenadas de $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ en la base, por lo tanto

$$[\mathbf{w}_1] = \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{bmatrix} \quad \ldots \quad [\mathbf{w}_n] = \begin{bmatrix} b_{n1} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{bmatrix} \quad .$$

Sea

$$Q = [[\mathbf{w}_1]_S \ \cdots \ [\mathbf{w}_n]_S] = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{1n} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

la matriz cuyas columnas son los vectores de coordenadas de la base de vectores $\mathbf{w}_i$ determinado por la base S, entonces, por construcción, $Q\,[\mathbf{x}]_{S'} = [\mathbf{x}]_S$. Es fácil comprobar que $Q = P^{-1}$

El siguiente teorema resume los resultados de estos cálculos.

Teorema 2.7 *(Teorema de cambio de base)Sea V un espacio vectorial n-dimensional sobre un campo k.Sea* $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ *y*

$S' = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ *dos bases de V, y sea x un vector en V con vectores de coordenadas* $[\mathbf{x}]_S$ *y* $[\mathbf{x}]_{S'}$*.Entonces*

existe una matriz P invertible para el cual $P[\mathbf{x}]_S = [\mathbf{x}]_{S'}$ *y* $P^{-1}[\mathbf{x}]_{S'} = [\mathbf{x}]_S$.

Prueba. Sea $\mathbf{x} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$ cualquier vector en V, escrito como una combinación lineal de la base de S. Por el hecho de que la aplicación de coordenadas $\mathbf{x} \to [\mathbf{x}]_{S'}$ conserva vector Además de la multiplicación y escalar se deduce que

$$\begin{aligned}
[\mathbf{x}]_{S'} &= [a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n]_{S'} = a_1\,[\mathbf{v}_1]_{S'} + \cdots + a_n\,[\mathbf{v}_n]_{S'} \\
&= [[\mathbf{v}_1]_{S'} \ \ldots \ [\mathbf{v}_n]_{S'}] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = [[\mathbf{v}_1]_{S'} \ \ldots \ [\mathbf{v}_n]_{S'}]\,[\mathbf{x}]_S = P\,[\mathbf{x}]_S
\end{aligned}$$

Por el contrario, $\mathbf{y} = b_1\mathbf{w}_1 + \cdots + b_n\mathbf{w}_n$ cualquier vector en V, escrito como una combinación lineal de la base S'. Del hecho de que la función de coordenadas $\mathbf{y} \to [\mathbf{y}]_S$ preserva la suma de vectores y la multiplicación escalar se deduce que

$$\begin{aligned}
[\mathbf{y}]_S &= [b_1\mathbf{w}_1 + \cdots + b_n\mathbf{w}_n]_S = b_1\,[\mathbf{w}_1]_S + \cdots + b_n\,[\mathbf{w}_n]_S \\
&= [[\mathbf{w}_1]_S \ \ldots \ [\mathbf{w}_n]_S] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = [[\mathbf{w}_1]_S \ \ldots \ [\mathbf{w}_n]_S]\,[\mathbf{y}]_{S'} = Q\,[\mathbf{y}]_{S'}
\end{aligned}$$

Esto quiere decir que $Q = P^{-1}$. ■

Las matrices P y P^{-1} juegan un papel importante en el estudio de las transformaciones lineales. Por lo tanto, dado un nombre especial.

Definición 2.36 *Las matrices* $n \times n$ P *y* P^{-1} *con la propiedad que* $P[\mathbf{x}]_S = [\mathbf{x}]_{S'}$ *y* $P^{-1}[\mathbf{x}]_{S'} = [\mathbf{x}]_S$ *son el* cambio de base }matrices *de la base* S *a la base de S/ y de la base* S' *a la base* S*, respectivamente.*

Ejemplo 2.76 *UnMatriz general de Cambio de Base de* $\mathbb{R}^2$.

Sea x un vector en $\mathbb{R}^2$, y sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ y $S' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ dos bases de $\mathbb{R}^2$.. Entonces $\mathbf{x} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 = b_1\mathbf{w}_1 + b_2\mathbf{w}_2$.Por lo tanto

$$[\mathbf{x}]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad [\mathbf{x}]_{S'} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Escribimos S en términos de S'y S' en términos de S, se obtienen dos sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = c_{11}\mathbf{w}_1 + c_{12}\mathbf{w}_2 \\ \mathbf{v}_2 = c_{21}\mathbf{w}_1 + c_{22}\mathbf{w}_2 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \mathbf{w}_1 = d_{11}\mathbf{v}_1 + d_{12}\mathbf{v}_2 \\ \mathbf{w}_2 = d_{21}\mathbf{v}_1 + d_{22}\mathbf{v}_2 \end{cases}.$$

En la notación de matriz-vector, estos sistemas toman la forma

$$[\mathbf{x}]_S = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} [\mathbf{x}]_{S'} \quad \text{and} \quad [\mathbf{x}]_{S'} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} [\mathbf{x}]_S .$$

Por sustitución, obtenemos

$$[\mathbf{x}]_S = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} [\mathbf{x}]_S$$

y

$$[\mathbf{x}]_{S'} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} [\mathbf{x}]_{S'} .$$

Dado que estas ecuaciones son válidas para todos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, se sigue que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}.$$

Por tanto

$$P = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

y

$$Q = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}^{-1}.$$

Esto nos dice que las dos bases de S y $S\prime$están conectados por las matrices invertible P y Q. ♦

Ejemplo 2.77 *Un especial Cambio de base para la matriz para* $\mathbb{R}^2$.
Sea $S = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ *y* $S' = \left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ *son dos bases para* $\mathbb{R}^2$.

Entonces

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ,$$

y

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad .$$

$\begin{cases} 1 = p + 3q \\ 0 = 2p + 4q \end{cases}$, la solución es : $\{q = 1, p = -2\}$

Así $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ y $Q = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Se sigue que

$$PQ = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$QP = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Además,

$$\begin{aligned} P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Q \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ Q \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Como podemos ver, la matriz P es la matriz de cambio de base de S a S', y su inverso Q es la matriz de cambio de base de S' a S.

Ejemplo 2.78 *Un cambio de coordenadas en* $\mathbb{R}^3$.

Convertir los vectores de la base de

$$S = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

a vectores coordenadas en la base

$$S' = \left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

utilizar el resultado para la construcción de una matriz de cambio de base de S a S'.

Solución

Comenzamos calculando el vector de coordenadas $[\mathbf{v}_1]_{S'}$.

$$a_{11} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_{12} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{13} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} + a_{13} \\ a_{11} + a_{12} \\ a_{11} + a_{13} \end{bmatrix}$$

Por tanto

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = a_{11} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_{12} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{13} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} + a_{13} \\ a_{11} + a_{12} \\ a_{11} + a_{13} \end{bmatrix}.$$

Ahora resolvemos el sistema$\begin{cases} 1 = a_{12} + a_{13} \\ 2 = a_{11} + a_{12} \\ 3 = a_{11} + a_{13} \end{cases}$.
la solución es : $\{a_{11} = 2, a_{12} = 0, a_{13} = 1\}$.
Por tanto$[\mathbf{v}_1]_{S'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{S'} = \begin{bmatrix} a_{12} + a_{13} \\ a_{11} + a_{12} \\ a_{11} + a_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Al repetir los pasos anteriores para $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$, se obtiene

$$[\mathbf{v}_2]_{S'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{S'} = a_{21} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_{22} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{23} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} + a_{23} \\ a_{21} + a_{22} \\ a_{21} + a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

y

$$[\mathbf{v}_3]_{S'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{S'} = a_{31} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_{32} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{33} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{32} + a_{33} \\ a_{31} + a_{32} \\ a_{31} + a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Con estos resultados, podemos construir el cambio de base de la matriz P de S a S'.

$$P = [[\mathbf{v}_1]_{S'} \ [\mathbf{v}_1]_{S'} \ [\mathbf{v}_1]_{S'}] = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Como era de esperar,

$$P\,[\mathbf{v}_1]_S = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{v}_1]_{S'}$$

$$P\,[\mathbf{v}_2]_S = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = [\mathbf{v}_2]_{S'}$$

$$P\,[\mathbf{v}_3]_S = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{v}_3]_{S'}.$$

A continuación, utilizamos P^{-1}, la matriz de cambio de base de S' de S, para revertir estos cálculos.
$\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$
Como era de esperar,

$$P^{-1}\,[\mathbf{v}_1]_{S'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [\mathbf{v}_1]_S$$

$$P^{-1}\,[\mathbf{v}_2]_{S'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [\mathbf{v}_2]_S$$

$$P^{-1}[\mathbf{v}_3]_{S'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{v}_3]_S .$$

Con esto se completa el cambio deseado de las coordenadas.

2.5 Transformaciones Lineales

Definición 2.37 *Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K ; una* transformación lineal *de V en W es una función $T : V \to W$ que satisface dos condiciones:*

$$\begin{aligned} (a)T(u+v) &= T(u)+T(v) \\ (b)T(\lambda.v) &= \lambda.T(v) \end{aligned}$$

para cualesquiera vectores $u, v \in V$ y cualquier escalar $\lambda \in K$. Se dice también que T es un operador lineal de V en W, o

que T es una función K-lineal de V en W.

Ejemplo 2.79 *La función $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (2x, 2y)$ es una transformación lineal.*

Ejemplo 2.80 *La integración puede considerarse como un operador lineal S del espacio $C(\mathbf{R})$ (o c(a,b)) en $\mathbb{R}$:*

$$S(f) = \int f(x)dx + C \text{ con } C = 0$$

Ejemplo 2.81 *Dados dos espacios vectoriales V y W, la función nula*

$$\begin{aligned} O &: V \to W \\ x &\longmapsto O(x) = 0 \end{aligned}$$

es una transformación lineal, denominada la transformación nula.

Ejemplo 2.82 *De igual manera, la función idéntidad*

$$\begin{aligned} I_V &: V \to V \\ u &\longmapsto I_V(u) = u \end{aligned}$$

es también una transformación lineal, y se le conoce como la idéntidad de V.

Ejemplo 2.83 *Sea $a \in \mathbb{R}$ un real fijo y el espacio de polinomios reales, entonces la función*

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R} \\ p(x) &\mapsto p(a) \end{aligned}$$

es una transformación lineal.

2.5.1 Núcleo e Imagen

Definición 2.38 *Sea $T : V \to W$ una transformación lineal de V en W ; se define el* núcleo *de T como*

$$N(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0\}.$$

Nótese que $N(T)$ *es un subespacio de* V*. Por otro lado, se define la* imagen *de* T *como*

$$Im(T) = \{w \in W \mid w = T(v), \text{ para algún } v \in V\};$$

$Im(T)$ es un subespacio de W. Si A es un subespacio de V y B es un subespacio de W, entonces los conjuntos

$$T(A) = \{T(a) \mid a \in A\}$$
$$T^{-1}(B) = \{v \in V \mid T(v) \in B\}$$

son subespacios de W y V respectivamente.

Observación 2.9 *Obsérvese que* $N(T) = T^{-1}(0)$*, e* $Im(T) = T(V)$*. La dimensión del espacio imagen* $Im(T)$ *se conoce como el rango de la transformación* T*, y la denotamos por rank* (T)*.*

Ejemplo 2.84 *Consideremos la función* T *definida por*$T : \mathcal{P}_n \to \mathbb{R}_{2n}[x]$
$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mapsto a_0 + a_1x^2 + \cdots + a_nx^{2n}$.
T *es una transformación lineal con núcleo* 0 *y rank* $(T) = n + 1$.

Ejemplo 2.85 *En el espacio* V *de las c(a,b)sucesiones reales convergentes la función* T *definida por*

$$T(\{x_n\}) = \{a - x_n\}, \text{ donde } a = \lim_{n\to\infty} \{x_n\}$$

es una transformación lineal cuyo núcleo es el espacio de las sucesiones constantes y cuya imagen es el espacio de las sucesiones de límite 0*.Además, la sucesión constante* 1 *es una base de* $N(T)$ *y, por otro lado, las sucesiones*

$$s_1 = \{1, 0, 0, \ldots\}$$
$$s_2 = \{0, 1, 0, \ldots\}$$
$$s_3 = \{0, 0, 1, \ldots\}$$
$$\vdots$$

son linealmente independientes, con lo cual $Im(T)$ *y* V *son espacios de dimensión infinita.*

A continuación presentamos y probamos uno de los teoremas básicos del álgebra lineal.

Teorema 2.8 *Sea* V *un espacio de dimensión finita* $n \geq 1$ *y sea* $T : V \to W$ *una tranformación lineal. Entonces*

$$\dim(V) = \dim N(T) \ + \ \dim Im(T)$$

El siguiente teorema muestra que una transformación lineal queda completamente determinada por su acción sobre los vectores de una base. En otras palabras, para definir una transformación lineal basta conocer las imágenes de los vectores de una base.

Teorema 2.9 *Sean* V *y* W *dos* K*-espacios,* β *una base de* V *y* $\varphi : \beta \to W$ *una función. Entonces existe una única transformación lineal* $T : V \to W$ *que extiende a* t*, es decir,* $T(v) = \varphi(v)$*, para cada* $v \in \beta$*.*

Ejemplo 2.86 *Sea*

$$\mathcal{L} : \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

una recta en $\mathbb{R}^3$*.Si* P *es un punto de* $\mathbb{R}^3$*, el simétrico de* P *respecto a la recta* $\mathcal{L}$ *es el punto* $P\prime \in \mathbb{R}^3$ *tal que, el segmento* $\overline{PP\prime}$ *interseca perpendicularmente a la recta* $\mathcal{L}$ *en el punto* M *(*M *es el, puntomedio de* $\overline{PP'}$*).Sea*

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

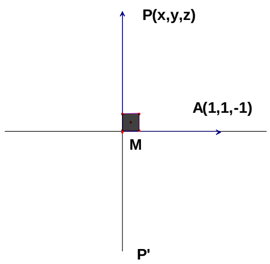
la transformación lineal definida por

$$\begin{aligned} T(P) &= P\prime \text{ (}P\prime \text{ es simétrico de } P \text{ respecto a } \mathcal{L}\text{)} \\ T(P) &= P \text{ si } P \in \mathcal{L} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.87 (*a*)*Hallar el núcleo y la imagen de* T*.*
(*b*)*Determinar una base para el núcleo y una base para la imagen de* T*.*

Solución
$(a)\, \mathcal{L} : \begin{cases} 2x - y + z = 0 \cdots (1) \\ x + y + 2z = 0 \cdots (2) \end{cases}$
Sumando (1) y (2) :$3x + 3z = 0 \Longrightarrow z = -x$. Luego $y = 2x + z = 2x - x = x$
Parametrizando : sea $x = t$, de donde $y = t, z = -t$

$$\mathcal{L} : P = t(1, 1, -1), t \in \mathbf{R}$$



Sea $M \in \mathcal{L}$, entonces existe un $t \in \mathbf{R}$ tal que $M = (t, t, -t)$.Luego,
$\overrightarrow{MP} = P - M = (x, y, z) - (t, t, -t) = (x - t, y - t, z + t)$
$\overrightarrow{MP} \perp \mathcal{L} \Longrightarrow \overrightarrow{MP} \perp A = (1, 1, -1) \Longrightarrow \overrightarrow{MP} \cdot A = 0$
$(x - t, y - t, t + z) \cdot (1, 1, -1) = 0 \Longrightarrow x - 3t + y - z = 0 \Longrightarrow$
$x - 3t + y - z = 0 \Longrightarrow t = \dfrac{x + y - z}{3}$. Luego,
$M = \left(\dfrac{x + y - z}{3}, \dfrac{x + y - z}{3}, -\dfrac{x + y - z}{3} \right)$
Como Mes punto medio $\overline{PP'}$ se tiene $\frac{P+P'}{2} = M$, de donde $P' = 2M - P$

$$\begin{aligned} P' &= 2\left(\frac{x + y - z}{3}, \frac{x + y - z}{3}, -\frac{x + y - z}{3} \right) - (x, y, z) \\ P' &= \left(\frac{-x + 2y - 2z}{3}, \frac{2x - y - 2z}{3}, \frac{-2x - 2y - z}{3} \right) \end{aligned}$$

Sea

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

la transformación lineal definida por

$$\begin{aligned} T(P) &= P'\,(P' \text{ es simétrico de } P \text{ respecto a } \mathcal{L}) \\ T(x,y,z) &= \left(\frac{-x+2y-2z}{3}, \frac{2x-y-2z}{3}, \frac{-2x-2y-z}{3}\right) \end{aligned}$$

(b)El núcleo de T está formado por los puntos $P=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tales que

$$T(x,y,z)=\left(\frac{-x+2y-2z}{3}, \frac{2x-y-2z}{3}, \frac{-2x-2y-z}{3}\right)=(0,0,0)$$

de donde

$$\left\{\begin{array}{c} -x+2y-2z=0 \\ 2x-y-2z=0 \\ -2x-2y-z=0 \end{array}\right. ,$$

la Solución es:$[x=0,y=0,z=0]$.
Por tanto $Nu(T)=\{(x,y,z)=(0,0,0)\}$.
La imagen de T está formado por los puntos

$$\begin{aligned} P' &= \frac{1}{3}(-x+2y-2z, 2x-y-2z, 2x-y-2z)\,; x,y,z\in\mathbb{R} \\ P' &= x\frac{1}{3}(-1,2,-2)+y\frac{1}{3}(2,-1,-2)+z\frac{1}{3}(-2,-2,-1) \end{aligned}$$

Por tanto $\operatorname{Im}(T)=\left\{P'=x\frac{1}{3}(-1,2,-2)+y\frac{1}{3}(2,-1,-2)+z\frac{1}{3}(-2,-2,-1)\right\}$
$\operatorname{Im}(T)=gen\{(-1,2,-2),(2,-1,-2),(-2,-2,-1)\}$.
$\beta_{\operatorname{Im}T}=\{(-1,2,-2),(2,-1,-2),(-2,-2,-1)\}$ es l.i

$$c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3=0$$

$$\begin{aligned} c_1(-1,2,-2)+c(2,-1,-2)+c_3(-2,-2,-1) &= (0,0,0,0) \\ (2c-c_1-2c_3, 2c_1-c-2c_3, -2c-2c_1-c_3) &= (0,0,0,0) \end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{c} 2c-c_1-2c_3=0 \\ 2c_1-c-2c_3=0 \\ -2c-2c_1-c_3=0 \end{array}\right. ,$$

la Solución es: $c_1=0,c_2=0,c_3=0$

Ejemplo 2.88 *Sea*

$$T:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^3$$

la transformación lineal definida por

$$T(x,y,z,w)=(x+z,x+y-z-2w,-2x-y+2w)$$

(a)*Encontar la matriz asociada de* T.
(b)*Hallar la dimensión de la imagen de* T .

Solución

(a)La matriz asociada de T es

$$A_T = \begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) & T(e_4) \end{bmatrix}$$

$T(e_1) = (1, 1, -2)$
$T(e_2) = (0, 1, -1)$
$T(e_3) = (1, -1, 0)$
$T(e_4) = (0, -2, 2)$

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(b)Sea $w = T(x, y, z) = (x + z, x + y - z - 2w, -2x - y + 2w) \in \mathrm{Im}(T)$ entonces
$w = x(1, 1, -2) + y(0, 1, -1) + z(1, -1, 0) + w(0, -2, 2)$
$w = x(1, 1, -2) + (y - 2w)(0, 1, -1) + z(1, -1, 0)\,; x, y, z \in \mathbb{R}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, entonces los vectores $(1, 1, -2), (0, 1, -1), (1, -1, 0)$ son linealmente dependientes.

Luego, $(1, 1, -2)$ y $(0, 1, -1)$ son linealmente independientes.
$\mathrm{Im}(T) = \langle \{(1, 1, -2), (0, 1, -1)\} \rangle$, de donde $\dim \mathrm{Im}(T) = 2$

Ejemplo 2.89 *Sea* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *una transformación lineal dada por*

$$T(x, y, z) = (\lambda x + y + z, \lambda x + y, y + z)$$

Determinar el valor de λ *para que el núcleo de* T *tenga dimensión 1 y para dicho valor de* λ*, hallar una base para la imagen de* T*.*

Solución

$T(x, y, z) = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

Como $|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda$

núcleo de T : $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Si $|A| = \lambda \neq 0$, entonces núcleo de $T = \{(0, 0, 0)\} \Longrightarrow \dim Nu(T) = 0$
Si $|A| = \lambda = 0$, entonces núcleo de T se tiene :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad F_3 \longleftrightarrow F_3 - F_1 \quad \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

De : $y + z = 0 \longrightarrow z = 0$
$Nu(T) = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 0) \rangle$, de donde $\dim Nu(T) = 1$
Sea $w = T(x, y, z) = (y + z, y, y + z) \in \mathrm{Im}(T)$ entonces
$w = y(1, 1, 1) + z(1, 0, 1)\,;\ y, z \in \mathbb{R}$
$\mathrm{Im}(T) = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1)\}$
Luego, $(1, 1, 1)$ y $(1, 0, 1)$ son linealmente independientes. Por tanto,
$\beta_{\mathrm{Im}(T)} = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ es una base para la imagen de T.

Operaciones con Transformaciones Lineales En esta lección mostraremos que el conjunto de todas las transformaciones lineales entre dos K-espacios V y W es un K-espacio. Veremos además que cuando $V = W$ dicho conjunto es una K-álgebra.

Denotemos por L(V,W) el conjunto de todas las transformaciones lineales del espacio V en el espacio W.

$L_K(V, W)$ adquiere estructura de espacio vectorial respecto de las siguientes operaciones:

Para T_1, $T_2 \in L_K(V, W)$ y $v \in V$ se define la suma por

$$(T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v).$$

La acción de producto por un escalar sobre transformaciones viene dada por

$$(r.T)(v) = r.T(v)$$

donde $r \in K$ y $T \in L_K(V, W)$. Nótese que el cero de $L_K(V, W)$ es la transformación nula y la opuesta de $T \in L_K(V, W)$ es la transformación $-T$ definida por

$$(-T)(v) = -T(v).$$

$L_K(V, W)$ se conoce también como el *espacio de operadores lineales* de V en W.

Además de las dos operaciones definidas anteriormente, podemos considerar la composición de transformaciones lineales como una tercera operación.

En efecto, sean $T : V \to W$ y $S : Z \to U$ dos transformaciones lineales de tal manera que se cumpla la condición habitual de compatibilidad: $Im(T) \subseteq Z$. Entonces la función compuesta ST definida para cada $v \in V$ por

$$(ST)(v) = S(T(v))$$

es una transformación lineal.

Las tres operaciones introducidas gozan de las siguientes propiedades algebraicas.

Sean T, T_1, T_2, T_3 transformaciones lineales compatibles para las operaciones indicadas. Entonces

$$\begin{gathered}(T_1T_2)T_3 = T_1(T_2T_3) \\ T(T_1 + T_2) = TT_1 + TT_2 \\ (T_1 + T_2)T = T_1T + T_2T \\ a.(T_1T_2) = (a.T_1)T_2 = T_1(a.T_2),\ a \in K \\ IT = T = TI,\end{gathered}$$

donde I es la transformación idéntica respectiva.

De acuerdo a la discusión anterior, el espacio $L_K(V, V)$, de transformaciones lineales de V en si mismo, viene dotado de tres operaciones: suma de vectores, producto de escalares por vectores y producto entre vectores. Resulta entonces que $L_K(V)$ es un álgebra sobre el cuerpo K, en el sentido de la siguiente definición.

Definición 2.39 *Sea $\mathcal{A}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo K, se dice que $\mathcal{A}$ es un álgebra sobre K , o también que $\mathcal{A}$ es una K-álgebra, si en $\mathcal{A}$ está definido un producto entre vectores que cumple las siguientes condiciones:*

$$\begin{aligned} (v_1v_2)v_3 &= v_1(v_2v_3) \\ v(v_1+v_2) &= vv_1+vv_2 \\ (v_1+v_2)v &= v_1\,v+v_{\,2}v \\ \lambda.(v_1v_2) &= (\lambda.\,v_1)\,v_2 = v_1(\lambda.\,v_2), \lambda \in K \\ 1v &= v = v1, \end{aligned}$$

donde $v, v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{A}$, $a \in K$ y 1 es el elemento neutro del producto de vectores.

En lo siguiente presentamos el concepto de isomorfismo para grupos y anillos; en esta lección mostraremos la importancia de esta noción para el caso de los espacios vectoriales.

Definición 2.40 *Una transformación lineal $T : V \to W$ es inyectiva si para cualesquiera elementos $u, v \in V$ se cumple que:*

$$T\,(u) = T\,(v) \Longrightarrow u = v.$$

T se dice sobreyectiva *si $Im(T) = W$.*

Proposición 2.22 *Si $T : V \to W$ es una transformación lineal, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*
1.T es inyectiva.
2.$N(T\,) = 0$.
3.Si $v_1, \ldots, v_n$ son vectores LI de V, entonces $T\,(v_1), \ldots, T\,(v_n)$ son vectores L.I. de $Im(T\,)$.
4.Si β es una base de V, entonces $T(\beta)$ es una base de $Im(T\,)$.

En particular, si V y W son espacios de dimensión finita $n \geq 1$, entonces T es inyectiva si y solo si T es sobreyectiva.

Definición 2.41 *Se dice que T es* biyectiva *si T es inyectiva y sobreyectiva. Dos K-espacios V y W se dicen* isomorfos *si existe una transformación lineal biyectiva T de V en W. Esta relación entre V y W se denota por $V \cong W$.*

Siendo T biyectiva, existe la función inversa de T definida por

$$T^{\,-1} : W \to V$$

$$T^{-1}(w) = v \Longleftrightarrow T(v) = w$$

donde $w \in W$ y $v \in V$. Es obvio que $T^{\,-1}$ es también una tranformación lineal y cumple las siguientes condiciones:

$$T\,T^{\,-1} = I \text{ identica}, T^{\,-1}T = I \text{ identica}$$

Nótese que $T^{\,-1}$ es la única transformación de W en V que cumple estas identidades, y se le conoce como la inversa de T. Hemos visto entonces que una transformación lineal biyectiva tiene inversa, ésta es única y viene caracterizada por las identidades anteriores.

Nótese que la relación "ser isomorfo" es una relación de equivalencia en la colección de todos los K-espacios. Es también claro que la composición de dos isomorfismos es nuevamente un isomorfismo.Un isomorfismo T de un espacio V en si mismo se denomina un automorfismo de V. La colección de todos los automorfismos de un espacio V se denota por $Aut_K(V)$. Se tiene entonces inmediatamente el siguiente resultado.

Si V es un K-espacio, entonces $Aut_K(V)$ es un grupo respecto de la composición de transformaciones con elemento neutro I_V.

Una consecuencia inmediata de la Proposición anterior es el siguiente corolario.

Corolario 2.10 *Sea $T : V \to V$ una transformación lineal de un espacio V de dimensión finita $n \geq 1$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1.T es inyectiva

2.$N(T) = 0$

3. T es sobreyectiva

4.rank(T)=n

5.T es un automorfismo.

2.5.2 Matrices y transformaciones lineales

En este capítulo, usted también aprenderá que todas las matrices determinan las transformaciones lineales. Usted también aprenderá cómo representar transformaciones lineales de matrices y estudiar la conexión entre diferentes matrices que representan la misma transformación lineal. Estas matrices se denominan matrices similares.

Usted aprenderá que las matrices similares están vinculados a través invertible de cambio de base de matrices.

Las matrices de las transformaciones lineales

Sea V un espacio n-dimensional y W es un espacio vectorial m-dimensional sobre los mismo campo k. Entonces sabemos de teorema de isomorfismo que en relación con una base fija de S de V, el espacio V es isomorfo a k^n, y en relación con una base fija S' de W, el W es isomorfo al espacio k^m. En relación con estos isomorfismos, por lo tanto, cada vector $x \in V$ corresponde a un único vector de coordenadas $[\mathbf{x}]_S \in \Bbbk^n$, y cada vector $T(x) \in W$ corresponde a un único vector de coordenadas $[T(\mathbf{x})]_{S'}$. En esta sección, vamos a utilizar tales isomorfismos para representar a cada transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ por una transformación de matriz $[T]_{S'}^S : k^n \to k^m$ de modo que $[T]_{S'}^S [\mathbf{x}]_S = [T(\mathbf{x})]_{S'}$. La matriz $[T]_{S'}^S$ se llama la *matriz de* T en las bases de S y S'. Diferentes bases S y el rendimiento de diferentes matrices S'.

Definición 2.42 *La matriz de una transformación lineal $T : k^n \to k^m$ en la base $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ para k^n y la base S' para k^m es la matriz*

$$A = [T]_{S'}^S = [[T(\mathbf{v}_1)]_{S'} \ \cdots \ [T(\mathbf{v}_n)]_{S'}]$$

cuyas columnas son los vectores de coordenadas $[T(\mathbf{v}_i)]_{S'}$ en la base S' de la imagen $T(\mathbf{v}_i)$ de la base de vectores $\mathbf{v}_i \in S$.

Definición 2.43 *Si $T : k^n \to k^m$ es una transformación lineal y si E es la base estandar para k^n y E' la base estandard para k^m, entonces la matriz*

$$[T]_{E'}^E = [[T(\mathbf{e}_1)]_{E'} \ \cdots \ [T(\mathbf{e}_n)]_{E'}]$$

es la matriz estándar de T.

Teorema 2.11 *(teorema de representación de la matriz). Si A es la matriz de una transformación lineal $T : k^n \to k^m$ en la bases S y $S\prime$, entonces $[T(\mathbf{x})]_{S'} = A\,[\mathbf{x}]_S$.*

Prueba. Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, y supongamos que $\mathbf{x} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$ es cualquier vector en $\Bbbk^n$. Entonces, el vector de coordenadas de x en la base S es

$$[\mathbf{x}]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
[T(\mathbf{x})]_{S'} &= [T(a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n)]_{S'} \\
&= a_1\,[T(\mathbf{v}_1)]_{S'} + \cdots + a_n\,[T(\mathbf{x}_n)]_{S'} \\
&= [[T(\mathbf{v}_1)]_{S'} \ \cdots [T(\mathbf{v}_n)]_{S'}] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \\
&= A\,[\mathbf{x}]_S. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.90 *La transformación identidad como una matriz de cambio de base.*

Sea $I : k^n \to k^n$ es la transformación identidad de un espacio vectorial V sobre un campo k, and let $S{=}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}\}$ y $S'{=}\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ son dos bases k^n. Entonces por definición,

$$[I]_{S'}^{S} = [[I(\mathbf{v}_1)]_{S'} \ \cdots \ [I(\mathbf{v}_n)]_{S'}] = [[\mathbf{v}_1]_{S'} \ \cdots \ [\mathbf{v}_n]_{S'}] = P \in \Bbbk^{n\times n}$$

es la matriz de cambio de bases S a S', y

$$[I]_{S}^{S'} = [[I(\mathbf{w}_1)]_{S} \ \cdots \ [I(\mathbf{w}_n)]_{S}] = [[\mathbf{w}_1]_{S} \ \cdots \ [\mathbf{w}_n]_{S}] = Q \in \Bbbk^{n\times n}$$

es la matriz de cambio de bases S' a S.

Ejemplo 2.91 *La transformación identidad como la matriz identidad*

Ejemplo 2.92 *.*

Probar que la transformación identidad $I : k^n \to k^n$ es representada por una matriz identidad I_n, provista de las bases S y S' es la base estandár de $E = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ para k^n definida anteriormente.

Solución. Por teorema de representación de la matriz,

$$[I]_E^E = [[I(\mathbf{e}_1)]_E \ \cdots \ [I(\mathbf{e}_n)]_E].$$

Pero $[I(\mathbf{e}_i)]_E = \mathbf{e}_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. Entonces

$$[I]_E^E = [\mathbf{e}_1 \ \cdots \ \mathbf{e}_n] = I_n \in k^{n\times n}.$$

Esto demuestra que la matriz de identidad representa la transformación de la identidad, siempre que la base estándar que se elija, tanto para el dominio y el codominio de I.

Ejemplo 2.93 *Una matriz de una transformación lineal*

Ejemplo 2.94 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$.

Sea

$$S=\left\{\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

y

$$S'=\left\{\mathbf{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\mathbf{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

dos bases para $\mathbb{R}^2$.Encontrar la matriz $[T]_{S'}^{S}$ representante a la transformación lineal $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}4x-2y\\2x+y\end{bmatrix}.$$

Solución. Calculando los valores de T en la base S.

$$\begin{array}{lllll} T(\mathbf{v}_1) & = & \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} & = 2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} & = 2\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2 \\ T(\mathbf{v}_2) & = & \begin{bmatrix}-4\\-2\end{bmatrix} & = -4\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} & = -4\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2 \end{array}.$$

Por tanto

$$[T(\mathbf{v}_1)]_{S'}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\quad\text{y}\quad[T(\mathbf{v}_2)]_{S'}=\begin{bmatrix}-4\\-2\end{bmatrix}.$$

Esto significa que

$$A=[T]_{S'}^{S}=\begin{bmatrix}2&-4\\3&-2\end{bmatrix}.$$

Vamos a verificar que $A\,[\mathbf{x}]_S$ nos da los valores esperados mediante el cálculo de $A\,[\mathbf{v}_1]_S$ y $A\,[\mathbf{v}_2]_S$.

Si $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, entonces

$$[\mathbf{x}]_S=a\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}.$$

Por tanto

$$A\,[\mathbf{x}]_S=\begin{bmatrix}2&-4\\3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=[T\,(\mathbf{x})]_{S'}\,.$$

Si $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$, entonces

$$[\mathbf{x}]_S=a\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

Por tanto

$$A\,[\mathbf{x}]_S=\begin{bmatrix}2&-4\\3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\-2\end{bmatrix}=[T\,(\mathbf{x})]_{S'}\,.$$

Por lo tanto, representa la transformación lineal T en las bases S y S'.

Es importante señalar que en la especificación de las bases $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{x}_2\}$ y $S'=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$ en el ejemplo anterior, se supone que las bases se ordenan . Esto significa que $\mathbf{v}_1$ viene antes de $\mathbf{v}_2$ en S y $\mathbf{e}_1$ antes de $\mathbf{e}_2$ en S'. Si cambiamos el orden de los vectores en S y T representan en las bases de $S'' = \{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1\}$ y S', por ejemplo, entonces

$$[T]_{S'}^{S''} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 2.95 *Una Matriz de una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$*
Sea

$$S = \left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

la base para $\mathbb{R}^3$ y

$$S' = \left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$$

la base para $\mathbb{R}^2$. Encontrar la matriz $[T]_{S'}^{S}$ que representa la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3x + 2y - 4z \\ x - 5y + 3z \end{bmatrix}.$$

Solución. Por definición,

$$[T]_{S'}^{S} = \left[[T(\mathbf{w}_1)]_{S'} \ \ [T(\mathbf{w}_{21})]_{S'} \ \ [T(\mathbf{w}_3)]_{S'} \right].$$

Calculando los vectores coordenadas $[T(\mathbf{w}_1)]_{S'}, [T(\mathbf{w}_{21})]_{S'}$, y$[T(\mathbf{w}_3)]_{S'}$.

$$\begin{aligned} T(\mathbf{w}_1) &= T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \\ T(\mathbf{w}_2) &= T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}, \\ T(\mathbf{w}_3) &= T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Luego ahora calculamos los vectores coordenadas $[T(\mathbf{w}_1)]_{S'}, [T(\mathbf{w}_{21})]_{S'}$, y $[T(\mathbf{w}_3)]_{S'}$.

$[T(\mathbf{w}_1)]_{S'} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}_{S'} = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 = a \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 2b \\ 3a + 5b \end{bmatrix}$

$\begin{cases} 1 = a + 2b \\ -1 = 3a + 5b \end{cases}$, la solución es : $\{b = 4, a = -7\}$

Por tanto $[T(\mathbf{w}_1)]_{S'} = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \end{bmatrix}$.

$[T(\mathbf{w}_2)]_{S'} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}_{S'} = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 = a \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 2b \\ 3a + 5b \end{bmatrix}$

$\begin{cases} 5 = a + 2b \\ -4 = 3a + 5b \end{cases}$, la solución es : $\{a = -33, b = 19\}$

Por tanto $[T(\mathbf{w}_2)]_{S'} = \begin{bmatrix} -33 \\ 19 \end{bmatrix}$.

$[T(\mathbf{w}_3)]_{S'} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_{S'} = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 = a \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 2b \\ 3a + 5b \end{bmatrix}$

$\left\{ \begin{array}{c} 3 = a + 2b \\ 1 = 3a + 5b \end{array} \right.$, la solución es : $\{a = -13, b = 8\}$

Por tanto $[T(\mathbf{w}_3)]_{S'} = \left[\begin{array}{r} -13 \\ 8 \end{array} \right]$.

Esto significa que

$$[T]_{S'}^{S} = [[T(\mathbf{w}_1)]_{S'} \ [T(\mathbf{w}_{21})]_{S'} \ [T(\mathbf{w}_3)]_{S'}] = \left[\begin{array}{rrr} -7 & -33 & -13 \\ 4 & 19 & 8 \end{array} \right]. \ \blacklozenge$$

Ejercicios Propuestos :Transformaciones lineales

1. Analizar si las siguientes transformaciones de V a W son lineales o no

   (a) $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2, \quad T(x, y, z) = (x, y)$

   (b) $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, \quad T(x, y) = (x^2, y^2)$

   (c) $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2, \quad T(x, y, z) = (0, y)$

   (d) $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, \quad T(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n$

   (e) $T : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n, \quad T(x) = (x, \ldots, x)$

   (f) $T : \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_1, \quad T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_1 + a_2 x$

   (g) $T : \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1], \quad T(f(x)) = f(x) + 1$

2. Si $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, está dada por $T(x, y) = (-x, -y)$; describir T geométricamente

3. Suponga que el vector $v = (x, y)$ en el plano XY se rota un ángulo θ en sentido antihorario, obteniéndose el vector $v' = (x', y')$.

   (a) Justificar que

   $$\left\{ \begin{array}{l} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{array} \right.$$

   La transformación lineal $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, definida por $T(x, y) = (x', y')$ se denomina transformación de rotación y la matriz

   $$A_\theta = \left(\begin{array}{cc} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{array} \right)$$

   se denomina matriz de rotación (asociada a la transformación T)

   (b) ¿Qué sucede con el vector $v = (-3, 4)$ si se le rota un ángulo de $\dfrac{\pi}{6}$ en sentido antihorario?

4. Determinar la expresión del operador lineal $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, sabiendo que, para todo $v = (x, y)$, el segmento de recta determinado por v y $T(v) = (x', y')$ es horizontal y tiene su punto medio en la recta $y = x$. ¿Cuál es la imagen del eje Y por la transformación T?

5. Sea $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una transformación lineal. Responder con verdadero o falso

   (a) Si $v \in V$ es tal que $T(v) = 0$, entonces $v = 0$

   (b) Si $T(w) = T(u) + T(v)$, entonces $w = u + v$

   (c) Si v es combinación lineal de $u_1, \ldots, u_m$, entonces $T(v)$ es combinación lineal de $T(u_1), \ldots, T(u_m)$

6. Proporcionar un ejemplo de una transformación lineal $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ tal que

   (a) Si $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V, entonces el conjunto $\{T(u_1), \ldots, T(u_m)\}$ es L.I

   (b) Si $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V, entonces el conjunto $\{T(u_1), \ldots, T(u_m)\}$ es L.D

7. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por:

$$T(u) = \text{Proyección ortogonal de } u \text{ sobre } v = (-2, 1, 3).$$

   (a) Hallar una fórmula para T.

   (b) Encontrar una base para el núcleo de T y una base para la imagen de T.

8. Considere $\mathcal{M}_{3\times3}$, el espacio de matrices 3×3 y sea la aplicación

$$T : \mathcal{M}_{3\times3} \longrightarrow \mathcal{M}_{3\times3}$$

   definida por

$$T(A) = A + A^t, \text{ donde } A \in \mathcal{M}_{3\times3}$$

   (a) Demuestre que T es una transformación lineal.

   (b) Halle el núcleo de T.

9. Sea $\mathcal{M} : x - y - z = 0$,un plano en $\mathbb{R}^3$.Si p es un punto de $\mathbb{R}^3$, el simétrico de p respecto al plano $\mathcal{M}$ es el punto $p\prime \in \mathbb{R}^3$ tal que, el segmento $\overline{pp\acute{}}$ interseca perpendicularmente al plano $\mathcal{M}$ en el punto Q (Q es el,punto medio de $\overline{pp\acute{}}$).Sea

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

   la transformación lineal definida por

$$\begin{aligned} T(p) &= p\acute{}\ (p' \text{ es simétrico de } p \text{ respecto a } \mathcal{M}) \\ T(p) &= p \text{ si } p \in \mathcal{M} \end{aligned}$$

   (a) Halle la matriz que representa a T.

   (b) Determinar el núcleo de T.

2.6 Valores y Vectores Propio

En la sección anterior vimos que cada transformación lineal T de un espacio de dimensión finita $n \geq 1$ se puede representar por medio de una matriz A de orden n, la cual permite conocer propiedades de la transformación T, por ejemplo, es claro que T es invertible si y solo si $\det(A) \neq 0$. Si la matriz A tiene un aspecto sencillo es muy fácil obtener información de T a partir de ella. La forma más simple que puede tener una matriz es la forma diagonal. En este capítulo estudiaremos criterios para diagonalizar matrices.

2.6.1 Valores y Vectores Propio

Definición 2.44 *Sea $T : V \to V$ una transformación de un K-espacio V , un escalar $a \in K$ se dice que es un* valor propio *de la transformación T si existe un vector no nulo $v \in V$ tal que $T(v) = \lambda . v$. En tal caso se dice que v es un* vector propio *de T perteneciente al valor propio a. Nótese que un vector propio solo puede ser asociado a un solo valor propio.*

Ejemplo 2.96 *Para la transformación lineal $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definida por $T(x, y) = (2x, 3y)$, $\lambda = 2$ es un valor propio con vector propio $(6, 0)$; $\lambda = 3$ es también un valor propio de T con vector propio $(0, -2)$.*

Definición 2.45 *Sea $T : V \to V$ una transformación lineal y $a \in K$, el conjunto*

$$E_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda \ . v\}$$

es un subespacio de V ; nótese que $E_\lambda \neq 0$ si y solo si E_λ es un valor propio de T, en tal caso E_λ se denomina el espacio propio *de T correspondiente al valor propio λ.*

Ejemplo 2.97 *Sea D el operador derivación definido sobre el espacio de funciones reales cuyas derivadas de cualquier orden existen, y sea $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $E(\lambda) = \{c\, e^{ax} \mid c \in \mathbb{R}\}$.*

Ejemplo 2.98 *Existen transformaciones lineales sin valores propios, es decir, $E(\lambda) = 0$, para cada $\lambda \in K$. En efecto, la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por*

$$T(x, y) = (y, -x)$$

no tiene valores propios.

Proposición 2.23 *Sea $T : V \to V$ una transformación lineal de un espacio V . Sean $a_1, \ldots, a_r$ valores propios diferentes con vectores propios $v_1, \ldots, v_r$, respectivamente. Entonces $v_1, \ldots, v_r$ son LI. En particular, si V es de dimensión finita $n \geq 1$, entonces T tiene a lo sumo n valores propios diferentes. Si T tiene exactamente n valores propios diferentes, entonces $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V.*

Demostración. Ejercicio.

El recíproco de la proposición anterior no es siempre cierto, por ejemplo, si $T = I_V$, cualquier base de V pertenece a 1, que es el único valor propio de I_V.

Ejemplo 2.99 *Sea $K[x]$ el conjunto de polinomios con coeficientes en el cuerpo K, y sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Entonces para cada polinomio $p(x) \in K[x]$ se tiene que $p(T)$ es una transformación lineal de V en V, además si $a \in K$ es un valor propio de T con vector propio v, entonces $p(\lambda)$ es un valor propio de $p(T)$ con vector propio v. En tal caso, $E(\lambda) \subseteq N(p(T))$ si a es raíz de $p(x)$, y $E(\lambda) \subseteq \mathrm{Im}(p(T))$ si λ no es* raíz *de $p(x)$.*

2.6.2 Polinomio Característico

En la seción anterior definimos la teoría de determinantes para matrices con entradas en un cuerpo, sin embargo la invertibilidad de los elementos del cuerpo no fue usada en la construcción. Esto indica que se puede desarrollar la teoría de determinantes para matrices con entradas en un anillo conmutativo, por ejemplo, con entradas polinómicas. Esta observación nos permite definir un invariante muy importante de una transformación lineal de un espacio de dimensión finita: su polinomio característico. Comencemos por definir el polinomio característico de una matriz cuadrada.

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz cuadrada de orden $n \geq 1$ sobre un cuerpo K. Se define el *polinomio característico* de A por

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Nótese que efectivamente $p_A(x) \in K[x]$. Se puede probar facilmente que para $p_A(x)$ se tienen las siguientes propiedades:

a) $p_A(x)$ es un polinomio de grado n.

b) Siendo $p_A(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_{n-1}x^{n-1} + p_n x^n$, entonces se tiene que $p_0 = (-1)^n \det(A)$, $p_{n-1} = -(a_{11} + \cdots + a_{nn})$ y $p_n = 1$.

c) Matrices similares tienen el mismo polinomio característico. El recíproco de esta afirmación no es siempre cierto, como lo ilustran las matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

d) Sea $T : V \to V$ una transformación lineal de un espacio V de dimensión finita $n \geq 1$. Entonces se define el polinimo característico de T como el polinomio característico de la matriz de T en cualquier base, y se denota por $p_T(x)$. En otras palabras, el polinomio característico de T es un invariante de T que no depende de la base elegida en V, y se tiene que $p_T(x) = p_A(x)$, donde $A = m_X(T)$ y X es cualquier base de V.

El polinomio característico es un instrumento para determinar los valores propios de una transformación lineal.

Sea $T : V \to V$ una transformación lineal de un espacio V de dimensión finita $n \geq 1$ y sea $\mathbf{a} \in \mathbf{K}$. Entonces, a es un valor propio de T si y solo si a es raíz del polinomio característico de T, es decir, $p_T(a) = 0$.

Insistimos en que este resultado es válido para valores $\mathbf{a} \in \mathbf{K}$. Podría ocurrir que las raíces del polinomio característico no pertenecieran al cuerpo K, por ejemplo, en el caso en que K sea el cuerpo de números reales y todas las raíces de $p_T(x)$ fueran complejas , entonces no tendríamos valores propios.

2.6.3 Matrices Diagonalizables

Definición. Matrices semejantes.Dos matrices A y B de orden $n \times n$, son **semejantes** si existe una matriz invertible P de orden $n \times n$ tal que

$$B = P^{-1}AP.$$

Definición. Decimos que la matriz A de orden $n \times n$ es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal D.Es decir, existe una matriz invertible P de orden $n \times n$ tal que

$$D = P^{-1}AP.$$

En este caso,se dice que la matriz A se puede diagonalizar.

Teorema. Una matriz A de orden $n \times n$ es diagonalizable si y solo si tiene n vectores linealmente independientes.En tal caso, la matriz diagonal D es semejante a A está dada por

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de A.Si P es una matriz cuyas columnas son vectores propios linealmente indeppedientes de a, entonces

$$D = P^{-1}AP.$$

Teorema. Sean A una matriz simétrica real de orden $n \times n$.Entonces los valores propios de A son reales.

Observación 2.10 *Toda matriz simétrica es diagonalizable.*

Diagonalización Dada una matriz A∈Mn(R), el procedimiento para obtener una base formada por autovectores es el siguiente:

1) Se calculan los autovalores de A, y ha de verificarse que:

$m_1 + \cdots + m_p = n$. Es decir, ha de haber n raíces de $P_A(\blacksquare)$

$\mu_i = m_i$, para todo autovalor $\blacksquare_i, i = 1, ..., p$.

Donde la multiplicidad algebraica se denota por m, y la multiplicidad geométrica de un autovalor $\blacksquare$, se denota por μ, a la dimensión del subespacio propio $E_{\blacksquare}$.

2) Para cada autovalor $\blacksquare_i, i = 1, ..., p$, se determina una base de cada subespacio propio $E_{\blacksquare_i}$.

3) Se obtiene la base $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ uniendo las bases de los subespacios propios de A.

Un cuerpo K se dice *algebraicamente cerrado* si todas las raíces de todos sus polinomios pertenecen a K, por ejemplo, el cuerpo **C** de números complejos es algebraicamente cerrado, en cambio, el cuerpo $\mathbb{R}$ de números reales no lo es.

Corolario 2.12 *Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado y sea $T : V \to V$ una transformación lineal del K-espacio V de dimensión finita $n \geq 1$. Entonces, T tiene n valores propios (no necesariamente diferentes) correspondientes a las n raíces de su polinomio característico.*

Sea A una matriz cuadrada de orden $n \geq 1$, un elemento $\lambda \in K$ se dice que es un valor propio de A si existe una matriz columna no nula $u = (u_1, \ldots, u_n)^T \in K^n$ tal que $Au = \lambda.u$. La teoría de valores y vectores propios para matrices está relacionada de manera obvia con la correspondiente teoría para transformaciones lineales.

Corolario 2.13 *Sea $T : V \to V$ una transformación lineal de un K-espacio V de dimensión finita $n \geq 1$. Sea $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V , $A = m_\beta(T)$ y $\lambda \in K$. Entonces, λ es un valor propio de T si y solo si λ es un valor propio de A. Mas exactamente, $v = u_1 . v_1 + \cdots + u_n . v_n$ es un vector propio de T perteneciente al valor propio a si y solo si $u = (u_1, \ldots, u_n)^T$ es un vector propio de A perteneciente al valor propio λ.*

2.6.4 Matrices Diagonalizables

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden $n \geq 1$. Se dice que A es una matriz diagonal si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal de un espacio V de dimensión finita $n \geq 1$. Se dice que T es diagonalizable si existe una base β en V tal que es una matriz diagonal. Una matriz A de orden $n \geq 1$ se dice que es diagonalizable si A es similar a una matriz diagonal. Teniendo en cuenta que matrices que representen la misma transformación lineal son similares, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.24 *Sea $T : V \to V$ una transformación lineal de un espacio V de dimensión finita $n \geq 1$ y sea β una base cualquiera de V. Entonces, T es diagonalizable si y solo si $m_X(T)$ es diagonalizable.*

En términos de vectores propios se tiene el siguiente criterio obvio de diagonalización.

Teorema 2.14 *Sea $T : V \to V$ una transformación lineal de un espacio V de dimensión finita $n \geq 1$. T es diagonalizable si y solo si V tiene una base constituida por vectores propios.*

Según la proposición y el corolario se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.15 *Sea A una matriz cuadrada de orden $n \geq 1$. Entonces,*
a) A es diagonalizable si y solo si A tiene n vectores propios LI.
b) Si A tiene n valores propios diferentes, entonces A es diagonalizable.

El recíproco de la parte b) del corolario anterior no siempre se cumple: la matriz idéntica E es diagonal, sin embargo sus n valores propios coinciden y son iguales a 1.

Proposición 2.25 *Sea $T : V \to V$ una transformación lineal de un espacio V de dimensión finita $n \geq 1$. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ los valores propios diferentes para T, $1 \leq r \leq n$, y $E(\lambda_1), \ldots, E(\lambda_r)$ lossubespacios propios correspondientes. Entonces, la suma $E(\lambda_1) + \cdots + E(\lambda_r)$ es directa. En consecuencia,*
$\dim(E(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_r)) = \dim(E(\lambda_1)) + \cdots + \dim(E(\lambda_r))$.

Podemos probar ahora un criterio de diagonalización en términos del polinomio característico y de los espacios propios.

Teorema 2.16 *Sea $T : V \to V$ una transformación lineal de un espacio V de dimensión finita $n \geq 1$. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ los valores propios diferentes para T, $1 \leq r \leq n$, y $E(\lambda_1), \ldots, E(\lambda_r)$ los subespacios propios correspondientes. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*
a) T es diagonalizable.
b) El polinomio característico de T es de la forma

$$p_T(x) = (x - \lambda_1)^{d_1} \cdots (x - \lambda_r)^{d_r},$$

donde $d_i = \dim(E(\lambda_i))$, $1 \leq i \leq r$.
c) $\dim(V) = \dim(E(\lambda_1)) + \cdots + \dim(E(\lambda_r))$.
d) $V = E(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_r)$.

Ejemplo 2.100 *Encontrar los valores y vectores propios de la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución

$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 4 & -4 & 5-\lambda \end{bmatrix}$

$p(\lambda) = (1-\lambda)\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & 5-\lambda \end{bmatrix} - 2\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5-\lambda \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$

$p(\lambda) = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 5\lambda + 4\right) - 2\left((5-\lambda) - 4\right) - (-4 + 4\lambda)$

$p(\lambda) = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 5\lambda + 4\right) - 2(1-\lambda) + 4(1-\lambda)$

$p(\lambda) = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 5\lambda + 4\right) + 2(1-\lambda)$

$p(\lambda) = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 5\lambda + 6\right)$

$p(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$

Por lo tanto los valores propios de A son $\lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = 3$

Para determinar un vector propio $v = (x, y, z)$ asociado con $\lambda = 1$, formamos el sistema

$$(A - \lambda I)v = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \; F_1 \longleftrightarrow F_2 \; \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \; F_3 \longleftrightarrow F_3 - 4F_1 \; \sim$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \Longrightarrow x = y - z = y - 2y = -y \\ 2y - z = 0 \Longrightarrow z = 2y \end{cases}$

Los vectores propios buscados son :$v = (x, y, z) = (-y, y, 2y)\,,\ y \in \mathbb{R}$.

Análogamente, los vectores propios $v = (x, y, z)$ correspondientes a $\lambda = 2$ se obtienen a partir de

$$(A - \lambda I)v = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \; F_1 \longleftrightarrow F_2 \; \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \; \begin{matrix} F_2 \longleftrightarrow F_2 - F_1 \\ F_4 \longleftrightarrow F_4 - 4F_1 \end{matrix} \; \sim$

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \Longrightarrow x = 2y - 4y = -2y \\ 4y - z = 0 \Longrightarrow z = 4y \end{cases}$

Los vectores buscados son :$v = (x, y, z) = (-2y, y, 4y) = y(-2, 1, 4)\,,\ y \in \mathbb{R}$.

Los vectores propios $v = (x, y, z)$ correspondientes a $\lambda = 3$ se obtienen a partir de

$$(A - \lambda I)v = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \overset{F_1 \longleftrightarrow F_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \underset{F_4 \longleftrightarrow F_4 - 4F_1}{\overset{F_2 \longleftrightarrow F_2 + 2F_1}{\longrightarrow}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -2 & 0 \end{bmatrix} \overset{F_3 \longleftrightarrow F_3 + 2F_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x - 3y + z = 0 \Longrightarrow x = 3y - 4y = -y \\ -4y + z = 0 \Longrightarrow z = 4y \end{cases}$$

Los vectores propios buscados son :$v = (x, y, z) = (-y, y, 4y) = y\,(-1, 1, 4)$, $y \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 2.101 *Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal con matriz asociada A tal que*

$$|A - \lambda I| = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2$$

(a)*Hallar los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de A.*

(b)*Sean $(1,0,1), (1,2,1), (-1,2,0)$ vectores propios correspondientes a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ respectivamente con $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Calcular $T(1,0,1), T(1,2,1)$ y $T(-1,2,0)$.*

(c)*Hallar $T(x, y, z)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.*

Solución

(a)Sea $p(\lambda) = |A - \lambda I| = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1)$

$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$ son los valores propios de A.

(b)Los vectores propios $T(v) = \lambda v$

$T(v_1) = T(1,0,1) = -1\,(1,0,1) = (-1,0,-1)$

$T(v_2) = T(1,2,1) = 1\,(1,2,1) = (1,2,1)$

$T(v_3) = T(-1,2,0) = 2\,(-1,2,0) = (-2,4,0)$

(c)Sea $(x, y, z) = \alpha(1,0,1) + \beta(1,2,1) + \gamma(-1,2,0)$

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta - \gamma \\ y = 2\beta + 2\gamma \\ z = \alpha + \beta \end{cases} \Longrightarrow \alpha = 2z - \tfrac{1}{2}y - x, \beta = x + \tfrac{1}{2}y - z, \gamma = z - x$$

Luego,

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= \alpha T(1,0,1) + \beta T(1,2,1) + \gamma T(-1,2,0) \\ T(x,y,z) &= \alpha(-1,0,-1) + \beta(1,2,1) + \gamma(-2,4,0) \\ T(x,y,z) &= (\beta - \alpha - 2\gamma, 2\beta + 4\gamma, \beta - \alpha) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$T(x, y, z = (4x + y - 5z, y - 2x + 2z, 2x + y - 3z)$$

Ejercicios Propuestos:Valores propios y vectores propios

1. Hallar el polinomio característico, los valores propios y vectores propios de cada matriz :

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$; $bc \neq 0$

2. Suponga que la matriz A tiene valores propios λ_1, λ_2, $\lambda_3, \cdots, \lambda_k$.

(a) Demostrar que los valores propios de A^t son λ_1, λ_2, $\lambda_3, \cdots, \lambda_k$.

(b) Demostrar que los valores propios de αA son $\alpha\lambda_1$, $\alpha\lambda_2$, $\alpha\lambda_3, \cdots, \alpha\ \lambda_k$.

(c) Demostrar que A^{-1}existe si y sólo si λ_1, λ_2, $\lambda_3, \cdots, \lambda_k \neq 0$.

(d) Si A^{-1}existe, demostrar que los valores propios de A^{-1} son λ_1^{-1}, λ_2^{-1}, $\lambda_3^{-1}, \cdots$, λ_k^{-1}.

(e) Demostrar que la matriz $A - \alpha I$ tiene valores propios $\lambda_1 - \alpha$, $\lambda_2 - \alpha$, $\lambda_3 - \alpha, \cdots, \lambda_k - \alpha$.

(f) Demostrar que si A es una matriz diagonal, entonces los valores propios de A son las componentes de la diagonal principal.

3. Si A y B son matrices semejantes de orden $n \times n$.Demostrar que A y B tienen los mismos valores propios.

   Nota. Dos matrices A y B de orden $n \times n$, son **semejantes** si existe una matriz invertible C de orden $n \times n$ tal que

$$B = C^{-1}AC.$$

4. Determinar si las siguientes matrices son diagonalizables. En caso afirmativo encontrar una matriz que diagonalice:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. Determinar los valores y vectores propios del operador derivación sobre el espacio n-polinomios. ¿ Es este operador diagonalizable ?

6. Sean A y B matrices cuadradas de orden $n \geq 1$ y $m \geq 1$, respectivamente. Demostra que el polinomio característico de la matriz

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

   es $p_A(x)p_B(x)$.

7. Sea A una matriz de orden $n \geq 1$ y $p(x)$ un polinomio cualquiera. Demostrar que si A es diagonalizable, entonces $p(A)$ es diagonalizable.

8. Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden $n \geq 1$ tal que $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ para cada $1 \leq i \leq n$. Demostrar que 1 es un valor propio de A.

Capítulo 3

Números Complejos

Una ecuación de segundo grado en el conjunto de los números reales puede tener una, dos o ninguna solución. El motivo por el que una ecuación de segundo grado no tiene solución en los números reales es que, cuando el discriminante es negativo, la raíz cuadrada no existe. Por ejemplo, si queremos resolver la ecuación:

$$x^2 + 1 = 0 \qquad (\alpha)$$

nos encontramos con que $\sqrt{-1}$ no es un número real.

Si se representa $\sqrt{-1}$ por la letra i, entonces la ecuación (α) , que antes no tenía solución, ahora tiene dos soluciones $x = i$ y $x = -i$, pero en un nuevo conjunto, el de los números complejos.

En general, se define un número complejo como $z = x + yi$ donde x e y son números reales y $i = \sqrt{-1}$.

Se dice que x es la *parte real* del número complejo z y que y es su *parte imaginaria*, y se escribe $x = \operatorname{Re}(z)$, $y = \operatorname{Im}(z)$, respectivamente.

Si $y = 0$, obtenemos un número real puro.

Si $x = 0$, obtenemos un número imaginario puro.

Por lo tanto, los números reales están contenidos en los números complejos.

Al conjunto de los números complejos se le denota por $\mathbb{C}$. Así, tenemos que

$$\mathbb{C} = \left\{ z = x + yi \ / \ x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R},\, i = \sqrt{-1} \right\}$$

Ejemplo 3.1

a. Para $z = -4 + 5i$, se tiene $\operatorname{Re}(z) = -4, \operatorname{Im}(z) = 5$

b. Para $z = 3 - 7i$, se tiene $\operatorname{Re}(z) = 3, \operatorname{Im}(z) = -7$

c. Para $z = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}} - 2^{10}i$, se tiene $\operatorname{Re}(z) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}, \operatorname{Im}(z) = -2^{10}$

3.1 Identificación del conjunto $\mathbb{C}$ con el conjunto $\mathbb{R}^2$

Como cada número complejo $z = x + yi$ tiene dos componentes, la componente real "x" y la componente imaginaria "y".De esta manera, el conjunto $\mathbb{C}$ se puede identificar con $\mathbb{R}^2$. El número complejo $z = x + yi$ se identifica con el par ordenado $(x; y)$ de $\mathbb{R}^2$.

a. $z = -4 + 5i$, se identifica con el par ordenado $(-4, 5)$

b. $z = 3 - 7i$, se identifica con el par ordenado $(3, -7)$

c. $z = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}} - 2^{10}i$, se identifica con el par ordenado $\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}, -2^{10}\right)$

Debido a que cada número complejo $z = x + yi$ se identifica con el par ordenado $(x;\ y)$ de $\mathbb{R}^2$, entonces el número complejo z se grafica en un plano cartesiano**.** En este caso $(x;\ y)$ recibe el nombre de *forma cartesiana* del número complejo z , y la representación $x + yi$ recibe el nombre de *forma binómica* del número complejo z .

Ejemplo 3.2 *Ubicar los siguientes números complejos en el plano complejo.*

a. $z_1 = 3 + 2i,$
b. $z_2 = -4 + 3i,$
c. $z_3 = -5 - 3i,$
d. $z_4 = -4.$
e. $z_5 = 5.$

Solución

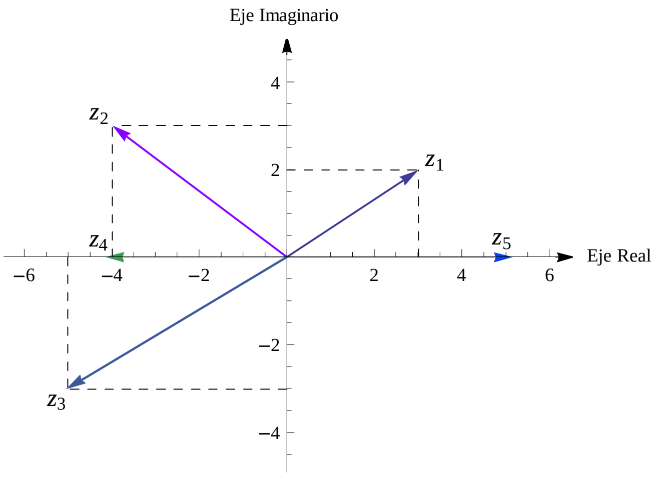


Figura 2.1 Números complejos en el plano complejo

El *sistema de los números complejos* es el conjunto $\mathbb{C}$ de todos los números de la forma $z = x + yi$ tal que, sobre $\mathbb{C}$ se definen la igualdad, las operaciones de adición y la multiplicación de dos números complejos del siguiente modo.

3.2 Igualdad de números complejos

Dados dos números complejos $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$ son iguales si, y solo si, sus partes reales coinciden y sus partes imaginarias también coinciden. Esto es:

$$z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2 \quad \text{y} \quad y_1 = y_2$$

3.3 Adición de números complejos

Dados dos números complejos, $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$, la suma de z_1 y z_2 se define como el número complejo cuya parte real es la suma de las partes reales de z_1 y z_2 y cuya parte imaginaria es la suma de las pates imaginarias de z_1 y z_2 . Esto es:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\, i$$

3.4 Producto de números complejos

Dados dos números complejos $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$, el producto de z_1 y z_2 se define:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)\, i$$

Ejemplo 3.3 *Dados los números complejos* $z_1 = 1 - 4i \quad y \quad z_2 = -2 + 5i$*, hallar* $z_1 + z_2$ *y* $z_1 z_2$.

Solución

$$\begin{array}{l} z_1 + z_2 = (1-2) + (-4+5)\, i = -1 + i \\ z_1 z_2 = ((1)(-2) - (-4)(5)) + ((1)(5) + (-2)(-4))\, i = 18 + 13i \end{array}$$

Ejemplo 3.4 *Dados los números complejos* $z_1 = \sqrt{3} + 3\sqrt{3}i \qquad y \quad z_2 = -2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}i$,

hallar $z_1 + z_2$ y $z_1 z_2$.

Solución

$$\begin{array}{l} z_1 + z_2 = \left(\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\right) + \left(3\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\right) i = -\sqrt{3} + 5\sqrt{3}i \\ z_1 z_2 = (-6 - 18) + (6 - 18)\, i = -24 - 12i \end{array}$$

3.4.1 Propiedades de la adición y de la multiplicación de números complejos $\mathbb{C}$

Propiedades de la adición

A_1. Para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se cumple: $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$.

A_2. Para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se cumple: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

A_3. Para todo z_1, z_2 y $z_3 \in \mathbb{C}$ se cumple: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

A_4. Existe un elemento en $\mathbb{C}$ al que denotaremos por $\mathbf{0} = 0 + 0i$, tal que para todo z en $\mathbb{C}$, se cumple: $z + \mathbf{0} = z$.

A_5. Para cada $z \in \mathbb{C}$, existe un elemento en $\mathbb{C}$, al que denotamos por $(-z)$ tal que $z + (-z) = \mathbf{0}$.

Propiedades de la multiplicación

M_1. Para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se cumple: $z_1 z_2 \in \mathbb{C}$.

M_2. Para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se cumple: $z_1 z_2 = z_2 z_1$.

M_3. Para todo z_1, z_2 y $z_3 \in \mathbb{C}$ se cumple: $(z_1 z_2)\, z_3 = z_1\, (z_2 z_3)$.

M_4. Existe un elemento en $\mathbb{C}$, al que denotaremos por $1{=}1 + 0i$, tal que para todo $z \in \mathbb{C}$ se cumple: $z1{=}z$.

M_5. Para cada z en $\mathbb{C}$, diferente de cero, existe un elemento en $\mathbb{C}$ al que denotaremos por z^{-1}, tal que

$$zz^{-1} = 1 \ , \ z^{-1} \text{ se llama inverso multiplicativo de } z.$$

Propiedad

Si $z = x + iy$, $z \neq 0$ entonces

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i.$$

Ejemplo 3.5

El opuesto de $\sqrt{3} + 5i$ *es* $-\sqrt{3} - 5i$.
El opuesto de $2 - 7i$ *es* $-2 + 7i$.
El opuesto de $-10 + i$ *es* $10 - i$.
El opuesto de -$\frac{2}{3} - 6i$ *es* $\frac{2}{3} + 6i$.

Ejemplo 3.6 *Dado el número complejo $z = 3 + 4i$, hallar z^{-1}.*

Solución
Sea $z^{-1} = a + bi$, con a y b números reales. Entonces:

$$(a + bi)(3 + 4i) = 1 \Rightarrow (3a - 4b) + (4a + 3b)i = 1$$

Así, identificando las partes reales e imaginarias de ambos miembros de la ecuación e igualando, se tiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3a - 4b = 1 \\ 4a + 3b = 0 \end{cases}$$

cuya solución es $a = \frac{3}{25}$, $b = -\frac{4}{25}$. Por lo tanto, $z^{-1} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$.

Ejemplo 3.7 *Dado el número complejo z, demostrar que $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$*

Solución
Sea $z = a + bi$ y $z^{-1} = c + di$, entonces

$$(a + bi)(c + di) = 1 \Rightarrow (ac - bd) + (ad + bc)i = 1$$

Así, tenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} ac - bd = 1 \\ ad + bc = 0 \end{cases}$$

cuya solución es $c = \frac{a}{a^2+b^2}$, $b = -\frac{d}{a^2+b^2}$. Luego, $z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{d}{a^2+b^2}i$.
Por lo tanto, $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Propiedad distributiva
Para todo z_1, z_2 y $z_3 \in \mathbb{C}$ se cumple: $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

Ejemplo 3.8 *Dados los números:*

$$z_1 = i,\ z_2 = 2,\ z_3 = 5i$$

hallar $z_1 (z_2 + z_3)$.
Solución

$$i (2 + 5i) = i2 + i(5i) = -5 + 2i$$

3.5 Sustracción de números complejos

Dados dos números complejos, $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$, la sustracción de z_1 y z_2 se define como la adición de z_1 con el opuesto de z_2.

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\, i$$

3.6 División de números complejos

Dados dos números complejos, z_1 y z_2 , donde $z_2 \neq 0$, se define la división de z_1 entre z_2 como la multiplicación de z_1 con el inverso de z_2.

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1.z_2^{-1}$$

3.7 Conjugado de un número complejo

Si $z = x + yi$, entonces:
$\overline{z} = \overline{x + yi} = x - yi$, al cual llamaremos *conjugado de z*.

a. Si $z = \sqrt{2} + \frac{1}{2}i$, entonces $\overline{z} = \overline{\sqrt{2} + \frac{1}{2}i} = \sqrt{2} - \frac{1}{2}i$

b. Si $z = e^2 - e^{\sqrt{2}}i$, entonces $\overline{z} = \overline{e^2 - e^{\sqrt{2}}i} = e^2 + e^{\sqrt{2}}i$

3.7.1 Propiedades del conjugado de un número complejo

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
3. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$
4. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
5. $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$, $Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$
6. $\overline{z} = z \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$
7. $(\overline{z})^m = \overline{z^m}$, $\forall m \in \mathbb{Z}^+$

3.8 Módulo de un número complejo

El módulo de un número complejo $z = x + yi$ es el número real no negativo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Hallar el módulo de los siguientes números complejos:

a. $z = 6 - 8i$ entonces $|z| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10$

b. $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$ entonces $|z| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2} = 2$

c. $z = i$ entonces $|z| = \sqrt{0^2 + (1)^2} = 1$

3.8.1 Propiedades del módulo de un número complejo

Para todo z, z_1, z_2 en $\mathbb{C}$, se cumple:

1. $|z| \geq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$; $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$
2. $|rz| = |r|\,|z|$, $\forall z \in \mathbb{C}; \forall r \in \mathbb{R}$
3. $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$,
4. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$,

3.9 Argumento o amplitud de un número complejo

El argumento de un número complejo $z = x + yi$ denotado por θ, es la medida en radianes del ángulo de inclinación del radio vector de z. Se denomina argumento principal al valor de θ tal que $0 \leq \theta < 2\pi$.

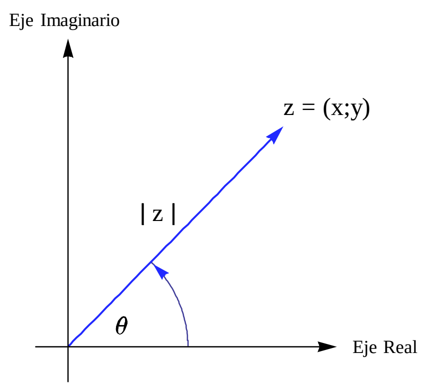


Figura 2.2 Argumento de un número complejo

3.10 Forma polar y forma exponencial de un número complejo

Sea el número complejo $z = x + yi$, si el módulo de z es $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el argumento de z es θ, entonces la *forma polar de* z es:

$$z = |z| (\cos\theta + isen\theta)$$

Ejemplo 3.9 *Expresar en forma polar los números complejos*

$$z_1 = 2 + 2i \quad \text{y} \quad z_3 = -3 - \sqrt{3}i$$

Luego ubicarlos en el plano complejo.
Solución
Forma polar, $z_1 = |z_1| (\cos\theta_1 + isen\theta_1)$, $z_3 = |z_3| (\cos\theta_3 + isen\theta_3)$
Calculamos los módulos:

$$\begin{aligned} |z_1| &= \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}, \\ |z_3| &= \sqrt{(-3)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Graficamos $z_1 = 2 + 2i$ y $z_3 = -3 - \sqrt{3}i$,

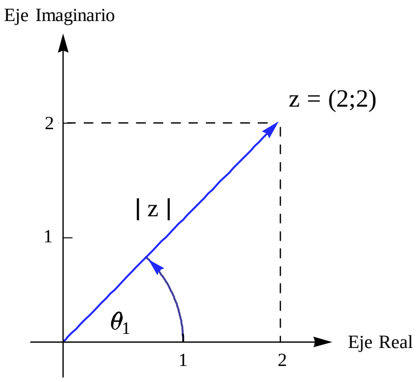


Figura 2.3 Ubicación de z_1 en el plano complejo

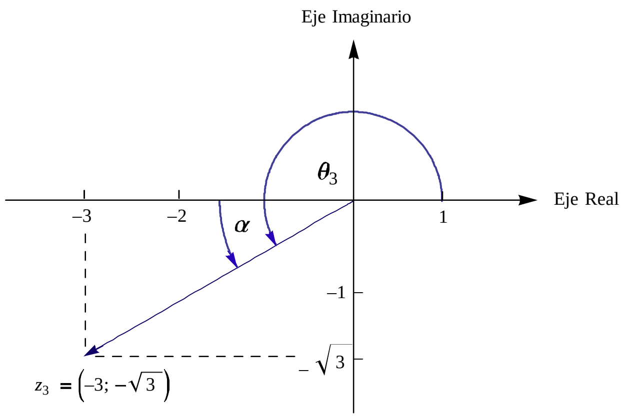


Figura 2.4 Ubicación de z_3 en el plano complejo

y obtenemos $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ y $\theta_3 = \frac{7\pi}{6}$.
Por lo tanto, $z_1 = \sqrt{8}\left(\cos\frac{\pi}{4} + isen\frac{\pi}{4}\right)$, $z_3 = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + isen\frac{7\pi}{6}\right)$.

Representamos por $e^{i\theta}$ a $\cos\theta + isen\theta$, es decir, $e^{i\theta} = \cos\theta + isen\theta$.
Así tenemos:

$z = |z|\, e^{i\theta}$, a esta expresión se le llamará *forma exponencial de z.*

Ejemplo 3.10 *Dados los números complejos* $z_1 = 20 + 70i$, $z_2 = 1 + 3i$ *y* $z_3 = 16 + 10i$, *calcular* $w = \frac{z_1}{z_2} + z_3$.

Expresar w en la forma $a + bi$, y en la forma polar.

Solución
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{20+70i}{1+3i} = -19 - 13i$,
entonces
$w = \frac{z_1}{z_2} + z_3 = (-19 - 13i) + (16 + 10i) = -3 - 3i.$
El módulo de w es $3\sqrt{2}$ y su argumento θ es $\frac{5\pi}{4}$, luego

$$w = 3\sqrt{2}\left[\cos\left(\tfrac{5\pi}{4}\right) + i\ sen\left(\tfrac{5\pi}{4}\right)\right]$$

3.10.1 Propiedades de la multiplicación y división de números complejos

Sean z_1 y z_2 dos números complejos dados en su forma polar:

$$z_1 = |z_1|\left(\cos\theta_1 + isen\theta_1\right), \quad z_2 = |z_2|\left(\cos\theta_2 + isen\theta_2\right)$$

Entonces el producto es

$$z_1\ z_2 = |z_1|\,|z_2|\left[\cos\left(\theta_1+\theta_2\right) + isen\left(\theta_1+\theta_2\right)\right]$$

y el cociente será

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left[\cos\left(\theta_1-\theta_2\right) + isen\left(\theta_1-\theta_2\right)\right]\ ,\ z_2 \neq 0.$$

3.10.2 Teorema de De Moivre

Sea $n \in \mathbb{Z}^+$ y $z = |z|\left(\cos\theta + isen\theta\right)$. Entonces:

$$z^n = |z|^n\left(\cos\left(n\theta\right) + isen\left(n\theta\right)\right)$$

Observación
Los teoremas anteriores también pueden presentarse expresando los números complejos en forma exponencial.

Ejemplo 3.11 *Sean* $z_1 = 2 + 2i$ *y* $z_2 = -3 - \sqrt{3}i$ *, hallar* $z_1,\ z_2$ *y* $\dfrac{z_1}{z_2}$ *en forma polar.*

Solución
Expresamos z_1 y z_2 en su forma polar y aplicamos el teorema anterior:

$$z_1\ z_2 = 4\sqrt{6}\left[\cos\left(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{7\pi}{6}\right) + isen\left(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{7\pi}{6}\right)\right]$$
$$z_1\ z_2 = 4\sqrt{6}\left[\cos\left(\tfrac{17\pi}{12}\right) + isen\left(\tfrac{17\pi}{12}\right)\right]$$

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left[\cos\left(\tfrac{\pi}{4}-\tfrac{7\pi}{6}\right) + isen\left(\tfrac{\pi}{4}-\tfrac{7\pi}{6}\right)\right]\\ &= \sqrt{\tfrac{2}{3}}\left[\cos\left(-\tfrac{11\pi}{12}\right) + isen\left(-\tfrac{11\pi}{12}\right)\right]\\ \frac{z_1}{z_2} &= \sqrt{\tfrac{2}{3}}\left[\cos\left(\tfrac{13\pi}{12}\right) + isen\left(\tfrac{13\pi}{12}\right)\right]\end{aligned}$$

Ejemplo 3.12 *Dado el número complejo* $z = -1 + i$*, expresar* z^{28} *en forma exponencial.*

Solución
Expresamos z en forma exponencial:
$|z| = \sqrt{2}$ y $\theta = \frac{3\pi}{4}$, entonces $z = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
Luego,

$$z^{28} = \sqrt{2}^{28}e^{i\frac{3\pi}{4}28} = 2^{14}e^{21\pi i} = 2^{14}e^{i\pi}.$$

Ejemplo 3.13 *Dado el número complejo* $z = 1+\sqrt{3}i$, *expresar* z^{35} *en forma exponencial, polar y binómica.*

Solución
Expresamos z en forma exponencial: $z = |z|\, e^{i\theta}$.
$|z| = 2$ y $\theta = \frac{\pi}{3}$,entonces $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.
Luego,

$$z^{35} = 2^{35}e^{i\frac{\pi}{3}35} = 2^{35}e^{i(10\pi+\frac{5\pi}{3})} = 2^{35}e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

En forma exponencial, $z^{35} = 2^{35}e^{i\frac{5\pi}{3}}$.
En forma polar,

$$z^{35} = 2^{35}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right]$$

En forma binómica,

$$z^{35} = 2^{34} + i2^{34}\sqrt{3}.$$

3.11 Solución de ecuaciones $w^n = z$

Dado $n \in \mathbb{Z}^+$, el número complejo $z = x + yi$, con x e y reales, y la ecuación

$$w^n = z,$$

se dice que $w \in C$ es solución de dicha ecuación si la satisface.
Propiedad

Las n soluciones complejas de una ecuación de la forma $w^n = z$, con $z = |z|\, e^{i\theta}$, son de la forma:

$$w_k = |z|^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + isen(\frac{\theta+2k\pi}{n})\right],\ k = 0; 1; 2; ...; n-1$$

En efecto, los números complejos w_k son soluciones de $w^n = z$, pues:

$$[w_k]^n = [|z|^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + isen(\frac{\theta+2k\pi}{n})\right]]^n$$

$$\begin{aligned}
&= |z|\,[\cos(\theta+2k\pi) + isen(\theta+2k\pi)]\\
&= |z|\,[\cos(\theta) + isen(\theta)]\\
&= z
\end{aligned}$$

Observación
Las soluciones de ecuaciones de la forma

$$w^n = z,$$

se representan gráficamente en una circunferencia con centro en el origen y radio $|z|^{1/n}$. Además, como la diferencia de argumentos de las n soluciones es constante, estas se encuentran igualmente espaciadas en la circunferencia.

Ejemplo 3.14 *Hallar todas las soluciones complejas de la ecuación* $w^2 = -36$.

Solución

Notemos que la ecuación $w^2 = -36$ no tiene soluciones en los números reales; sin embargo, en los números complejos sí tiene solución.

Expresamos z en la forma exponencial: $z = |z|\, e^{i\theta}$.

$|z| = 36$ y $\theta = \pi$,entonces $z = 36e^{i\pi}$.

Luego, las raíces cuadradas son $w_k = 36^{\frac{1}{2}} e^{i(\pi+2\pi k)\frac{1}{2}}$, $k = 0; 1$.

Así, $w_0 = 6e^{i\frac{\pi}{2}}$ y $w_1 = 6e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

Por lo tanto, las raíces cuadradas son $w_0 = 6i$ y $w_1 = -6i$.

Ejemplo 3.15 *Resolver la ecuación* $w^2 = 1 + i$.

Solución

Expresamos z en forma polar o exponencial: $z = |z|\, e^{i\theta}$.

$|z| = \sqrt{2}$ y $\theta = \frac{\pi}{4}$,entonces $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Luego, las solucions son $w_k = \left|\sqrt{2}\right|^{\frac{1}{2}} e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)\frac{1}{2}}$, $k = 0; 1$.

$$w_0 = \sqrt[4]{2}\ [\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + isen\left(\frac{\pi}{8}\right)]$$

y

$$w_1 = \sqrt[4]{2}\ [\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + isen\left(\frac{9\pi}{8}\right)]$$

Ejemplo 3.16 *Resolver la ecuación* $w^3 = -8$.

Solución

Notemos que esta ecuación en los reales solo tiene una solución: $w = -2$; sin embargo, en los números complejos tiene tres soluciones.

Expresamos z en forma exponencial: $z = |z|\, e^{i\theta}$.

$|z| = 8$ y $\theta = \pi$, entonces $z = 8e^{i\pi}$.

Luego, las soluciones son $w_k = 8^{\frac{1}{3}} e^{i\left(\frac{\pi+2\pi k}{3}\right)}$, $k = 0; 1; 2$.

$$w_0 = 2\ e^{i\frac{\pi}{3}}\ , w_1 = 2e^{i\pi}\ y\ \ w_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}.$$

Notar que $w_1 = 2e^{i\pi} = -2$.

Ejemplo 3.17 *Considerar la ecuación* $z^3 + 27 = 0$ *y encontrar todos los números complejos que la satisfacen. Dar las respuestas en forma exponencial.*

Solución 1

La ecuación es equivalente a: $\left(re^{i\theta}\right)^3 \;=\; -27$

es decir, $r^3 e^{i\theta 3} \;=\; 27e^{(2k+1)\pi i}$

luego, $r = 3$ y $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{3}$, genera tres soluciones

$$z_1 = 3e^{\frac{\pi}{3}i}, \quad z_2 = 3e^{\pi i} \quad \text{y} \quad z_3 = 3e^{\frac{5\pi}{3}i}$$

Solución 2

$z^3 + 27 \quad = 0$

$(z+3)\left(z^2 - 3z + 9\right) \quad = \quad 0$, de donde

$z_1 = -3, \quad z_2 = \frac{3+3\sqrt{3}i}{2}, \quad \text{y} \quad z_3 = \frac{3-3\sqrt{3}i}{2}$

escribiendo en su forma exponencial

$$z_1 = 3e^{\pi i}, \quad z_2 = 3e^{\frac{\pi}{3}i}, \quad \text{y} \quad z_3 = 3e^{\frac{5\pi}{3}i}$$

Ejemplo 3.18 *Hallar todos los números complejos z cuyo módulo es $\sqrt{3}$ y que satisfacen la ecuación*

$$(z-2)^3 - 1 = 0$$

Solución

La ecuación dada es equivalente a $(z-2)^3 = 1,$ y el número 1 expresado en forma polar es $\cos 0 + isen0,$

luego tenemos:

$(z-2)^3 = \cos 0 + isen0$

$(z-2) = \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{2k\pi}{3}\right); \ k = 0; 1; 2$

$z = 2 + \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{2k\pi}{3}\right); \ k = 0; 1; 2$

para $k = 0$ se tiene $\quad z_0 = 3 \quad$ y como $|z_0| = 3$, no se cumple la condición pedida.

para $k = 1$ se tiene $\quad z_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ donde $|z_1| = \sqrt{3}$

para $k = 2$ se tiene $\quad z_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ donde $|z_2| = \sqrt{3}$

Los números que cumplen las condiciones pedidas son $z_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $z_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$

Ejemplo 3.19 *Resolver la siguiente ecuación en el conjunto de los números complejos.*

$$i^4z^4 + 2i^2z^2 + 2 - i = i^3$$

Solución

Efectuando las potencias de i obtenemos:

$$z^4 - 2z^2 + 2 = 0$$

y completando cuadrados en el primer miembro

$$\left(z^2 - 1\right)^2 = -1$$

Luego:

$$\begin{array}{rclcrcl} z^2 - 1 & = & i & \text{ó} & z^2 - 1 & = & -i \\ z^2 & = & 1 + i & \text{ó} & z^2 & = & 1 - i \end{array}$$

Expresando en forma exponencial

$$z^2 \quad = \quad \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{ó} \quad z^2 \quad = \quad \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

ahora calculamos las soluciones:

$$z \quad = \quad \sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)\frac{1}{2}} \quad \text{ó} \quad z \quad = \quad \sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{4}+2\pi k\right)\frac{1}{2}}$$

Y para $k = 0$ y $k = 1$ se tiene:

$$
\begin{aligned}
z &= \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}} \quad \text{ó} \quad z = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{9\pi}{8}} \quad \text{ó}\\
z &= \sqrt[4]{2}e^{i\frac{7\pi}{8}} \quad \text{ó} \quad z = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{15\pi}{8}}
\end{aligned}
$$

3.12 Sistemas de dos ecuaciones y dos variables en los números complejos

A continuación se resolverán sistemas de ecuaciones donde los coeficientes, los términos independientes y las variables pueden tomar valores en el conjunto de los números complejos. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.20 *Resolver el siguiente sistema de ecuaciones en el conjunto de números complejos. Dar la respuesta en forma binómica.*

$$
\left\{\begin{array}{rcrcl} 2z & + & 3w & = & 9-2i \\ iz & - & w & = & i+3 \end{array}\right. ,
$$

Solución
Multiplicando la primera ecuación por i, y la segunda por -2, tenemos

$$
\left\{\begin{array}{rcrcl} 2zi & + & 3wi & = & 9i+2 \\ -2zi & + & 2w & = & -2i-6 \end{array}\right.
$$

sumando ambos miembros, se tiene

$$
w = \frac{7i-4}{3i+2} = 1+2i
$$

y reemplazando para obtener z tenemos:

$$
z = 3-4i
$$

Ejemplo 3.21 *Resolver el siguiente sistema de ecuaciones en el conjunto de números complejos.*

$$
\left\{\begin{array}{ccccc} \left(2+i\sqrt{12}\right)z & + & iw & = & i \\ 2\sqrt{3}z & - & \left(i+\sqrt{3}\right)w+2iz & = & 4-2i \end{array}\right.
$$

Solución
Multiplicando la primera ecuación por "i " y ordenando la segunda ecuación tenemos

$$
\left\{\begin{array}{ccccccc} \left(2+i\sqrt{12}\right)iz & - & w & = & -1 & & (\alpha) \\ \left(2\sqrt{3}-2i\right)z & - & \left(i+\sqrt{3}\right)w & = & 4-2i & & (\beta) \end{array}\right.
$$

Multiplicando la ecuación (α) por $\left(i+\sqrt{3}\right)$,

$$\begin{cases} \left(2+i\sqrt{12}\right)\left(i+\sqrt{3}\right)iz & - & \left(i+\sqrt{3}\right)w & = & -1\ \left(i+\sqrt{3}\right) & (\delta) \\ \left(2\sqrt{3}-2i\right)z & - & \left(i+\sqrt{3}\right)w & = & 4-2i & (\beta) \end{cases}$$

restando miembro a miembro y despejando z, se tiene:

$$z=\frac{1}{2}$$

Reemplazando este valor en (α) :

$$w=1-\sqrt{3}+i.$$

Ejemplo 3.22 *Resolver el siguiente sistema de ecuaciones en el conjunto de números complejos:*

$$\begin{cases} (1-3i)\,\overline{w} & + & iz & = & -3-6i \\ z & + & \dfrac{-2+i}{w} & = & 2+4i \end{cases}$$

sabiendo que, $|w|=\sqrt{5}$.

Solución

La segunda ecuación

$$z \quad + \quad \frac{-2+i}{w} \quad = \quad 2+4i \text{ ,se escribe}$$

$$z \quad + \quad \frac{-2+i}{w}\times\frac{\overline{w}}{\overline{w}} \quad = \quad 2+4i$$

$$z \quad + \quad \frac{-2+i}{5}\overline{w} \quad = \quad 2+4i \text{ , obtenemos}$$

$$\begin{cases} iz & + & (1-3i)\,\overline{w} & = & -3-6i & (\alpha) \\ z & + & \dfrac{-2+i}{5}\overline{w} & = & 2+4i & (\beta) \end{cases}$$

multiplicando (β) por $-i$ y sumando con (α), se tiene:

$$\left[(1+3i)-i\frac{(-2+i)}{5}\right]\overline{w} \quad = \quad -3-6i-2-4i \text{ , simplificando}$$

$\overline{w}=-2-i$, de donde $w=-2+i$, y reemplazando en (α) :

$$z=1+4i$$

Ejemplo 3.23 *Hallar en los complejos, las soluciones de la ecuación* $z^6=64$.

Escribimos $64=64\,(\cos 0+i\ sen0)$, entonces:

$$z_1 = \sqrt[6]{64}\left(\cos\frac{0+2(0)\pi}{6} + i\ sen\frac{0+2(0)\pi}{6}\right)$$
$$z_2 = \sqrt[6]{64}\left(\cos\frac{0+2(1)\pi}{6} + i\ sen\frac{0+2(1)\pi}{6}\right)$$
$$z_3 = \sqrt[6]{64}\left(\cos\frac{0+2(2)\pi}{6} + i\ sen\frac{0+2(2)\pi}{6}\right)$$
$$z_4 = \sqrt[6]{64}\left(\cos\frac{0+2(3)\pi}{6} + i\ sen\frac{0+2(3)\pi}{6}\right)$$
$$z_5 = \sqrt[6]{64}\left(\cos\frac{0+2(4)\pi}{6} + i\ sen\frac{0+2(4)\pi}{6}\right)$$
$$z_6 = \sqrt[6]{64}\left(\cos\frac{0+2(5)\pi}{6} + i\ sen\frac{0+2(5)\pi}{6}\right)$$

3.13 Problemas propuestos

1)Dados los siguientes números complejos:

$$z_1 = 2-3i; \qquad z_2 = \frac{1}{3}+4i; \qquad z_3 = -3+5i,$$

efectuar las siguientes operaciones:

a) $z_1 + 3z_2$

b) $z_3 z_1 - 6z_2$

c) $\frac{z_1}{z_3} + z_2$

2) Si $z = \frac{a+i}{2+3i}$es un numero complejo imaginario puro, donde a es una constante real,

a)Hallar el valor de a

b)Hallar z.

3) Calcular $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^9 + \frac{1-2i}{3+i}$ .Expresar la respuesta en forma binómica.

4)La suma de dos números complejos z y w es $(3-2i)$ y la parte real del primero es 5. Si el cociente del primero entre el segundo es un número real, hallar dichos números complejos.

5)Dados los números complejos $z = 2(1-i) + 3(i-2)$; $\qquad w = \frac{1}{1+2i}$, determinar:

a) $\operatorname{Re}\left(w^2\right)$

b) $\operatorname{Im}\left(\frac{i}{zw}\right)$

c) $|z+w|$

6) Resolver en el conjunto de los números complejos cada uno de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} (2+i)\,z + (2-i)w = 6 \\ (3+2i)\,z + (3-2i)\,w = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (1-i)\,\bar{z} + 5iw = 2i - 7 \\ 2z + (3-4i)\,\bar{w} = 8 - i \end{cases}$

c) $\begin{cases} z + (1-i)\,w = 2 - i \\ 2i\bar{z} + \bar{w} = -1 - i \end{cases}$

d) $\begin{cases} \overline{(1-5i)}z + (3i)\,w = 5 + 12i \\ (2-2i)\,z + \overline{(7+2i)}w = 12 - |4i-3|^2 i \end{cases}$

7)Expresar cada uno de los siguientes números complejos z en forma polar y exponencial:

a) $z = \frac{(4i)^2\left(-3+3\sqrt{3}i\right)}{\left(-\sqrt{5}-\sqrt{5}i\right)^3}$

b) $z = \frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^9}{(1+i)^9}$

8) Resolver la ecuación $w^4 = -16$,en el conjunto de los números complejos.

9) Si $z_1 = 3 + 8i, z_2 = -1 + \left(8 + 4\sqrt{3}\right) i$ y $z_3 = 4i$,

simplificar la expresión: $\dfrac{(z_1 - z_2)^6}{(z_3)^5}$. Dar la respuesta en forma binómica.

10) Dados los números complejos:

$$z_1 = 3\,(-1+i) \ , \quad z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} \ , \quad z_3 = 2e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

Calcular:

$$\frac{|z_1 - z_2|\, z_2 z_3^{-4}}{3\sqrt{3}}$$

Expresar la respuesta en forma binómica.

11) Resolver, en el conjunto de números complejos, el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 2iz & + & (1-i)\,\overline{w} & = & i \\ (1-i)\,\overline{z} & - & w & = & -1+i \end{cases}$$

12) Determinar los valores de los números complejos z y w

que satisfacen el sistema:

$$\begin{cases} 4z & + & \sqrt{2}\,w & = & 3-8i \\ 8\overline{z} & - & \sqrt{2}w & = & 11i \end{cases}$$

13)Dados los números complejos:

$$z_1 = 3 + 2i; \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i); \; z_3 = -\sqrt{3} - i; \; z_4 = -2 - 2i;$$

calcular $w=\left[\frac{4\sqrt{2}(z_1+z_4)}{z_2z_3z_4}\right]^{12n+1}, n\in Z^+$.

14)Hallar el conjunto solución en el conjunto de los números complejos de las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a)$x^2-2x+5=0$

b)$x^2-3x+(3-i)=0$

c)$z^2-2z+\sqrt{3}i=0$

15)Resolver la siguiente ecuación en el conjunto de los números complejos:

$$i^4z^4+2i^2z^2+2-i=i^3$$

16)Hallar, en el conjunto de los números complejos, las raíces indicadas y expresarlas en forma exponencial:

a)Las raíces cuadradas de -16

b)Las raíces cubicas de -27

17)Considerar el numero complejo z con y tal que el segmento que une el origen con z forma un ángulo de $7°$, medido en sentido anti horario, con el eje X. Expresar:

$$w=\frac{\left(\cos\frac{17\pi}{180}+i\sin\frac{17\pi}{180}\right)^3\left(\sqrt{2}e^{\frac{7}{45}\pi i}\right)^2}{z^{11}}$$

en la forma $a+bi$, con a y b números reales.

Capítulo 4

Números Complejos

4.1 Introducción

Recordemos que con las soluciones de la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

se presentan dos casos:

(a) Tiene soluciones reales si $b^2 - 4ac \geq 0$.

(b) No tiene soluciones reales si $b^2 - 4ac < 0$.

Por otro lado, en algunas aplicaciones matemáticas es necesario contar con un conjunto más extenso que los números reales, que incluya a éste como uno de sus subconjuntos, y que en particular permita resolver todas las ecuaciones cuadráticas.

El conjunto antes mencionado, que representaremos por $\mathbb{C}$, estará formado por pares ordenados de números reales, a los que llamaremos *números complejos*; esto es,

$$\mathbb{C} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

Notemos que

$$z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z = (x, y) \text{con} x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R};$$

a la expresión (x, y) se le denomina *forma cartesiana* del número complejo z, el número real x es llamado *parte real de* z y el número real y es llamado *parte imaginaria de* z y se escriben $x = \text{Re}(z), y = \text{Im}(z)$ respectivamente.

Un número complejo $z = (x, y)$ se puede representar gráficamente en un sistema de coordenadas rectangulares mediante un segmento dirigido con un punto inicial el origen del sistema y punto final el punto (x, y), que será llamado *radio vector* del número complejo z. En este caso a los ejes horizontal y vertical se les llama *eje real* y *eje imaginario* respectivamente, y al plano así determinado se le conoce como *plano complejo.*

$$Graf.$$

Si $z = (-2, 5)$, entonces $\text{Re}(z) = -2$ y $\text{Im}(z) = 5$.

1. Un número complejo de la forma $z = (x, 0)$ se llama número real puro.
2. Un número complejo de la forma $z = (0, y)$ se llama número imaginario puro.

El número imaginario puro $(0, 1)$ es llamado unidad imaginaria y se le denota por i.

4.2 El sistema de los números complejos

Recordemos que el sistema de los números reales se define como el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ provisto de una relación de equivalencia: *igualdad*, de dos operaciones: adición y multiplicación, y de una relación de orden: *menor o igual que*, que satisfacen determiados axiomas.

De modo similar, el sistema de los números complejos se define como el conjunto $\mathbb{C}$ provisto de una *relación de igualdad*, y de las operaciones de *adición y multiplicación.* [1]

[Igualdad en $\mathbb{C}$] Si $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$ y $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$, se dice que

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ y } y_1 = y_2.$$

[Adición en $\mathbb{C}$] Si $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$ y $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$, se define la suma de z_1 y z_2, como:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1, x_2 + y_2).$$

La adición compleja tiene las propiedades siguientes:
Si z_1, z_2 y z_3 son números complejos, entonces:

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
2. $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$.
3. Existe un único número complejo cero $0 = (0, 0)$, tal que $\forall z \in \mathbb{C} : z + 0 = z$.
4. $\forall z = (x, y) \in \mathbb{C}, \exists ! -z = (-x, y)$, tal que $z + (-z) = 0$.

Prueba.

1. Si $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$, por definición

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = z_2 + z_1. \end{aligned}$$

2. Sean $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ y $z_3 = (x_3, y_3)$ números complejos.

$$\begin{aligned} z_1 + (z_2 + z_3) &= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\ &= (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)) \end{aligned}$$

por la propiedad asociativa en los números reales, se tiene

$$\begin{aligned} z_1 + (z_2 + z_3) &= ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3) \\ &= (z_1 + z_2) + z_3. \end{aligned}$$

[1] Se puede demostrar que no hay una relación de orden apropiada para el sistema de los números complejos, hecho que no probaremos por estar fuera del alcance del texto.

3. Es claro que si $0 = (0,0)$, entonces para cualquier $z \in \mathbb{C}$ se cumple que $z+0 = z$. Por otro lado, si hubiera otro número complejo $0'$ tal que $z + 0' = z$ para todo número complejo z, entonces
$$0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0',$$
lo que prueba la unicidad.

4. Si $z = (x,y) y -z = (-x,-y)$, es claro que $z + (-z) = 0$. Además, si hubiera otro número complejo z' tal que $z + z' = 0$, entonces
$$z' = z' + 0 = z' + [z + (-z)] = [z' + z] + (-z) = 0 + (-z) = -z,$$
probándose la unicidad. ■

[Multiplicación en $\mathbb{C}$] Si $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$ y $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$, se define el producto de z_1 y z_2, como:
$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Observe que la suma y el producto de dos números complejos son también números complejos.

Si $z_1 = (2,-3)$ y $z_2 = (4,5)$, entonces
$$z_1 + z_2 = (2 + 4, -3 + 5) = (6,2)$$
$$z_1 z_2 = (2 \cdot 4 - (-3) \cdot 5, 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 4) = (23,-2)$$
La multiplicación en $\mathbb{C}$ tiene las siguientes propiedades.

Si z_1, z_2 y z_3 son números complejos, entonces

1. $z_1 z_2 = z_2 z_1$.
2. $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$.
3. Existe un único número complejo $1 = (1,0)$, tal que $\forall z \in \mathbb{C}$: $z \cdot 1 = z$.
4. $\forall z = (x,y) \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, existe un único número complejo z^{-1}, tal que $zz^{-1} = 1$. En este caso
$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$
5. $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

Prueba.

1. Si $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$, por definición
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \tag{1}$$
y
$$z_2 \cdot z_1 = (x_2, y_2) \cdot (x_1, y_1) = (x_2 x_1 - y_2 y_1, x_2 y_1 + x_1 y_2). \tag{2}$$
Comparando (1) y (2) vemos que $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

2. Sean $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ y $z_3 = (x_3, y_3)$ Entonces

$$\begin{aligned}
(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \cdot (x_3y_3) \\
&= ((x_1x_2 - y_1y_2)x_3 - (x_1y_2 + x_2y_1)y_3, \\
&\quad (x_1x_2 - y_1y_2)y_3 + (x_1y_2 + x_2y_1)x_3) \\
&= (x_1x_2x_3 - y_1y_2x_3 - x_1y_2y_3 - x_2y_1y_3, \\
&\quad x_1x_2y_3 - y_1y_2y_3 + x_1y_2x_3 + x_2y_1x_3)
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) &= (x_1, y_1) \cdot (x_2x_3 - y_2y_3, x_2y_3 + x_3y_2) \\
&= ((x_1(x_2x_3 - y_2y_3) - y_1(x_2y_3 + x_3y_2), \\
&\quad x_1(x_2y_3 + x_3y_2) + y_1(x_2x_3 - y_2y_3)) \\
&= (x_1x_2x_3 - x_1y_2y_3 - y_1x_2y_3 - y_1x_3y_2, \\
&\quad x_1x_2y_3 - x_1x_3y_2 + y_1x_2x_3 + y_1y_2y_3).
\end{aligned}$$

Comparando vemos que $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.

3. Es claro que si $1 = (1, 0)$, entonces para cualquier $z \in \mathbb{C}$ se cumple que $z \cdot 1 = z$. Por otro lado, si hubiera otro número complejo w tal que $z \cdot w = z$ para todo número complejo z, entonces

$$w = 1 \cdot w = w \cdot 1 = 1,$$

lo que prueba la unicidad.

4. *Existencia.* Si $z = (x, y)$ es un número complejo distinto de 0, supongamos que $z^{-1} = (a, b)$. Entonces, al condición $z \cdot z^{-1} = 1$ implica que

$$(xa - yb, xb + ya) = (1, 0).$$

Lo que equivale al sistema de ecuaciones en las incógnitas a y b,

$$\begin{cases} xa - yb = 1 \\ xb + ya = 0. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, recordando que $x^2 + y^2 \neq 0$, resulta que $b = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$ y $a = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$. Por lo tanto

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

Unicidad. Supongamos que el número complejo w es tal que $z \cdot w = 1$, entonces

$$w = w \cdot 1 = w \cdot \left(z \cdot z^{-1} \right) = (w \cdot z) \cdot z^{-1} = 1 \cdot z^{-1} = z^{-1},$$

lo que prueba la unicidad.

5. Sean $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2)$ y $z_3 = (x_3, y_3)$ Entonces

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot (z_2 + z_3) &= (x_1y_1) \cdot (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\
&= (x_1(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + y_3), x_1(y_2 + xy_3) + y_1(x_2 + x_3)) \\
&= (x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3, x_1y_2 + x_1y_3 + y_1x_2 + y_1x_3).
\end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 &= (x_1, y_1) \cdot (x_2 y_2) + (x_1 y_1) \cdot (x_3, y_3) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) + (x_1x_3 - y_1y_3, x_1y_3 + x_3y_1) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2 + x_1x_3 - y_1y_3, x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1). \end{aligned}$$

Comparando vemos que $(z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$. ■

La adición y multiplicación de números complejos permiten definir las operaciones de sustración, división y potenciación e $\mathbb{C}$

[Sustracción en $\mathbb{C}$] Si z_1 y $z_2 \in \mathbb{C}$, se define la diferencia de z_1 y z_2 como el número complejo z, tal que:

$$z = z_1 + (-z_2) = z_1 - z_2$$

[División en $\mathbb{C}$] Si z_1 y $z_2 \in \mathbb{C}$, con $z_2 \neq 0$, se define el cociente de z_1 y z_2, como el número complejo z, tal que

$$z = z_1 z_2^{-1} = \frac{z_1}{z_2}$$

[Potenciación en $\mathbb{C}$] Si $z \in \mathbb{C}$, se define

$$\begin{aligned} z^0 &= 1 \\ z^1 &= z \\ &\vdots \\ z^n &= z^{n-1}z,\ n \geq 2. \end{aligned}$$

Cuando $z \neq 0$ y el exponente es entero negativo, definimos

$$z^{-n} = (z^{-1})^n, n \in \mathbb{N}^+.$$

Observemos que la unidad imaginaria tiene las siguientes propiedades.

Para todo $n \in \mathbb{N}^+$ se cumple

$$\begin{aligned} i^{4n} &= 1, \\ i^{4n+1} &= i, \\ i^{4n+2} &= -1, \\ i^{4n+3} &= -i. \end{aligned}$$

Según el teorema tenemos que $i^2 = -1, i^3 = -i$ y $i^4 = 1$.

REPRESENTACIóN BINÓMICA DE UN NÚMERO COMPLEJO

Es posible establecer una correspondencia uno-uno entre los números reales y un cierto subconjunto de los números complejos de modo que las operaciones de adición y multiplicación se preserven. Con este fin y recordando que todo número real puro es un punto del eje real, identificaremos al número $z = (x, 0)$ con el número real $\mathrm{Re}(z) = x$ y recíprocamente, al número real x con el número complejo $z = (x, 0)$; esto es,

$$z = (x, 0) \longleftrightarrow x.$$

lo que significa que el número complejo $z = (x, 0)$ se identifica con el número real x.

Entonces, dados los números reales x_1 y x_2 se tiene que

$$x_1 \longleftrightarrow (x_1, 0) \quad \text{y} \quad x_2 \longleftrightarrow (x_2, 0);$$

luego, como

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$$

y

$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$$

resulta que

$$x_1 + x_2 \longleftrightarrow (x_1 + x_2, 0)$$

y

$$x_1 x_2 \longleftrightarrow (x_1 x_2, 0).$$

Es decir, las sumas y productos de los números (complejos) reales puros respetan la misma regla de correspondencia que las sumas y productos de los números reales correspondientes.

Además, si un número complejo $z = (x, y)$ se multiplica por el número real r, esto es, por el número complejo $(r, 0)$, se tiene

$$rz = (r, 0) \cdot (x, y) = (rx - 0y, ry + 0x) = (rx, ry).$$

En consecuencia, dado un número complejo $z = (x, y)$ podemos escribir

$$z = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y\,(0, 1) = x + yi.$$

A esta última expresión se le llama *forma binómica* del número complejo z.

De lo anterior, $z_1 = (x_1 + y_1) = x_1 + y_1 i$ y $z_2 = (x_2 + y_2) = x_2 + y_2 i$, entonces

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i. \end{aligned}$$

Formalmente, este resultado se obtiene al efectuar la multiplicación de los binomios $x_1 + y_1 i$ y $x_2 + y_2 i$, procediendo como en el caso de la multiplicación de números reales, es decir, usando las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva, tal como se muestra continuación:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) \\ &= x_1 x_2 + x_1 y_2 i + x_2 y_1 i + y_1 y_2 i^2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i \end{aligned}$$

Si $z_1 = (3, -2)$ y $z_2 = (-4, 5)$, hallar $z_1 z_2$

Solución. Usando la forma binómica: $z_1 = 3 - 2i$ y $z_2 = -4 + 5i$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (3 - 2i)(-4 + 5i) \\ &= -12 + 15i + 8i - 10i^2 \\ &= -12 + 23i + 10 = -2 + 23i \end{aligned}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS 4.2.

1. Si $z_1 = 4 + 3i$, $z_2 = 3 - 2i$, y $z_3 = 1 + 5i$, hallar

   (a) $z_1 + z_2 + z_3$,

   (b) $z_2 - z_1$,

   (c) $z_1 z_2$,

   (d) $z_1 z_3$,

   (e) $z_1(z_2 + z_3)$,

   (f) $z_1 z_2 + z_1 z_3$,

   (g) z_1^2,

   (h) z_2^3,

   (i) $(z_1 + z_2)^2$,

   (j) $z_1^2 + 2z_1 z_2 + z_2^2$,

   (k) z_3^{-1},

   (l) $\dfrac{(z_1 + z_2)}{z_3}$,

   (m) $\dfrac{1}{z_1}(z_2 + z_3)$,

   (n) $\dfrac{1}{z_2}(z_1 - z_3)$.

2. Hallar los números reales x e y tales que: $(2 - i)x + (4 - 3i)y = 5 - 2i$.

3. Resolver los sistema de ecuaciones

   (a) $\begin{cases} (3 - i)x + (4 + 2i)y = 2 + 6i \\ (4 + 2i)x - (2 + 3i)y = 5 + 4i \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x + yi - 2z = 10 \\ x - y + 2iz = 20 \\ ix + 3iy - (1 + i)z = 30 \end{cases}$

4. Hallar los números complejos: $z = a + bi$ y $w = c + di$, tales que su suma sea 6 y su producto sea 13.

4.3 Conjugado, módulo y argumento de un número complejo

Si $z = x + yi$ es un número complejo, su conjugado, representado por $\overline{z}$, es el número complejo definido por $\overline{z} = (x, -y)$. Es decir,

$$z = x + yi \Leftrightarrow \overline{z} = x - yi$$

Observe que z y $\overline{z}$ son simétricos respecto del eje real.

$$Graf.$$

Para todo $z, w \in \mathbb{C}$,

1. $\overline{\overline{z}} = z$.

2. $\overline{(z \pm w)} = \overline{z} \pm \overline{w}$.

3. $\overline{(z \cdot w)} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

4. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}, w \neq 0$.

5. $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$.

6. $z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$.

7. z es real $\Leftrightarrow \overline{z} = z$.

8. z es imaginario $\Leftrightarrow \overline{z} = -z$.

Prueba.

($\Rightarrow$) Supongamos que z es real, entonces $z = (x, 0)$ y

$$\overline{z} = (x, 0) = z.$$

($\Leftarrow$) Supongamos que para $z = (x, y)$ se tiene que $\overline{z} = z$, entonces

$$(x, -y) = (x, y) \Rightarrow -y = y \Rightarrow y = 0.$$

Por tanto $z = (x, 0)$, es decir z es real. ■

Si $z = (x + y)$ es un número complejo, su módulo, representado por $|z|$, es el número real no negativo dado por

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Si $z = 3 - 4i$, entonces

$$|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5.$$

Para todo z, $w \in \mathbb{C}$:

1. $|z| \geq 0$.

2. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

3. $|-z| = |z| = |\overline{z}|$.

4. $|zw| = |z|\,|w|$.

5. $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$, $w \neq 0$.

6. $|z|^2 = z\overline{z}$.

7. $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$ y $\operatorname{Im}(z) \leq |z|$.

8. $|z \pm w|^2 = |z|^2 \pm 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2$.

9. $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Prueba. Por la propiedad 6, podemos escribir

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 &= (z+w)\cdot\overline{(z+w)} \\
&= (z+w)\cdot(\overline{z}+\overline{w}) \\
&= z\overline{z}+z\overline{w}+w\overline{z}+w\overline{w} \\
&= |z|^2+z\overline{w}+w\overline{z}+|w|^2
\end{aligned}$$

Como $w\overline{z}=\overline{\overline{w}z}$, entonces

$$z\overline{w}+w\overline{z}=z\overline{w}+\overline{z\overline{w}}=2\mathrm{Re}(z\overline{w}).$$

Por lo tanto, en (1) resulta

$$|z+w|^2=|z|^2+2\mathrm{Re}(z\overline{w})+|w|^2.$$ ■

1. $\left|(3+4i)(1-\sqrt{3}i)\right|=|3+4i|\left|1-\sqrt{3}i\right|=(5)(2)=10.$
2. $\left|\dfrac{(-1-i)(\sqrt{3}+\sqrt{13}i)}{8-6i}\right|=\dfrac{|-1-i|\left|\sqrt{3}+\sqrt{13}i\right|}{|8-6i|}=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}.$ ■

Hallar el lugar geométrico de los puntos que representan a los números complejos z que satisfacen a la desigualdad

$$|z-1-i|=1.$$

Solución. Sea $z=x+yi$, entonces

$$|z-1-i|=|(x-1)+(y-1)i|=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
|z-1-i| &= \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} \\
&\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=1.
\end{aligned}$$

Por tanto, el lugar geométrico es la circunferencia de centro en (1,1) y de radio 1.

Graf.

El argumento del número complejo z, representado por $\arg(z)$, es la medida del ángulo formado por el eje real y el radio vector z, descrito en sentido antihorario a partir del eje real.

Graf.

De la definición y la figura, si $z=x+yi$ tenemos,

$$\arg(z)=\theta\Leftrightarrow\theta=\begin{cases}\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) & \text{si } x\neq 0\\[2ex] \dfrac{\pi}{2}+2n\pi, n\in\mathbb{Z} & \text{si } x=0 \text{ e } y\geq 0\\[2ex] \dfrac{3\pi}{2}+2n\pi, n\in\mathbb{Z} & \text{si } x=0 \text{ e } y<0\end{cases}$$

Como puede verse, hay infinitos valores para el argumento de un número complejo. En adelante, aquél valor del argumento en el intervalo $[0, 2\pi[$ diremos que θ es el valor principal del argumento de z.

EJERCICIOS PROPUESTOS 4.3.

1. Si $z_1 = 4 + 3i, z_2 = 3 - 2i$, y $z_3 = 1 + 5i$, hallar
   (a) $z_1 + z_2 + \overline{z_3}$,
   (b) $\overline{z_2} - z_1$,
   (c) $\overline{z_1} z_2$,
   (d) $\dfrac{1}{z_1}(z_2 + \overline{z_3})$,
   (e) $\dfrac{1}{z_2}(z_1 + \overline{z_3})$.
2. Hallar los números complejos que son conjugados
   (a) Con su cuadrado.
   (b) Con su cubo.
3. Identificar el lugar geométrico representado por cada una de las siguientes ecuaciones:
   (a) $z\overline{z} = 16$,
   (b) $z + \overline{z} = 14$,
   (c) $\overline{z} = z + 6i$,
   (d) $z\overline{z} - 2z - 2\overline{z} = 3$,
   (e) $|z - 2 + i| = 2, 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 2$.
4. Demostrar que todo número complejo z, distinto de -1 y cuyo módulo es igual a 1, puede expresarse en la forma
   $$z\frac{1+ti}{1-ti},$$
   donde t es un número real.
5. $\forall z_1,\, z_2 \in \mathbb{C}$, demostrar las identidades
   (a) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$,
   (b) $|1 - \overline{z_1} z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$.
6. Señalar dónde se encuentran los puntos que representan los números complejos z para los cuales:
   (a) $\arg z = \dfrac{\pi}{4}$,
   (b) $\dfrac{\pi}{3} < \arg z < \dfrac{2\pi}{3}$, $|z| = 2$,
   (c) $\arg z = \pi$, $|z| < 1$,
   (d) $|z - i| = 1$, $\arg z = \dfrac{\pi}{2}$.

7. (a) Determinar el argumento del número complejo z, sabiendo que

$$z(-1+i) = -\overline{z}(1+i),\ z \neq 0.$$

   (b) Hallar todos los números complejos que son conjugados con su cubo.

   (c) Sea $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$. Pruebe que

$$\left|\frac{1-z}{1+z}\right| = \alpha$$

   representa a una circunferencia.

4.4 Forma polar y forma exponencial de un número complejo

Dado el número complejo $z = x + yi$, supongamos que

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

y

$$\theta = \arg(z).$$

$$Graf.$$

Entonces

$$x = r\cos\theta \quad \wedge \quad y = r\sin\theta$$

y

$$z = r\cos\theta + ri\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

A esta expresión se la llamaremos *forma polar* de z.

Si representamos por $e^{i\theta}x\cos\theta + i\sin\theta$, es decir

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

tenemos

$$z = re^{i\theta}.$$

A esta expresión la llamaremos *forma exponencial* de z.

1. Para el número complejo real puro 1, tenemos $z = 1$ y $\theta = \arctan\left(\dfrac{0}{1}\right) = 0$. Entonces, la forma polar de z es

$$1 = 1(\cos 0 + i\sin 0).$$

2. Para el número complejo real puro -1, $r = 1$ y como el radio vector de -1 cae en la parte negativa del eje real, $\theta = \arctan\left(\dfrac{0}{-1}\right) = \pi$. Entonces, la forma polar es

$$-1 = (\cos\pi + i\sin\pi),$$

   y su forma exponencial es

$$-1 = e^{\pi i}.$$

3. Para el número complejo imaginario puro i, tenemos $r = 1$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$, luego la forma polar de i es
$$i = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right),$$
y su forma exponencial es
$$i = e^{\frac{\pi i}{2}}.$$

4. Para $\sqrt{3} + i$, $r = 2$ y $\theta = \arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}$, por lo que la forma polar es
$$\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
y su forma exponencial es
$$\sqrt{3} + i = 2e^{\frac{\pi i}{6}}.$$

5. Si $z = 5(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$, entonces la forma binómica de z es $z = \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}i$. ■

Si los números complejos z_1 y z_2 tienen formas polares
$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$
y
$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2),$$
entonces

1. $z_1 \cdot z_2 = r_1r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$, y
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$, cuando $z_2 \neq 0$.

Prueba.

1.
$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) \\ &= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)] \\ &= r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned}$$

2. Notando que
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{|z_2|^2}$$
y como
$$\overline{z}_2 = r_2(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2) = r_2(\cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2)).$$
Entonces,
$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1r_2(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))}{r_2^2} \\ &= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)). \end{aligned}$$

■

El resultado anterior puede ser expresado usando la forma exponencial, es decir, si $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, entonces

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

y

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}, \quad \text{cuando} \quad z_2 \neq 0.$$

Estos resultados indican que el producto de dos números complejos es otro número complejo, cuyo módulo es igual al producto de sus módulos y cuyo argumento es igual a la suma de sus argumentos. Del mismo modo, el cociente de dos números complejos es otro número complejo, cuyo módulo es igual al cociente de sus módulos y cuyo argumento es igual a la diferencia de sus argumentos.

Si $z = 8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ y $w = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, entonces

$$\begin{aligned}
zw &= 16\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right)\\
&= 16\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\\
&= 16i.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{z}{w} &= 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\right)\\
&= 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\\
&= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\\
&= 2\sqrt{3} + 2i,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{w}{z} &= \frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{6}\right)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Calcular

$$z = \frac{(1-i\sqrt{3})(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{2(1-i)(\cos\varphi - i\sin\varphi)}.$$

Solución. Desarrollando en forma polar, se tiene

$$1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

Recordando que $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ y que $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$, se tiene

$$\begin{aligned} z &= \frac{2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3} + \varphi\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3} + \varphi\right)\right)}{\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4} - \varphi\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4} - \varphi\right)\right)} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(2\varphi - \frac{\pi}{12}\right)\right). \end{aligned}$$

[Teorema de De Moivre] Dado el número complejo z en su forma polar

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

entonces

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta), n \in \mathbb{N}^+.$$

Calcular $(1+i)^{25}$

Solución. Desarrollando en forma polar

$$\begin{aligned} 1 + i &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ (1+i)^{25} &= \left(\sqrt{2}\right)^{25}\left(\cos 25\frac{\pi}{4} + i\sin 25\frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Como el período de las funciones seno y coseno es 2π, se tiene que

$$\cos\left(25\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(25\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} (1+i)^{25} &= 2^{-\frac{25}{2}}\left(2^{-\frac{1}{2}} + i2^{-\frac{1}{2}}\right) \\ &= 2^{12}(1+i). \end{aligned}$$

Calcular $\left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{-1 + i}\right)^{20}$.

Solución. Como en el ejercicio anterior,

$$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$

entonces

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i}\right)^{20} &= \left[\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}\right]^{20}\\
&= \left[\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right)\right]^{20}\\
&= 2^{10}\left[\cos\left(-\frac{100\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{100\pi}{12}\right)\right]\\
&= 2^{10}\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)\\
&= 2^{10}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&= 2^{9}\left(1-\sqrt{3}i\right).
\end{aligned}$$

■

Si $z=-2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

(a) ?‘ Es cierto que $\arg(z)=\dfrac{\pi}{3}$? Justifique.

(b) Hallar el argumento de z^2

Solución.

1. Sabemos que el módulo de un número complejo es un número real no negativo, por lo que

$$\begin{aligned}
z &= 2(-1)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\\
&= 2(\cos\pi+i\sin\pi)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\\
&= 2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right),
\end{aligned}$$

de donde, $\arg(z)=\dfrac{4\pi}{3}$, en consecuencia la afirmación es falsa.

2. Por el teorema de De Moivre

$$z^2=4\left(\cos\frac{8\pi}{3}+i\sin\frac{8\pi}{3}\right),$$

pero $\frac{8\pi}{3}$ no el valor principal del argumento de z^2, sin embargo

$$\begin{aligned}
z^2 &= 4\left[\cos\left(2\pi+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(2\pi\frac{2\pi}{3}\right)\right]\\
&= 4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}\right).
\end{aligned}$$

Por lo que $\arg(z^2)=\dfrac{2\pi}{3}$. ■

4.5 Radicación en $\mathbb{C}$

Dado el número complejo z y $n \in \mathbb{N}^+$ dicimos que el número complejo w es una raíz enésima de z, si $w^n = z$.

Cuando w es una raíz n-ésima de z escribimos $w = \sqrt[n]{z}$.

1. $\sqrt[n]{0} = 0$.
2. Si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ es diferente de cero, entonces

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right),$$

donde $k = 0, 1, \ldots, n-1$, son las raíces n-ésimas de z.

Prueba.

1. Es inmediata.
2. Supongamos $w = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ una raíz n-ésima de z, entonces, $w^n = z$. Luego

$$\rho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

de donde

$$\rho^n = r \wedge \cos\theta \wedge \sin n\alpha = \sin\theta.$$

De éstas ecuaciones hallamos que

$$\rho = \sqrt[n]{r}$$

y

$$n\alpha = \theta + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

La fórmula anterior, en principio dice que, existe un número no finito de raíces, sin embargo se puede ver que sólo n de ellas son diferentes y son las raíces correspondientes a $k = 0, 1, \cdots, n-1$. Por esta razón,en lo que sigue, cuando calculemos las raíces $n-$ésimas del número complejo z, consideraremos

$$w_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + isen\frac{\theta + 2k\pi}{n}),\ k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Es decir,

$$\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\theta}{n} + isen\frac{\theta}{n}) \\
w_1 &= \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\theta + 2\pi}{n} + isen\frac{\theta + 2\pi}{n}) \\
w_2 &= \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\theta + 4\pi}{n} + isen\frac{\theta + 4\pi}{n}) \\
&\vdots \\
w_{n-1} &= \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n} + isen\frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n})
\end{aligned}$$

Observe que todas las raíces tienen el mismo módulo $\rho = \sqrt[n]{r}$ y sus argumentos difieren en una constante $\dfrac{2\pi}{n}$, lo que nos permite representar dichas raíces en una circunferencia de radio ρ.

Un caso particular de radicación se presenta cuando $z = 1$. En este caso, $r = 1$, $\theta = 0$; obteniéndose

Las raíces $n-$ésimas de la unidad son

$$w_k = (\cos\frac{2k\pi}{n} + isen\frac{2k\pi}{n}),\ k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Observemos que

$$w_k = (\cos\frac{2\pi}{n} + isen\frac{2\pi}{n})^k,\ k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Como $w_1 = \cos\dfrac{2\pi}{n} + isen\dfrac{2\pi}{n}$

$$w_k = w_1^k,\ k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Calcular las siguientes raíces

(a) $\sqrt{-1}$ (b) $\sqrt[3]{1}$ (c) $\sqrt[3]{i}$ (d) $\sqrt[4]{2-2i}$

Solución.

(a) La forma polar de $z = -1$ es $z = \cos\pi + isen\pi$, por lo que sus raíces son

$$w_k = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{2} + isen\frac{\pi + 2k\pi}{2},\ k = 0, 1,$$

Es decir,

$$w_0 = \cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2} = i$$
$$w_1 = \cos\frac{3\pi}{2} + isen\frac{3\pi}{2} = -i$$

(b) Debemos hallar las raíces cúbicas de la unidad

$$w_0 = \cos 0 + isen0 = 1$$
$$w_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + isen\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$w_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + isen\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(c) Las raíces cúbicas de $z = i = \cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}$, son

$$w_k = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + isen\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3},\ k = 0, 1, 2$$

Desarrollando para cada valor de k, se tiene

$$w_0 = \cos\frac{\pi}{6} + isen\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$
$$w_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + isen\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$
$$w_2 = \cos\frac{9\pi}{6} + isen\frac{9\pi}{6} = -i$$

(d) Si $z = 2 - 2i$, entonces $r = 2\sqrt{2} = 2^{\frac{3}{2}}$ y $\theta = \dfrac{7\pi}{4}$

Las raíces cuartas de z, son

$$w_k = (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{4} + isen\frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{4},\ k = 0, 1, 2, 3$$

Desarrollando y simplificando, se tiene

$$\begin{aligned} w_0 &= 2^{\frac{3}{8}}\left(\cos\tfrac{7\pi}{16} + isen\tfrac{7\pi}{16}\right) \\ w_1 &= 2^{\frac{3}{8}}\left(\cos\tfrac{15\pi}{16} + isen\tfrac{15\pi}{16}\right) \\ w_2 &= 2^{\frac{3}{8}}\left(\cos\tfrac{23\pi}{16} + isen\tfrac{23\pi}{16}\right) \\ w_3 &= 2^{\frac{3}{8}}\left(\cos\tfrac{31\pi}{16} + isen\tfrac{31\pi}{16}\right) \end{aligned}$$

1. Expresar los siguientes números complejos en la forma polar

$(a)\ i$	$(f) \sqrt{3} - i$	$(k)\ 1 - i$
$(b)\ -1$	$(g)\ -\sqrt{3} - i$	$(l)\ \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}i}{4}$
$(c)\ -i$	$(h)\ 3 + 4i$	$(m) \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}i}{4}$
$(d)\ 4 + 4i$	$(i)\ 4 - 3i$	$(n)\ 1 - sen\alpha + i\cos\alpha\ (0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2})$
$(e)\ \sqrt{3} + i$	$(j)\ 3 - 4i$	$(o)\ \dfrac{1 + \cos\alpha + isen\alpha}{1 + \cos\alpha - isen\alpha},\ \ (0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2})$

2. Simplificar

$$\frac{(\sqrt{3} - i)(\cos\theta + isen\theta)}{2(1 + i)(\cos\theta - isen\theta)}$$

3. Calcular

$(a)\ (2 - 2i)^{15}$ $\qquad$ $(b)\ (\dfrac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i})^{20}$ $\qquad$ $(c)\ (4 - 3i)^{20}$

4. Expresar en forma binómica el resultado de

$$\frac{(1 + i)^n}{(1 - i)^{n-2}}$$

5. Resolver las siguientes ecuaciones en $\mathbf{C}$.

$(a)\ iz = 1$	$(b)\ z^2 = -1$	$(c)\ z^2 = i$
$(d)\ z^3 = 1$	$(e)\ z^3 = -1$	$(f)\ ((1 + i)z)^2 = 1$
$(g)\ z^2 + 2z + 2 = 0$	$(h)\ z^4 = 1$	$(i)\ z^4 = -1$

Capítulo 5

Sistema de Coordenadas Polares

En un sistema de coordenadas cartesianas planar ya establecido, según se indicó en el capítulo 3, cualquier punto del plano se identifica con un único par de coordenadas: abscisa y ordenada. Este par ordenado está dado por las distancias dirigidas medidas a partir del punto hacia los ejes de coordenadas.

Sin embargo, esta no es la única forma de nombrar puntos del plano. Existe un sistema de coordenadas, llamado sistema de coordenadas polares, en donde cada punto está determinado por una distancia dirigida a un punto fijo y un ángulo medido a partir de una semirrecta que pate del punto fijo.

Este sistema se usa en los casos en que las relaciones entre dos puntos son más fáciles de expresar en términos de distancias a un centro de coordenadas y de ángulos medidos a partir de una semirrecta. Esto ocurre por ejemplo al describir movimientos giratorios, movimientos pendulares, movimientos estelares, entre otros. El hallar las expresiones algebraicas de algunos lugares geométricos puede resultar mucho más simple si se emplea un sistema de coordenadas polares.

Se selecciona un punto del plano y se fija. Este punto se llamará *polo* y se denotará por O. Luego, se traza una semirrecta con origen en O a la que se denominará *eje polar.* Usualmente el eje polar es horizontal, se orienta hacia la derecha y corresponde al semieje positivo OX en el sistema de coordenadas cartesianas.

Figura 4.1 Elementos básicos del sistema de coordenadas polares

5.1 Coordenadas polares de un punto

A un punto cualquiera P del plano, se le asigna las *coordenadas polares* $(r;\theta)$ definidas del siguiente modo:

$r =$ distancia dirigida de O a P . Se llama *radio vector o radio polar de* P

$\theta =$ ángulo, medido en radianes, desde el eje polar hasta el segmento $\overline{OP}$, y en sentido antihorario. Se llama *ángulo polar de* P.

Si el radio polar r es positivo, el punto P está en el lado terminal del ángulo θ.

Si el radio polar r es negativo, el punto P está en la prolongación del lado terminal de θ.

Si $r = 0$, el punto P es el polo O y está representado por $(0;\theta)$ donde θ es un ángulo cualquiera.

Para simplificar, se empleará la notación $P(r;\theta)$ en lugar de $P = (r;\theta)$.

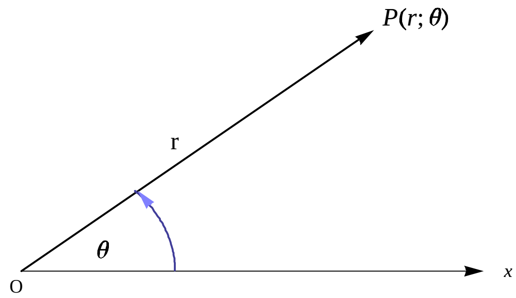


Figura 4.2 Coordenadas polares de un punto

Para facilitar la localización de un punto en coordenadas polares conviene usar una red de circunferencias con centro en el polo y cortadas por semirrectas cuyo origen es el polo.

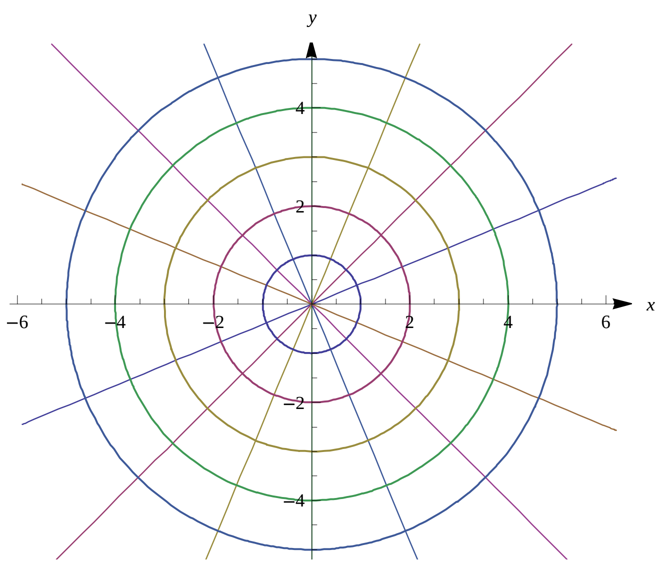


Figura 4.3 Plano polar y semirectas

Ejemplo 5.1 *Graficar los siguientes puntos en un sistema de coordenadas polares.*

a) $(3;\ 2\pi/3)$ b) $(1;\ -5\pi/4)$

c) $(4;\ \pi/6)$ d) $(4;\ 13\ \pi/6)$ e) $(-4;\ 7\pi/6)$

Solución

a) Trazamos un ángulo de $2\pi/3$, con vértice en el polo, con lado inicial en el eje polar y medido en sentido antihorario. Luego, en el lado terminal del ángulo medimos, a partir del polo, una distancia de 3 unidades.

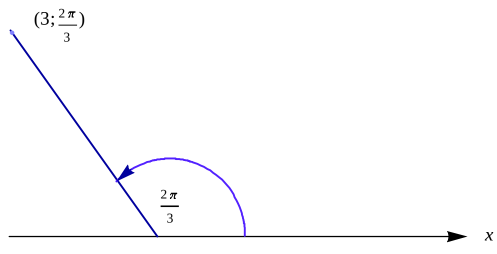


Figura 4.4 Coordenadas polares de $(3;2\pi/3)$

b) En este caso, como el ángulo polar es negativo, medimos el ángulo $5\pi/4$ a partir del eje polar pero en sentido horario .

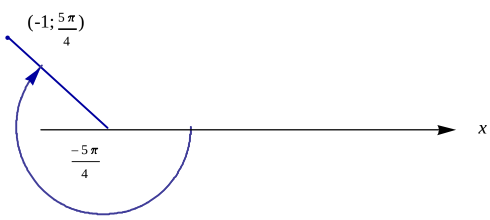


Figura 4.5 Coordenadas polares de $(1;-5\pi/4)$

c) Procedemos en forma similar a la parte a)

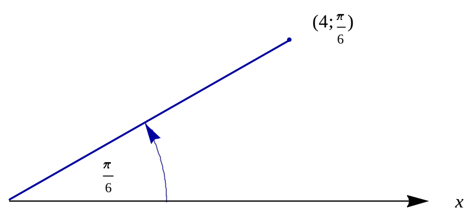


Figura 4.6 Coordenadas polares de $(4;\pi/6)$

d) El ángulo es $\theta = 2\pi + \pi/6$

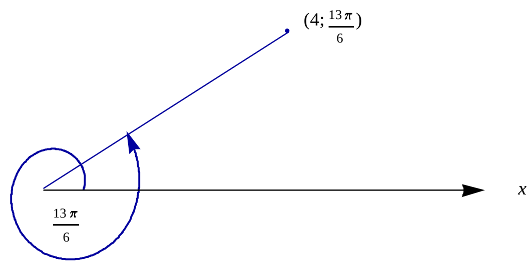


Figura 4.7 Coordenadas polares de $(4; 13\pi/6)$

e) Como el radio polar es negativo, medimos, en la prolongación del lado terminal del ängulo y a partir del polo, una distancia de 4 unidades.

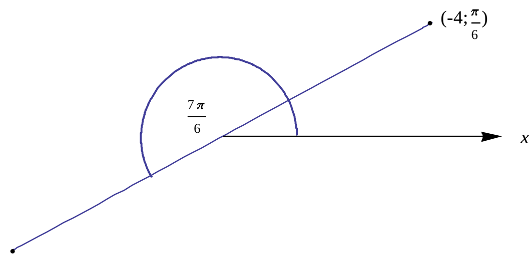


Figura 4.8 Coordenadas polares de $(-4; 7\pi/6)$

Observemos que las coordenadas polares dadas en c), d) y e) representan al mismo punto. Es decir, el punto $P(4; \pi/6)$ puede expresarse también por las coordenadas $(-4; 7\pi/6)$ ó $(4; -11\pi/6)$. Cualquiera de estos ángulos se pueden incrementar o disminuir en un múltiplo de 2π y así obtener el mismo punto.

Así, observamos que a diferencia de lo que ocurre en coordenadas cartesianas, a un punto del plano se le puede asignar más de un par de coordenadas polares.

Propiedad

Si las coordenadas polares de un punto son $(r; \theta)$, *entonces todas las cordenadas polares del mismo son:*

$$((-1)^n r;\ \theta + n\pi)\ ;\ n \in Z$$

Cuando para un punto P se restrinjan los valores del par $(r; \theta)$ de modo que $r > 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$, se hará referencia al *par principal* de coordenadas polares del punto.

5.2 Relaciones entre las coordenadas polares y las coordenadas cartesianas

Se hace coincidir el polo con el origen de un sistema de coordenadas cartesianas, y el eje polar con el semieje de abscisas positivas, como se muestra en la siguiente figura.

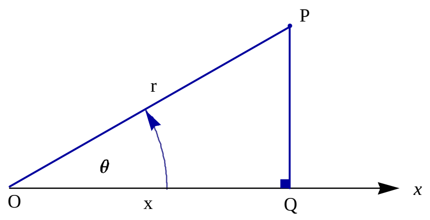


Figura 4.9 Coordenadas polares y cartesianas de un punto

Consideremos las coordenadas polares $(r;\theta)$ de un punto P cuyas coordenadas cartesianas son $(x;y)$. Como se observa en la figura, las propiedades geométricas del triángulo rectángulo OQP muestran que:

$$x = r\cos\theta \qquad y = rsen\theta \qquad (1)$$

Empleando propiedades trigonométricas elementales, se verifica que estas fórmulas son válidas para un punto P ubicado en cualquier lugar del plano.

Por otro lado, dadas las coordenadas cartesianas $(x;y)$, aplicando el teorema de Pitágoras y luego la definición de la función tangente, obtenemos r y θ :

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \theta = arc\tan(\frac{y}{x}), \text{ siempre que } x \neq 0 \qquad (2)$$

Propiedad

Cada par principal $(r;\theta)$, excepto el polo, se identifica con un único punto del plano $(x;y)$.

También se verifica que a cada punto del plano $(x;y)$, excepto al origen, le corresponde un único par principal $(r;\theta)$.

En lo que sigue consideraremos a los puntos del plano $(x;y)$ y sus distintas representaciones en coordenadas polares $(r;\theta)$.

Ejemplo 5.2 *Expresar el punto* $(3;2\pi/3)$ *en coordenadas cartesianas.*

Solución
Aplicamos las ecuaciones (1):

$$x = 3\cos(2\pi/3) = 3(-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$$

$$y = 3sen(2\pi/3) = 3(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Y obtenemos que las coordenadas cartesianas del punto son $(-\frac{3}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2})$.

Ejemplo 5.3 *Expresar el punto* $(1; -5)$ *en coordenadas polares.*

Solución
Aplicamos las ecuaciones (2):

$$r = \sqrt{1^2 + (-5)^2} = \sqrt{26}, \quad \tan\theta = \frac{-5}{1} = -5$$

Como el punto está en el cuarto cuadrante, $\theta = arc\ \tan(-5) = 1,56\ \pi$
Así, unas coordenadas polares del punto $(1; -5)$ son $(\sqrt{26}; 1,56\ \pi\ )$.

Ejemplo 5.4 *Obtener la ecuación cartesiana de* $r = 2\sec^2(\frac{\theta}{2})$ *e identificar la curva.*

Solución
Escribimos la ecuación dada en la forma

$$r\cos^2(\frac{\theta}{2}) = 2$$

$$r(\frac{1+\cos\theta}{2}) = 2$$

$$r + r\cos\theta = 4$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 4 - x$$

Elevamos al cuadrado, desarrollamos y simplificamos

$$y^2 = -8(x-2)$$

La ecuación dada corresponde a una parábola, curva que fue estudiada en el capítulo anterior.

Ejemplo 5.5 *Expresar la ecuación* $r = 4\ sen(2\theta)\ \cos\theta$ *en coordenadas cartesianas.*

Solución
Multiplicamos la ecuación dada por r^3, después agrupamos los términos en forma conveniente

$$r^4 = 8(rsen\theta)(r\cos\theta)^2$$

y usando las ecuaciones (2), obtenemos:

$$(x^2 + y^2)^2 = 8x^2 y$$

Ejemplo 5.6 *Transformar la ecuación* $(x^2 + y^2)^{5/2} = 3\ x^4 + 3\ y^4 - 18\ x^2y^2$ *en una ecuación en coordenadas polares.*

Solución

Reemplazamos $x^2 + y^2 = r^2$, $x = r\ \cos\theta$, $y = r\ sen\theta$ y obtenemos:

$$r^5 = 3r^4 \cos^4\theta + 3r^4 sen^4\theta - 18r^4 \cos^2\theta sen^2\theta$$

Factorizamos r^4:

$$r^4 = 0 \ \text{ ó } \ r = 3(\cos^4\theta + sen^4\theta) - 18\cos^2\theta sen^2\theta.$$

Usamos la identidad $(\cos^2\theta + sen^2\theta)^2 = 1^2$ y obtenemos:

$$r = 0 \quad \text{ó} \quad r = 3(1 - 2\cos^2\theta sen^2\theta) \quad - 18\cos^2\theta sen^2\theta.$$

$$r = 0 \quad \textit{ó} \quad r = 3(1 - 8\cos^2\theta sen^2\theta)$$

$$r = 0 \quad \text{ó} \quad r = 3(1 - 2sen^2(2\theta))$$

Entonces,

$$r = 0 \quad \text{ó} \quad r = \ 3\cos(4\theta)$$

Pero no es necesario dar como respuesta las dos expresiones pues la solución $r = 0$ (el polo) está incluida en $r = 3\cos(4\theta)$.

Esto es cierto dado que existe un ángulo θ tal que $0 = 3\ cos(4\theta)$.

Por tanto, la ecuación dada en coordenadas polares es $r = 3\cos(4\theta)$.

Ejemplo 5.7 *Escribir la ecuación* $(x^2 + y^2)^2 = 2\ [(x^2 - y^2)x - 2\ xy^2\ ]$ *en coordenadas polares.*

Solución

Aplicamos las ecuaciones (1) y luego las identidades trigonométricas $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - sen^2\theta$ y $\cos(A + B) = \cos A\cos B - senA\ senB$, para obtener:

$$(r^2)^2 = 2\ r^3[(\cos^2\theta - sen^2\theta)\cos\theta - 2\cos\theta sen^2\theta]$$

Entonces,

$$r^3 = 0 \ \text{ ó } \quad r = 2[\cos(2\theta)\cos\theta - sen(2\theta)sen\theta]$$

$$r = 0 \ \text{ ó } \ r = 2\cos(3\theta)$$

Como se puede verificar que el polo también está incluido en la segunda ecuación, la ecuación de la curva en coordenadas polares será solamente:

$$r = 2\cos(3\theta)$$

5.3 Curvas cuyas ecuaciones están dadas en coordenadas polares

La *gráfica de una curva cuya ecuación polar es* $E(r;\theta) = 0$ consta de todos los puntos que tienen al menos una representación polar $(r;\theta)$ que satisface la ecuación dada.

Expresemos cada una de la siguientes ecuaciones polares en coordenadas cartesianas y luego identifiquemos la curva.

a) La ecuación: $\theta = \theta_0$ $(constante)$ y $r > 0$,

Corresponde a una *semirecta que pasa por el polo y forma un ángulo* θ_0 *con el eje polar.*

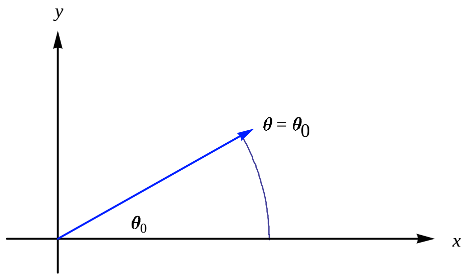


Figura 4.10 Semirectas

b)La ecuación $r = r_0$ $(constante)$ y $r_0 > 0$,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = |r_0|$$

$$x^2 + y^2 = r_0^2.$$

Corresponde a una *circunferencia de centro el polo y radio* r_0 .

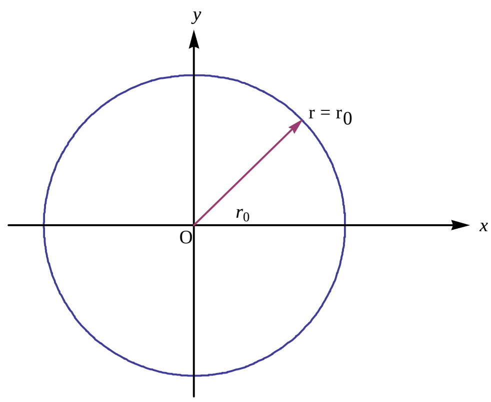


Figura 4.11 Circunferencias con centro en el origen

c)La ecuación:

$$r = a \ \cos\theta \quad (a \ constante)$$

$$r^2 = ar\cos\theta$$

$$x^2 + y^2 = ax$$

Completando cuadrados obtenemos:

$$(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$$

Luego, $r = a\ \cos\theta$ corresponde a una *circunferencia de centro* $(\frac{a}{2}; 0)$, radio $\frac{a}{2}$ y que pasa por el polo.

Análogamente, la ecuación

$$r = -a\ \cos\theta \quad (a\ constante)$$

se corresponde con

$$(x + \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$$

En ambos casos, se trata de circunferencias con centro en el eje x.

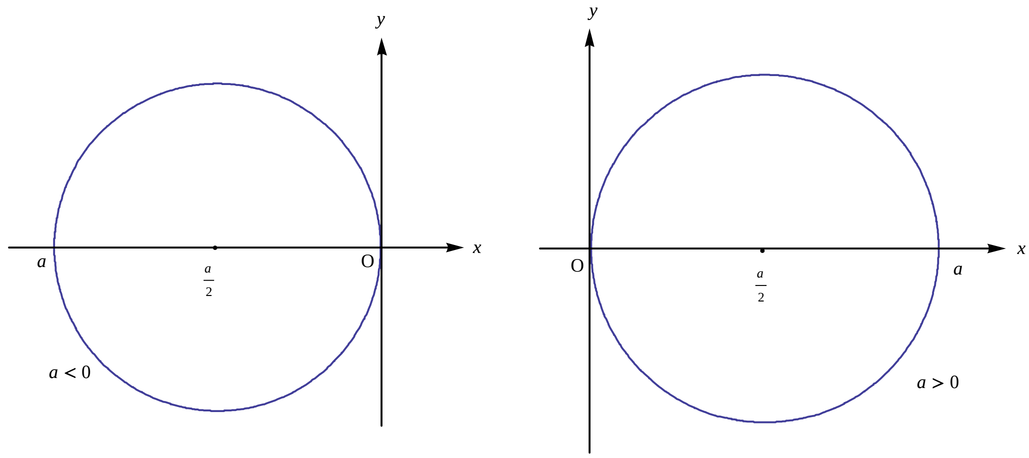


Figura 4.12 Circunferencias con centro en el eje x

d)La ecuación:

$$r = a\ sen\theta \quad (a\ constante)$$

Procediendo en forma similar a la parte c) obtenemos:

$$x^2 + (y - \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4}$$

Luego, $r = a\ sen\theta$ corresponde a una *circunferencia de centro* $(0; \frac{a}{2})$, radio $\frac{a}{2}$ y que pasa por el polo.

Análogamente, la ecuación

$$r = -a \ sen\theta \quad (a \ constante)$$

se corresponde con

$$x^2 + (y + \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4}$$

En ambos casos, se trata de circunferencias con centro en el eje y.

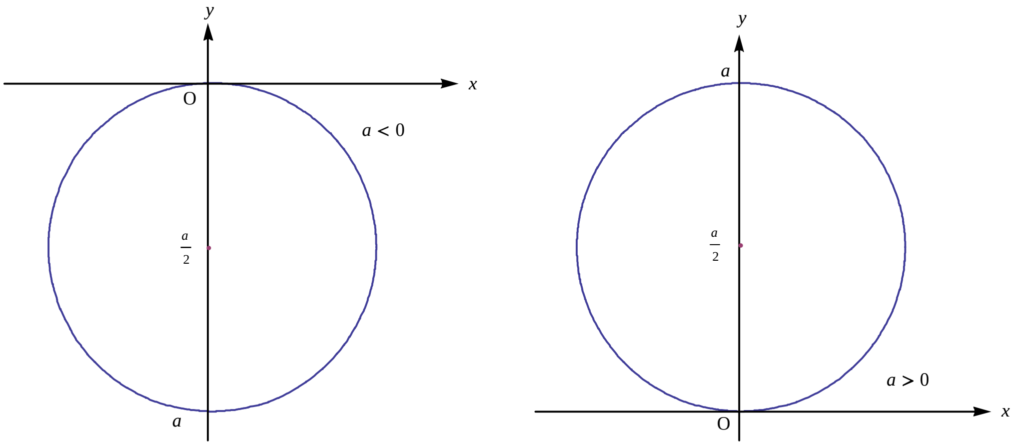


Figura 4.13 Circunferencias con centro en el eje y

5.3.1 Ecuaciones equivalentes

En el trazado de una curva cuya ecuacion está dada en coordenadas polares, se debe tener en cuenta que:

i) Un punto del plano tiene un número infinito de pares de coordenadas que lo representan. Puede suceder que uno de ellos satisfaga una ecuación dada, mientras que otra de sus representaciones no lo haga.

ii) Una curva puede estar representada, algunas veces, por más de una ecuación polar.

Por ejemplo, la circunferencia de centro el polo y radio a puede representarse por las ecuaciones $r = a$ ó $r = -a$.

Las ecuaciones polares que representan la misma curva o lugar geométrico se llaman *ecuaciones equivalentes.*

Anteriormente se ha visto que los pares de coordenadaas $(r; \theta)$ y $((-1)^n r; \ \theta + n\pi)$; $n \in Z$, representan el mismo punto.

Se puede verificar que las ecuaciones $E(r; \theta)$ y $E\left((-1)^n r; \ \theta + n\pi\right), n \in Z$ represnetan el mismo conjunto de puntos. Es decir, son *ecuaciones equivalentes;*son distintas formas de representar la misma curva.

Así, para hallar todas las ecuaciones equivalentes a una ecuación dada se debe realizar el siguiente cambio de variable:

r por $(-1)^n r$

θ por $\theta + n\pi$ para los posibles valores de $n \in Z$

Todas las ecuaciones diferentes a $E(r;\theta)$ que resulten de estos cambios, serán ecuaciones equivalentes a ella.

Ejemplo 5.8 *Hallar las ecuaciones equivalentes a* $r = 1 + \cos\theta$

Solución
En la ecuación dada reemplazamos $(r;\theta)$ por $((-1)^n\ r;\ \theta + n\pi)$; $n \in Z$,

$$(-1)^n r = 1 + \cos(\theta + n\pi)$$

Si n es un número par, $n = 2k$, $k \in Z$,

$$(-1)^{2k} r = 1 + \cos(\theta + 2k\pi)$$

$$r = 1 + \cos\theta$$

Si n es impar, $n = 2k+1$, $k \in Z$,

$$(-1)^{2k+1} r = 1 + \cos(\theta + (2k+1)\pi$$

$$-r \quad = 1 + \cos\theta\cos((2k+1)\pi) - sen\theta se(n(2k+1)\pi)$$

$$r = 1 - \cos\theta$$

Luego, la única ecuación equivalente a la ecuación dada es $r = -1 + \cos\theta$.

5.4 Gráfica de curvas con ecuaciones en coordenadas polares

Sea $\mathcal{C}$ una curva cuya ecuación en coordenadas polares es $E(r;\theta) = 0$.
Para trazar la gráfica de $E(r;\theta) = 0$, seguiremos el siguiente procedimiento:

1. Determinar si existe simetría de la curva respecto al eje polar, al eje $\pi/2$ y al polo.
2. Calcular los puntos de intersección de la curva con el eje polar, con el eje $\pi/2$ y con el polo.
3. Calcular las coordenadas de un número suficiente de puntos de la curva para obtener una gráfica adecuada.
4. Trazar la gráfica de la ecuación.

A continuación se detalla cómo realizar cada uno de los pasos del procedimiento descrito

para graficar una ecuaicón en coordenadas polares.
1) Simetrías
Simetría de $\mathcal{C}$ respecto al eje polar

La curva $\mathcal{C}$ es simétrica respecto al eje polar, si cada punto $P \in \mathcal{C}$ admite un punto $P' \in \mathcal{C}$ tal que el eje polar es perpendicular al segmento PP' y lo interseca en su punto medio M. En la figura observamos que los triángulos rectángulos OMP y OMP'son congruentes. De aquí se deduce que las coordenadas de P' son: $(r; -\theta)$ y $(-r; \pi - \theta)$.

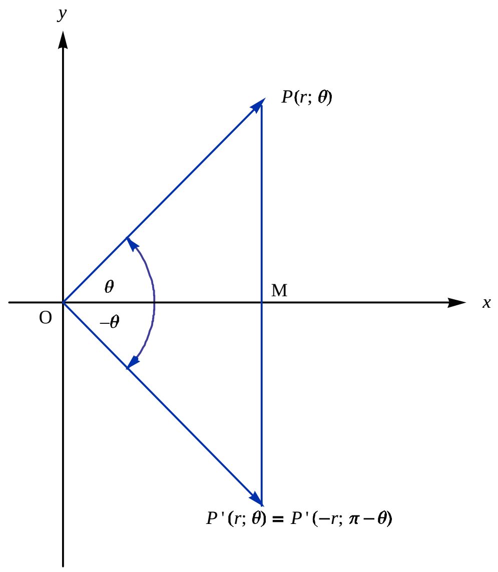


Figura 4.14 P y P' son simétricos respecto al eje polar

Por lo tanto, si para todo $P \in \mathcal{C}$ se cumple:

$P(r; \theta) \in \mathcal{C} \Longrightarrow P'(r; -\theta)$ ó $P'(-r; \pi - \theta) \in \mathcal{C}$, entonces la curva es simétrica al eje polar.

Simetría de $\mathcal{C}$ respecto al eje $\pi/2$

La curva $\mathcal{C}$ es simétrica respecto al eje $\pi/2$ (se considera al eje $\pi/2$ como la recta que pasa por el polo y coincide con el eje Y), si por cada punto $P \in \mathcal{C}$ existe un punto $P' \in \mathcal{C}$ tal que el eje $\pi/2$ es perpendicular al segmento $\overline{PP'}$ en su punto medio M_1.

En la siguiente figura vemos que los triángulos rectángulos OM_1P y OM_1P' son congruentes. Deducimos que las coordenadas de P' son: $(r; \pi - \theta)$ y $(-r; -\theta)$.

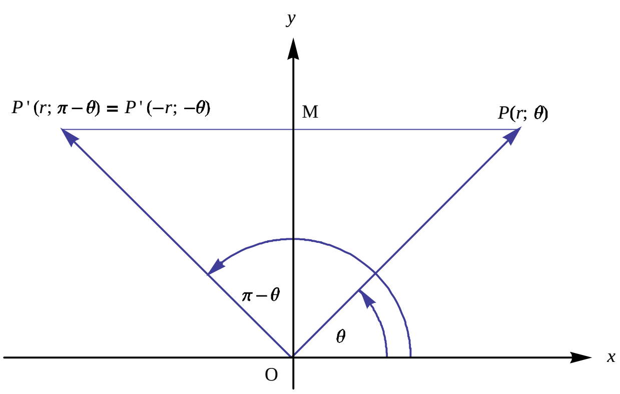


Figura 4.15 P y P' son simétricos respecto al eje $\pi/2$

Por lo tanto, si para todo $P \in \mathcal{C}$ se cumple:

$P(r;\theta) \in \mathcal{C} \Longrightarrow P'(r;\pi-\theta)$ ó $P'(-r;\,-\theta) \in \mathcal{C}$, entonces la curva es simétrica al eje $\pi/2$.

Simetría de $\mathcal{C}$ respecto al polo

La curva $\mathcal{C}$ es simétrica respecto al polo O si para cada punto $P \in \mathcal{C}$ se cumple el punto $P'(r;\,\pi+\theta)$ ó $P'(-r;\,\theta)$ también se encuentra en $\mathcal{C}$.

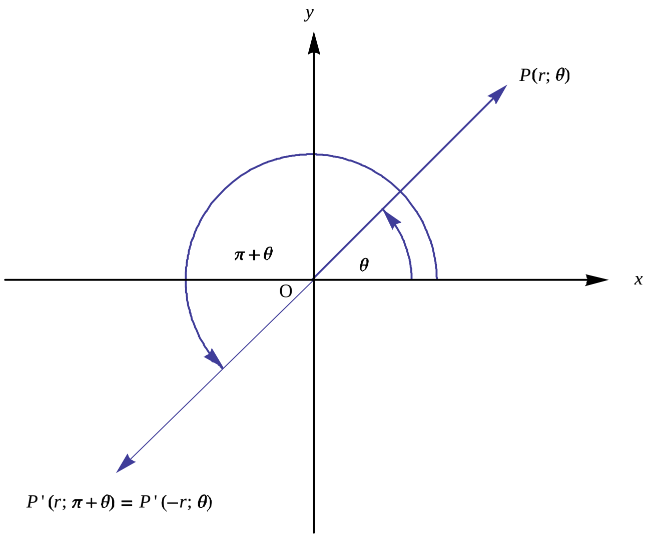


Figura 4.16 P y P$'$son simétricos respecto al polo

Criterios de simetría para curvas con ecuaciones en coordenadas polares

De lo visto anteriormente, se puede concluir que la gráfica C de una ecuación E $(r;\theta) = 0$ es simétrica respecto al eje polar, al eje $\pi/2$, al polo si al hacer algunas de las sustituciones indicadas en la segunda columna la ecuación $E\,(r;\theta) = 0$ no cambia.

Simetrías de C respecto al	*Reemplazar en* $E(r;\theta) = 0$
Eje polar	$(r;\theta)$ por $(r;-\theta)$ o $(-r;\,\pi-\theta)$
Eje $\pi/2$	$(r;\theta)$ por $(r;\,\pi-\theta)$ o $(-r;\,-\theta)$
Polo	$(r;\theta)$ por $(r;\,\pi+\theta)$ o $(-r;\,\theta)$

Nota: También es posible analizar la simetría haciendo uso de las ecuaciones equivalentes. Esto quiere decir que basta hacer los primeros reemplazos y luego comparar la ecuación resultante con la ecuación original y con las equivalentes. Si la nueva ecuación coincide con alguna de ellas, entonces hay simetría.

2) Intersecciones

Intersecciones de C con el eje polar

Esto implica hallar los valores de r cuando $\theta = n\pi$. Es decir,

$$E(r;\;n\pi) = 0 \;\text{ con }\; n \in Z$$

Intersecciones de C con el eje $\pi/2$

Esto implica hallar los valores que asume r cuando $\theta = (2n+1)\,\frac{\pi}{2}$. Es decir,

$$E(r;\;(2n+1)\frac{\pi}{2}) = 0 \text{ con } \quad n \in Z$$

Intersecciones de C con el polo

Esto implica determinar si existen valores de θ que satisfagan la ecuación cuando $r = 0$. Es decir,

$$E(0;\ \theta) = 0$$

3) Cálculo de algunos puntos de C

Asignando valores a θ se obtienen valores correspondientes a r. En esta etapa se debe usar la información que se haya obtenido sobre la simetría de la gráfica.

4) Trazado de la gráfica de la ecuación

Con toda la información anterior, se grafica la curva que satisface la ecuación

$$E(r;\ \theta) = 0$$

ubicando los puntos según varíe θ.

Ejemplo 5.9 *Graficar la ecuación* $r = 1 + 2\ \cos(3\theta)$.

Solución

Analizando simetrías**:**

Al reemplazar $(r;\, \theta)$ por $(r;\, -\theta)$ se obtiene

$$r = 1 + 2\cos(-3\theta) = 1 + 2\cos(3\theta).$$

La curva es simétrica respecto al eje polar.

Siguiendo un procedimeinto como en el caso anterior se obtiene que la curva no es simétrica respecto al eje $\pi/2$, ni al polo.

Analizando interceptos**:**

Si $\theta = 0$, $r = 3$; si $\theta = \pi$, $r = -1$ y si $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $r = 1$.

Intersecciones con el polo: $r = 0 \Longleftrightarrow \cos(3\theta) = -\dfrac{1}{2}$

$$3\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}, \ldots$$

$$\theta = \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}, \ldots$$

Luego, el polo pertenece a la gráfica de la ecuación.

Graficamos la curva usando los puntos obtenidos anteriormente.

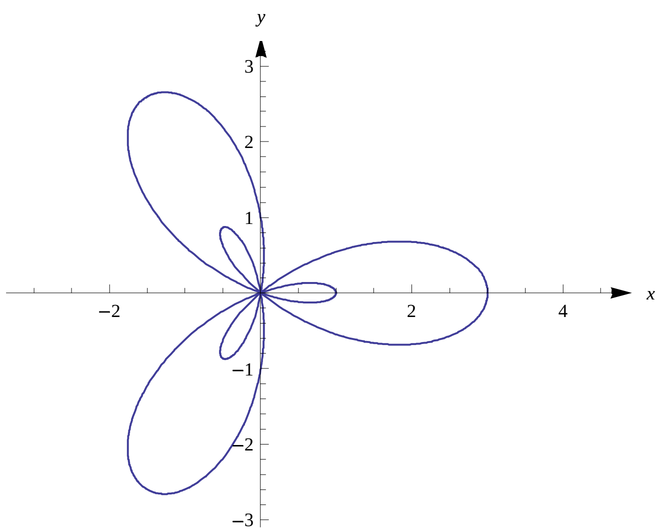


Figura 4.17 Gráfica de $r = 1 + 2\cos(3\theta)$

5.4.1 Gráfica de lugares geométricos importantes con ecuaciones en coordenadas polares

A continuación se presentarán algunas ecuaciones que corresponden a curvas polares usadas frecuentemente.

Caracoles

La ecuación polar de un caracol es de la forma:

$$r = a \pm b\cos\theta \;\; ó \;\; r = a \pm b sen\theta \;\; \text{con } a > 0 \text{ y } \; b > 0$$

La forma de la curva depende de las medidas relativas de a y b.
Si $a < b$, la curva se llama *caracol con lazo interno.*
Si $a = b$, la curva se denomina *cardioide.*
Si $a > b$, la curva se llama *caracol aplanado.*

Ejemplo 5.10 *Graficar las curvas cuyas ecuaciones polares son:*

a) $r = 1- \cos\theta$
b) $r = 1 - 2\ sen\ \theta$
c) $r = 1,5+\ sen\ \theta$

Solución

Siguiendo el procedimiento descrito previamente para graficar curvas cuyas ecuaciones han sido dadas en coordenadas polares, se obtiene:

a)

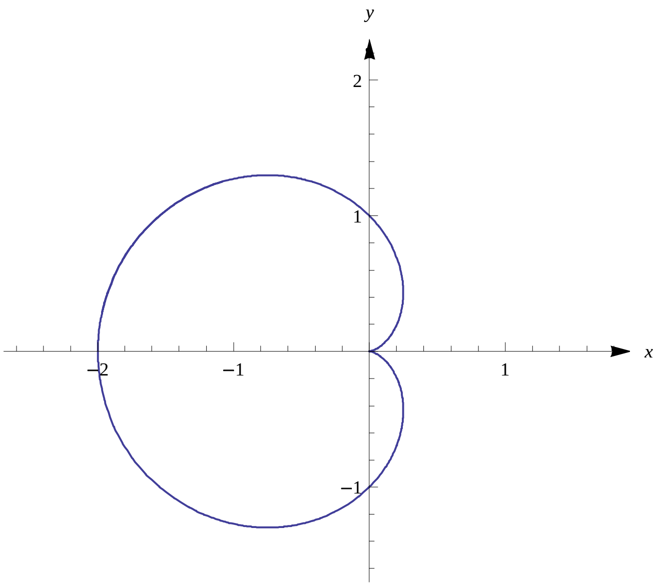


Figura 4.18 Gráfica de $r = 1 - \cos\theta$

b)

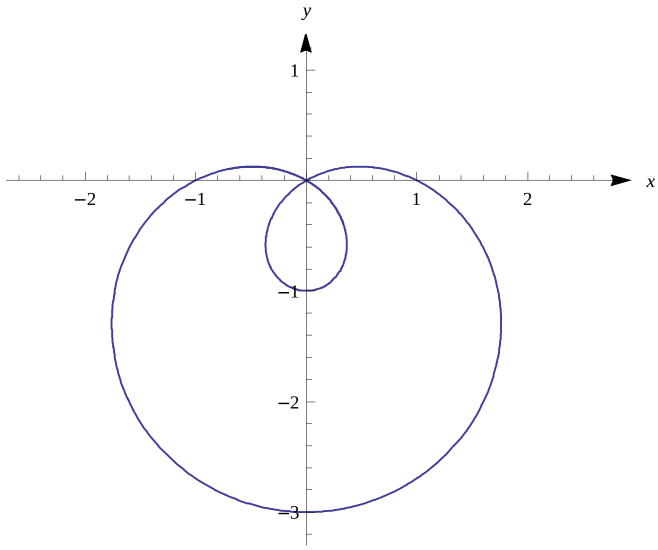


Figura 4.19 Gráfica de $r = 1 - 2sen\theta$

c)

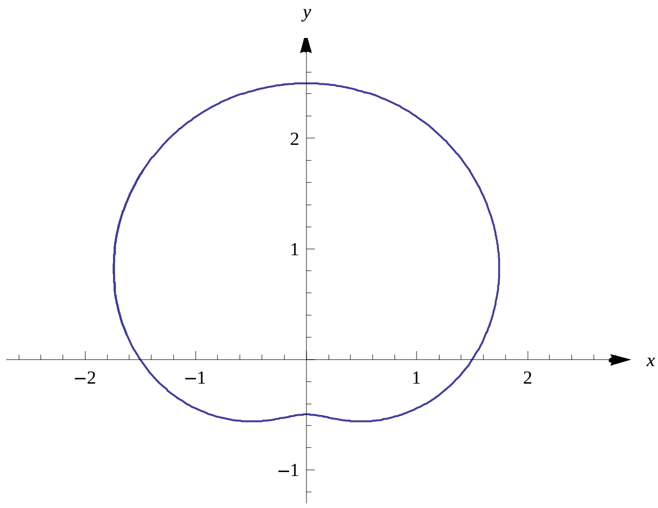


Figura 4.20 Gráfica de $r = 1,5 + sen\theta$

Lemniscatas

Son curvas cuya ecuación tiene la siguiente forma:

$$r^2 = a^2 \cos(2\theta) \ \ o \ \ r^2 = a^2 sen(2\theta), \ a > 0.$$

Ejemplo 5.11 *Graficar las curvas cuyas ecuaciones son:*

a) $r^2 = 2\ sen(2\theta)$
b) $r^2 = 4\cos(2\theta)$

Solución

Siguiendo el procedimiento descrito previamente para graficar curvas cuyas ecuaciones han sido dadas en coordenadas polares se obtiene, respectivamente:

a)

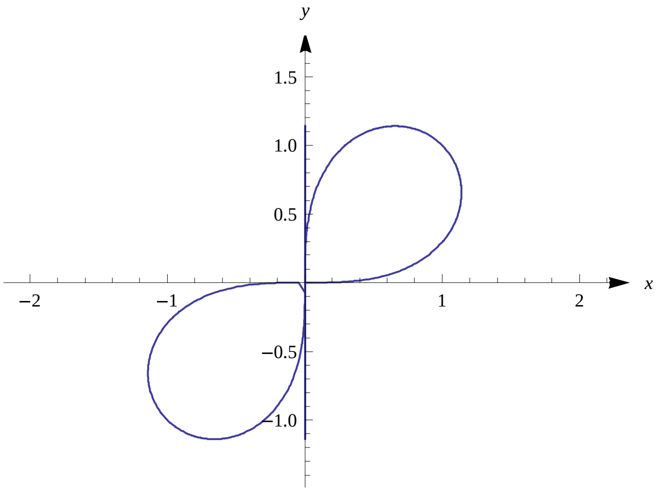


Figura 4.21 Gráfica de $r^2 = 2sen(2\theta)$

b)

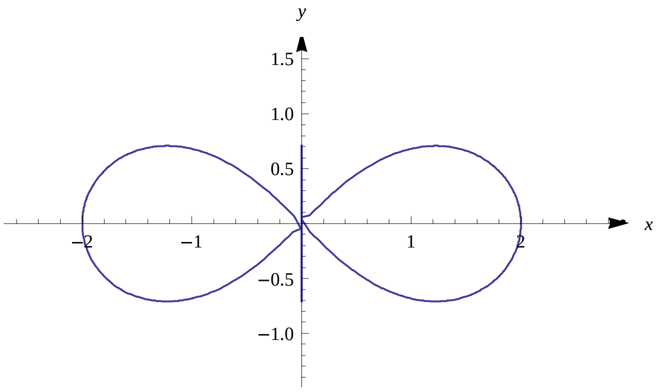


Figura 4.22 Gráfica de $r^2 = 4\cos(2\theta)$

Rosas

La ecuación de una rosa es de la forma

$$r = a\cos(n\theta) \quad o \quad r = asen(n\theta),\ n \in Z^+$$

La rosa tiene n hojas o pétalos si n es un número impar, y tiene $2n$ hojas si n es un número par.

Ejemplo 5.12 *Graficar las curvas cuyas ecuaciones son:*

a) $r = 2sen(2\theta)$
b) $r = 2\cos(5\theta)$

Solución

Siguiendo el procedimiento descrito previamente para graficar curvas cuyas ecuaciones han sido dadas en coordenadas polares se obtiene, respectivamente:

a)

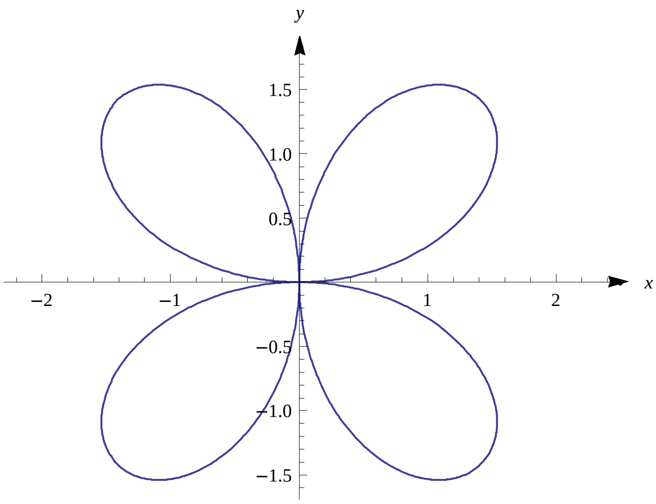


Figura 4.23 Gráfica de $r = 2sen(2\theta)$

b)

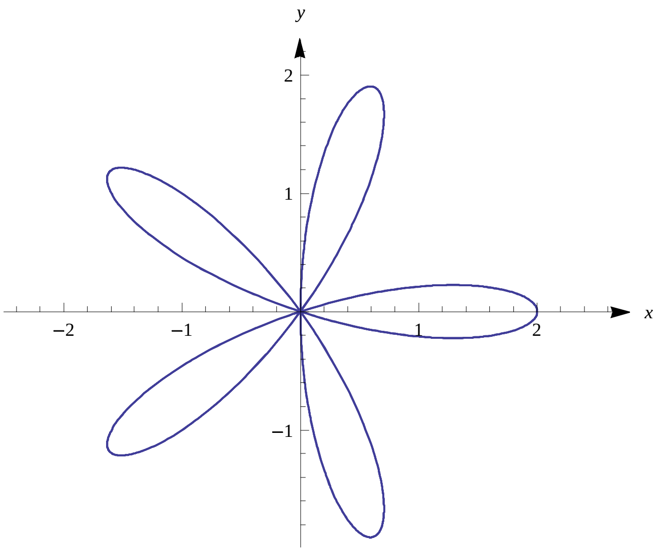


Figura 4.24 Gráfica de $r = 2\cos(5\theta)$

5.4.2 Intersección de curvas polares

Sean las curvas $\mathcal{C}_1 : E(r;\theta) = 0$ y $\mathcal{C}_{2:}\ F(r;\theta) = 0$.

Los puntos de intersección de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones

$$E(r;\theta) = 0,\ F(r;\theta) = 0$$

y verificando si el polo es un punto común.

En general, para obtener todos los puntos de intersección de dos curvas se resuelven también los sistemas de ecuaciones equivalentes.

Ejemplo 5.13 *Graficar la curva* $\mathcal{C} : r = \sqrt{sen\theta}$

Solución
La curva $\mathcal{C}$ es simétrica respecto al eje $\pi/2$.
Puntos de intersección de $\mathcal{C}$ con el eje polar y con el eje $\pi/2$:
$(0;0)$, $(0;\pi)$, $(1;\pi\ /2)$. Luego se verifica además que el polo está en la gráfica de $\mathcal{C}$.
Para determinar los valores que puede tomar θ, se debe tener en cuenta que $sen\theta \geq 0$.
Luego, $\theta \in [0;\pi]$.
Tabulando algunos puntos de paso de $\mathcal{C}$, se obtiene:

θ	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
r	$1\ /\ \sqrt{2}$	$1\ /\ \sqrt[4]{2}$	$\sqrt[4]{3}\ /\ \sqrt{2}$

Y graficamos:

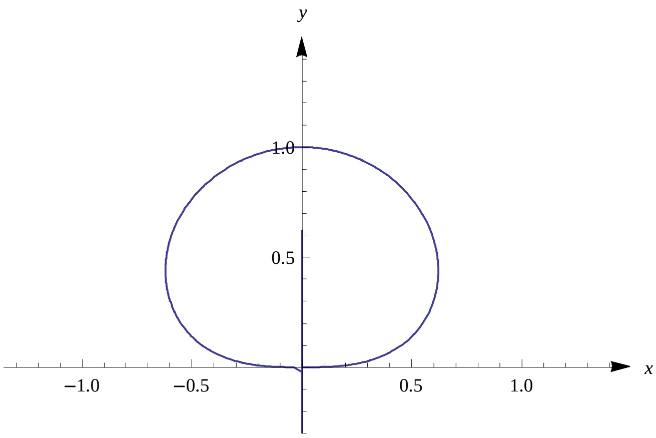


Figura 4.25 Gráfica de $\mathcal{C} : r = \sqrt{sen\theta}$

Ejemplo 5.14 *Calcular las coordenadas polares de todos los puntos de intersección de las curvas* $\mathcal{C}$ *(de la pregunta anterior) y la curva* $\mathcal{C}_1$: $r^2 = \cos(2\theta)$.

Solución
Resolvemos el sistema de ecuaciones $r = \sqrt{sen\theta}$ y $r^2 = \cos(2\theta)$
Entonces,

$$sen\theta = 1 - 2sen^2\theta \iff 2sen^2\theta + sen\theta - 1 = 0$$

$$sen\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \ \pi/6,\ 5\pi/6 \ \text{ y el polo } r = 0.$$

Luego, los puntos de intersección de la curva son $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{5\pi}{6}\right)$ y el polo, tal como se muestra en la siguiente gráfica:

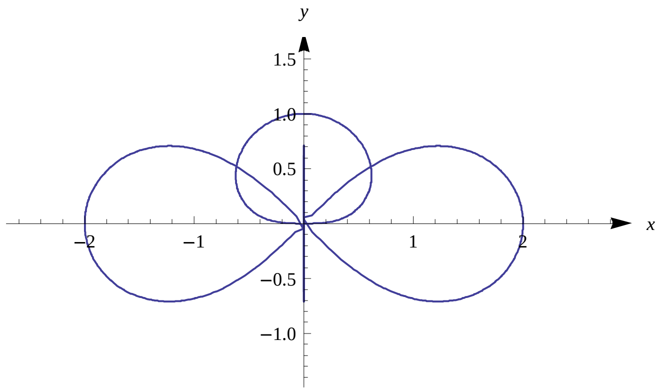


Figura 4.26 Gráfica de $\mathcal{C}: r = \sqrt{sen\theta}$ y $r^2 = \cos(2\theta)$

5.5 Problemas propuestos

1. Graficar los puntos cuyas coordenadas polares son las siguientes:

   (a) $P(-1;\ \pi/4)$
   (b) $Q(-2; -5\pi/3)$
   (c) $S(2; -\pi/6)$

   Luego, hallar sus coordenadas cartesianas.

2. Graficar cada una de las siguientes regiones:

   (a) $1 \leq r \leq 2,\ -\dfrac{\pi}{3} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{6}$
   (b) $1 \leq r \leq 2\ ,\ -\dfrac{\pi}{6} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$

3. Hallar las ecuaciones en coordenadas polares de las siguientes curvas:

   (a) $x = a$
   (b) $y = b$
   (c) $Ax + By + C = 0$
   (d) $x^3 + y^3 = 3xy$

4. Graficar las siguientes curvas polares:

   (a) $r = a\ \theta$
   (b) $r = \theta\ sen\theta$
   (c) $r = 3\ \sec\theta$
   (d) $r = \dfrac{3}{2}\ (1 - \cos 2\theta)$

5. Hallar los puntos de intersección de las curvas $\mathcal{C}_1 : r = -3\ sen\theta,\quad \mathcal{C}_2 : r = 3 + 3\ sen\theta$

6. Dada la curva $\mathcal{C} : (x^2 + y^2)^4 = 16x^2y^2$

(a) Escribir la ecuación de la curva en coordenadas polares.

(b) Calcular las coordenadas polares de todos los puntos de intersección de las curvas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}_1 : r = 2\ sen\theta$.

Capítulo 6

Vectores en el Plano y en el Espacio

6.1 Coordenadas de un punto en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$

Como se vio en el capítulo de Geometría analítica, cada punto P del plano se puede representar por un par ordenado $(x; y)$, donde x y y son números reales. Denotaremos a todos los pares ordenados como el conjunto $\mathbb{R}^2$.

También es cierto que cada punto P del espacio tridimensional se puede representar por una terna $(x; y; z)$, donde x, y y z son números reales. Esto se hace de la siguiente manera:

Se consideran las distancias dirigidas del punto P a tres planos mutuamente perpendiculares. La distancia dirigida de P al plano yz es la coordenada x, la distancia dirigida de P al plano xz es la coordenada y, y la coordenada z es la distancia dirigida de P al plano xy. Estas tres coordenadas se denominan *coordenada cartesianas rectangulares* de P.

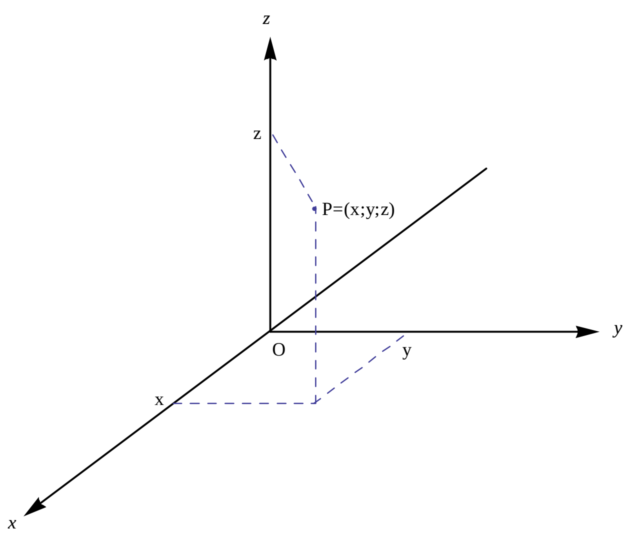


Figura 5.1 Coordenadas de un punto en el espacio

De esta manera, se establece una correspondencia entre los puntos P del plano con los pares ordenados $(x; y)$ y entre los puntos P del espacio tridimensional con el conjunto de ternas $(x; y; z)$.

6.1.1 Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos $A = (x_1; y_1)$ y $B = (x_2; y_2)$ de $\mathbb{R}^2$, se define mediante la siguiente fórmula:

$$d(A; B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

En el caso que los puntos sean de $\mathbb{R}^3$, $A(x_1; y_1; z_1)$ y $B(x_2; y_2; z_2)$, la distancia entre ellos se definirá de la siguiente manera:

$$d(A; B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

En particular, la distancia del punto $M(x; y; z)$ al origen de coordenadas $O(0; 0; 0)$ se determinará por la fórmula:

$$d(M; O) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Ejemplo 6.1 *Demostrar que el triángulo de vértices* $P(-2; 4; 0)$, $Q(1; 2; -1)$ *y* $R(-1; 1; 2)$ *es un triángulo equilátero.*

Solución
Como se verifica que:

$$d(P; Q) = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$$

$$d(P; R) = \sqrt{14}$$

$$d(R; Q) = \sqrt{14}$$

se concluye que el triángulo PQR es equilátero.

Ejemplo 6.2 *Encontrar la distancia del punto* $P(3; 7; -5)$ *a cada uno de los siguientes planos.*

a) Plano xy.
b) Plano xz

Solución
a) La distancia del punto P al plano xy es igual al valor absoluto de la coordenada z, $|-5| = 5$.
b) La distancia del punto P al plano xz es igual al valor absoluto de la coordenada y, $|7| = 7$.

Ejemplo 6.3 *Encontrar la longitud de la mediana del triángulo con vértices* $A\,(1;2;3)$, $B\,(-2;0;5)$ *y* $C\,(4;1;3)$, *relativa al vértice* A.

Solución

Sea M el punto medio del lado $\overline{BC}$ entonces $M\left(2;\frac{1}{2};4\right)$. La longitud de la mediana AM es $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

6.2 Definición de vector

Divesas magnitudes como la velocidad, la aceleración, la fuerza, el campo eléctrico, entre otras, deben ser descritas vectorialmente. Esto quiere decir que para conocerlas se debe tener información de su magnitud, dirección y sentido. Un vector es un objeto matemático que permite reconocer estas tres características.

6.2.1 Vectores en R^2

Se define un vector $\overrightarrow{v}$ en el plano como un par $(a;b)$ de modo que:

i) su magnitud es $\sqrt{a^2+b^2}$,

ii) su dirección está dada por la dirección de una recta cuya pendiente es $\frac{b}{a}$

iii) su sentido es el del segmento dirigido con punto inicial $(0;0)$ y punto final $(a;b)$.

Decimos que dos vectores son iguales si tienen la misma magnitud, dirección y sentido. En el siguiente gráfico se muestran distintas representaciones geométricas de un mismo vector. Todas ellas resultan de trasladar paralelamente uno de ellos.

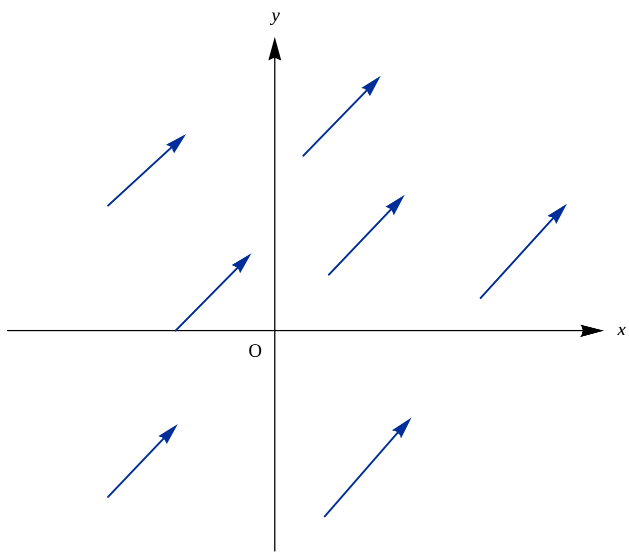


Figura 5.2 Distintas representaciones geométricas de un mismo vector en el plano

Notemos que se mantiene constante la magnitud (tamaño), la dirección (todos son paralelos) y el sentido (fijada la dirección, todos apuntan en el mismo sentido).

Algebraicamente ocurre que los vectores $\overrightarrow{u} = (a_1; b_1)$ y $\overrightarrow{v} = (a_2; b_2)$ son iguales si sus componentes coinciden: $a_1 = a_2$; $b_1 = b_2$

Se puede concluir entonces que un vector tiene infinitas representaciones geométricas pero solo una representación algebraica.

También se pueden definir vectores teniendo como información el extremo inicial (P) y el extremo final (Q) de una de sus representaciones geométricas. En ese caso, el vector se denota por $\overrightarrow{PQ}$ y sus componentes se obtienen restando las coordenadas de Q y P.

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P$$

Así,

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OR}$$

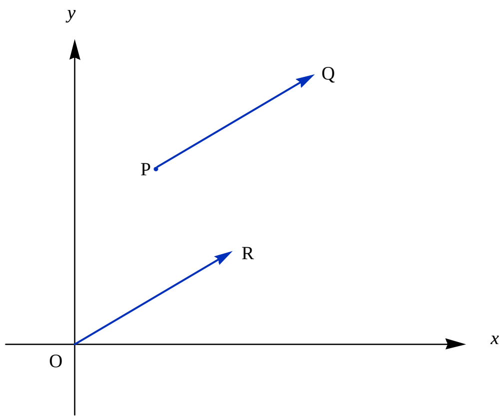


Figura 5.3 Distintas representaciones geométricas del vector $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OR}$

6.2.2 Vectores en $\mathbf{R}^3$

Análogamente, se pueden definir vectores en el espacio empleando ternas: $(a; b; c)$.De esta manera:

i) su magnitud es $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$,

ii) su dirección está dada por la dirección de la recta que pasa por el origen y por el punto $(a; b; c)$

iii) su sentido es el del segmento dirigido con punto inicial $(0; 0; 0)$ y punto final $(a; b; c)$.

Decimos que dos vectores son iguales si tienen la misma magnitud, dirección y sentido.

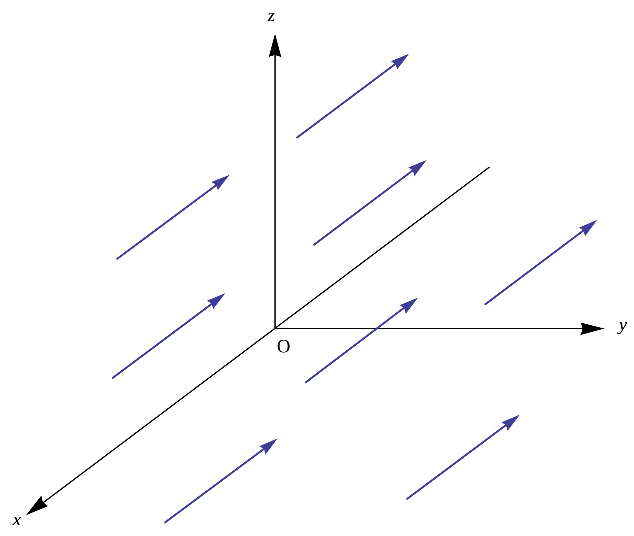


Figura 5.4 Distintas representaciones geométricas de un mismo vector en el espacio

Ejemplo 6.4 *Si el vector* $\overrightarrow{a}$ *tiene como punto inicial al punto* $A\,(1;3;2)$ *y como punto final al punto* $B\,(5;8;-1)$*, entonces el vector* $\overrightarrow{a}$ *está dado por*

$$\overrightarrow{a} = B - A = (5;8;-1) - (1;3;2) = (4;5;-3)\,.$$

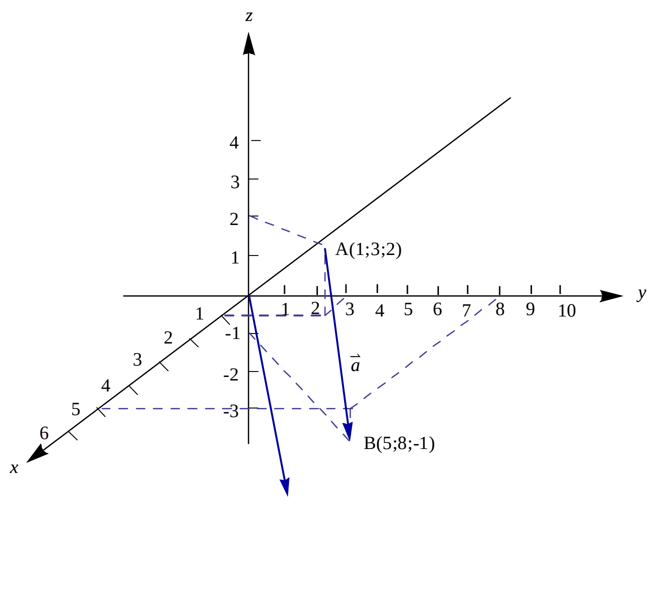


Figura 5.5 Representación del vector $\overrightarrow{a}$

En la siguiente sección se hará referencia nuevamente a estas ideas y se definirán operaciones entre vectores.

6.3 Operaciones definidas en los vectores y sus propiedades

Las siguientes definiciones son válidas en particular para $n = 2$ **y** $n = 3$.

6.3.1 Igualdad de vectores

Como se mencionó anteriomente, dos vectores $\overrightarrow{a} = (a_1; ...; a_n)$ y $\overrightarrow{b} = (b_1; ...; b_n)$ en $\mathbb{R}^n$ son iguales,

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} \Leftrightarrow a_i = b_i \text{ para todo } i = 1, ..., n$$

6.3.2 Adición de vectores

La suma de dos vectores $\overrightarrow{a} = (a_1; ...; a_n)$ y $\overrightarrow{b} = (b_1; ...; b_n)$en $\mathbb{R}^n$ se define como otro vector que se detemina de la siguiente manera:

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (a_1 + b_1; ...; a_n + b_n)$$

Interpretación geométrica:

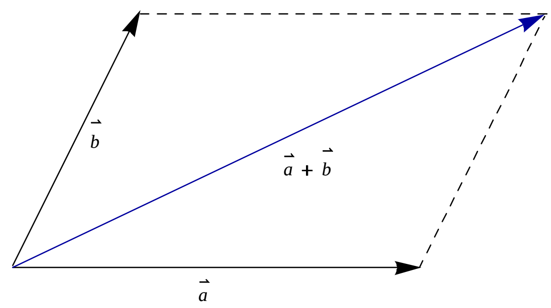


Figura 5.6 Interpetación geométrica de la adición de vectores

6.3.3 Multiplicación de vectores por escalares

A un número $\beta \in \mathbb{R}$ lo llamaremos escalar.

El producto de un escalar β y un vector $\overrightarrow{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ es el vector $\beta \overrightarrow{a}$ definido mediante

$$\beta \overrightarrow{a} = (\beta a_1, ..., \beta a_n) .$$

Si $\beta = -1$ y $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n$, el vector

$$-\overrightarrow{a} = (-a_1, ..., -a_n) .$$

se denominará *inverso aditivo* u opuesto del vector $\overrightarrow{a}$.

6.3.4 Sustracción de vectores

La *resta de los vectores* $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ se define mediante la adición de $\overrightarrow{a}$ con el inverso aditivo de $\overrightarrow{b}$:

$$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{b})$$

Interpetación geométrica:

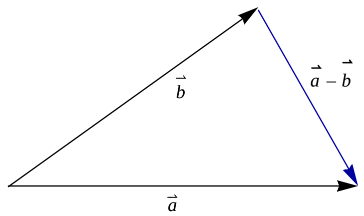


Figura 5.7 Interpetación geométrica de la sustracción de vectores

Propiedades
Para todo $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumple:

1. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$
2. $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right)$
3. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{a}$
4. $\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$
5. $\alpha\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) = \alpha\overrightarrow{a} + \alpha\overrightarrow{b}$
6. $(\alpha + \beta)\overrightarrow{a} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{a}$
7. $(\alpha\beta)\overrightarrow{a} = \alpha(\beta\overrightarrow{a})$
8. $1\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$

6.3.5 Vectores Paralelos

Dos vectores no nulos $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ en $\mathbb{R}^n$ son paralelos, $\overrightarrow{a} \| \overrightarrow{b}$, si existe un número un $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{b} = \beta\overrightarrow{a}$$

Si $\beta > 0$ entonces los vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ tienen el mismo sentido.
Si $\beta < 0$, los vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ tienen sentidos opuestos.

Observaciones

El vector cero $\overrightarrow{0} = (0;0;0)$ es paralelo a todos los vectores, pues $\overrightarrow{0} = 0\overrightarrow{a}$ para todo $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n$.

El vector $\overrightarrow{a}$ es paralelo consigo mismo, porque existe un escalar, 1, tal que $\overrightarrow{a} = 1\overrightarrow{a}$.

Ejemplo 6.5 *¿Para qué valores de m los vectores $\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{i} - m\overrightarrow{j} + \frac{4}{3}m\overrightarrow{k}$ y $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$ son paralelos?*

Solución

De la definición $\overrightarrow{a} \| \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{a} = m\left(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \frac{4}{3}\overrightarrow{k}\right) = \overrightarrow{b}$. Luego, $m = 3r,\ \ r \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 6.6 *Demostrar que si $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ son vectores paralelos a $\overrightarrow{c}$ entonces el vector $\alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b}$ es paralelo a $\overrightarrow{c}$ para todo α y β escalares.*

Solución

Como $\overrightarrow{a} \| \overrightarrow{c} \Rightarrow$Existe un número $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{a} = \alpha\overrightarrow{c}$.

Como $\overrightarrow{b} \| \overrightarrow{c} \Rightarrow$Existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{b} = \beta\overrightarrow{c}$.

Y veremos que la suma de dos vectores paralelos al vector $\overrightarrow{c}$ también es paralelo al vector $\overrightarrow{c}$.

En efecto,

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \alpha\overrightarrow{c} + \beta\overrightarrow{c} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{c} = \lambda\overrightarrow{c}, \text{ con } \lambda = \alpha + \beta$$

Ejemplo 6.7 *Las coordenadas de tres vértices del rectángulo $ABCD$ son $A(-2;-6)$, $C(2;6)$ y $D(-6;-2)$. Los puntos M y N pertenecen a los lados $\overline{CD}$ y $\overline{AB}$, respectivamente. Si el vector $\overrightarrow{u}$, con extremo inicial N y final M, es paralelo al vector $(1;-3)$, responder las siguientes preguntas empleando vectores.*

a) Hallar el punto B, el vector $\overrightarrow{u}$ y el punto E en el segmento $\overline{DC}$ de modo que $\overline{AE}$ sea paralelo a $\overrightarrow{u}$.

b)¿Son los puntos M y N únicos? Justificar.

Solución

a) De los datos se tiene

$$\overrightarrow{DC} = (8;8)$$

Como $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ entonces las coordenadas de B.

$$B = A + \overrightarrow{DC} = (6;2).$$

También $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{NM}$ es paralelo al vector $(1;-3)$ entonces $\overrightarrow{NM} = \alpha(1;-3)$ para algún α.

Tomemos E de modo que $\overrightarrow{AE}$ sea paralelo a $\overrightarrow{NM}$ entonces $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AE} = \alpha(1;-3)$.

Ademas, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$, donde $\overrightarrow{DE} = \beta\overrightarrow{DC}$ para algún β, por ser paralelos.

Entonces

$$\alpha(1;-3) = (-4;4) + \beta(8;8).$$

$\alpha=-2$, por lo tanto, $\overrightarrow{AE}=(-2;6)$.

Así, $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{u}=(-2;6)$ y las coordenadas de $E=(-4;0)$.

b) Los puntos M y N no son únicos, hay infinitos puntos sobre los segmentos indicados que cumplen con las condiciones dadas.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NM} &= (-2;6)=M-N\\ M &= N+(-2;6)\end{aligned}$$

Para cada punto $N\in\overrightarrow{AB}$, se tiene un $M\in\overrightarrow{DC}$.

6.3.6 Producto escalar (o producto interno) de vectores

El producto escalar o producto interno de los vectores $\overrightarrow{a}=(x_1;...;x_n)$ y $\overrightarrow{b}=(y_1;...;y_n)$ en $\mathbb{R}^n$ se define como:

$$\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b}=x_1y_1+...+x_ny_n$$

y se llama así por que el resultado es un número real (escalar).

Propiedades

1. $\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b}\in\mathbb{R}$
2. $\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\,.\,\overrightarrow{a}$
3. $\overrightarrow{a}\,.\left(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\right)=\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{c}$
4. $(\alpha\overrightarrow{a})\,.\,\overrightarrow{b}=\alpha\left(\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b}\right)=\overrightarrow{a}\,.\left(\alpha\overrightarrow{b}\right)$
5. $\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{a}\geq 0$, para cualquier vector $\overrightarrow{a}$

6.3.7 Norma de un vector

La norma (magnitud o longitud) de $\overrightarrow{a}=(a_1,\ldots a_n)\in\mathbb{R}^n$, denotado por $\|\overrightarrow{a}\|$, se define como el número real

$$\|\overrightarrow{a}\|=\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}$$

Propiedades

1. $\|\overrightarrow{a}\|\geq 0$
2. $\|\alpha\overrightarrow{a}\|=|\alpha|\,\|\overrightarrow{a}\|$,siendo α un número real.
3. $\|\overrightarrow{a}\|=\|-\overrightarrow{a}\|$
4. $\|\overrightarrow{a}\|^2=\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{a}$
5. Desigualdad de Cauchy-Schwarz: $\left|\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b}\right|\leq\|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\|$
6. Desigualdad triángular: $\|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\|\leq\|\overrightarrow{a}\|+\|\overrightarrow{b}\|$

Demostración de la propiedad 4:
Si λ es un número real, se tiene que:

$$\left\|\lambda\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right\|^2 = \lambda^2\|\overrightarrow{a}\|^2 + \|\overrightarrow{b}\|^2 - 2\lambda\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} \geq 0$$

Como es una expresión cuadrática positiva en la variable λ , entonces su discriminante debe ser negativo:

$$\left[-2\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}\right]^2 - 4\|\overrightarrow{a}\|^2\|\overrightarrow{b}\|^2 \leq 0$$

Por lo tanto,

$$\left|\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}\right| \leq \|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\|$$

Ejemplo 6.8 *Dados los vectores* $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$ *y* $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$, *hallar:*

a) El producto escalar de los vectores $\overrightarrow{a}$ y $-20\overrightarrow{b}$.
b) La norma del vector $-10\overrightarrow{a}$.

Solución
a)

$$\overrightarrow{a}.\left(-20\overrightarrow{b}\right) = (-20)\left(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}\right) = -260$$

b) $\|-10\overrightarrow{a}\| = |-10|\,\|\overrightarrow{a}\| = 10\sqrt{4+9+16} = 10\sqrt{29}$.

Ejemplo 6.9 *Desde un punto A un barco navega* 80 *km hacia el punto B con rumbo $N30°O$, luego avanza de B a C con rumbo $S\alpha°O$ y finalmente* 130 *km hacia el Este para llegar al punto D. Si el punto D se encuentra a $50\sqrt{3}km$ de A siguiendo el rumbo $N60°E$, determinar la longitud del trayecto de B a C y el valor de $\alpha°$.*

Tener en cuenta que:
$N\alpha°E$ equivale a medir, desde el norte, $\alpha°$ hacia el Este.
$N\alpha°O$ equivale a medir, desde el norte, $\alpha°$ hacia el Oeste.
$S\alpha°O$ equivale a medir, desde el sur, $\alpha°$ hacia el Oeste.

Solución
Construimos los vectores

$$\overrightarrow{AB} = (-80\cos 60°; 80\sin 60°) = \left(-40; 40\sqrt{3}\right)$$

$$\overrightarrow{CD} = (130; 0)$$

$$\overrightarrow{AD} = \left(50\sqrt{3}\cos 30°; 50\sqrt{3}\sin 30°\right) = \left(75; 25\sqrt{3}\right)$$

Como $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ entonces $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$.

$$\overrightarrow{BC} = \left(-15; -15\sqrt{3}\right), \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = 30\text{km}.$$

Luego,

$$\tan\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Ejemplo 6.10 *Dados los vectores no nulos* $\overrightarrow{a} = (q; r; p)$ *y* $b = (p; q; r)$. *Se cumplen las siguientes condiciones:*

i) el vector

$$\overrightarrow{c} = \|\overrightarrow{a}\| \overrightarrow{b} + \left\|\overrightarrow{b}\right\| \overrightarrow{a}$$

tiene la misma dirección y sentido que el vector $\overrightarrow{d} = (r; p; q)$

ii) $\overrightarrow{c} . \overrightarrow{d} = 48\sqrt{3}$.

Hallar $\overrightarrow{x} = \|\overrightarrow{c}\| \overrightarrow{a} + \overrightarrow{d}$.

Solución

De las componentes de $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ se tiene

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{a}\| &= \left\|\overrightarrow{b}\right\| \Rightarrow \\ \overrightarrow{c} &= \|\overrightarrow{a}\| \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \end{aligned}$$

Por ser paralelos los vectores $\overrightarrow{c}$ y $\overrightarrow{d}$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{c} = \alpha \overrightarrow{d}$$

Luego,

$$\|\overrightarrow{a}\| (p + q; r + q; p + r) = \alpha \|\overrightarrow{a}\| (r; p; q)$$

de donde igualando componentes

$$p + q = \alpha r,\ r + q = \alpha p \text{ y } p + r = \alpha q$$

Resolviendo el sistema, se obtiene $\alpha = 2$ y $p = q = r$.

Entonces $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} = \overrightarrow{d}$ y $\overrightarrow{c} = 2 \|\overrightarrow{a}\| \overrightarrow{a}$.

Ahora,

$$\overrightarrow{c} . \overrightarrow{d} = 2 \|\overrightarrow{a}\| \overrightarrow{a} . \overrightarrow{a} = 2 \|\overrightarrow{a}\|^3 = 6p^3\sqrt{3} = 48\sqrt{3} \Rightarrow p = 2$$

$$\|\overrightarrow{c}\| = 2 \left\|\overrightarrow{a}^2\right\| = 2 \left(3p^2\right) = 24$$

Finalmente,

$$\overrightarrow{x} = 24 (2; 2; 2) + (2; 2; 2) = (50; 50; 50)$$

Ejemplo 6.11 *Los vectores* $\overrightarrow{a}$ *y* $\overrightarrow{b}$ *son dos lados concecutivos de un rombo. Demostrar, empleando vectores, que las diagonales de dicho rombo son perpendiculares.*

Solución

Los vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ por ser lados del rombo tienen igual norma:

$$\|\overrightarrow{a}\| = \left\|\overrightarrow{b}\right\|$$

entonces las diagonales del rombo son

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \text{ y } \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}.$$

Efectuando el producto escalar de las diagonales

$$\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right).\left(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}\right)=\|\overrightarrow{a}\|^2-\left\|\overrightarrow{b}\right\|^2=0$$

Ejemplo 6.12 *Dado el trapecio $ABCD$, cuyas bases son $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$, usando vectores, demostrar que la longitud de la mediana de dicho trapecio es igual a la semisuma de las longitudes de sus bases.*

Solución
Sean M y N los puntos medios de los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, respectivamente.

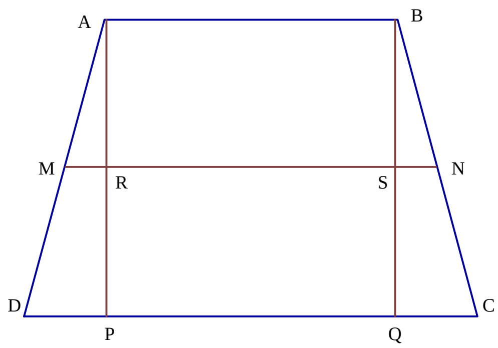


Figura 5.8 Ubicación de los vértices en un trapecio cualquiera

Los vectores

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MR} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{DP}\\ \overrightarrow{RS} &= \overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{SN} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DP}-\overrightarrow{AB}\right)\end{aligned}$$

Además,

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MR}+\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{SN}$$

Reemplazando,

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DP}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}\right).$$

$$\left\|\overrightarrow{MN}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}\right\|$$

Pero,

$$\left\|\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}\right\|=\left\|\overrightarrow{DC}\right\|+\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$$

pues $\overrightarrow{DC}$ y $\overrightarrow{AB}$ son paralelos.

Por lo tanto,

$$\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{DC}\right\| + \left\|\overrightarrow{AB}\right\|\right)$$

6.3.8 Vector unitario

Un vector unitario $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n$ es un vector con magnitud $\|\overrightarrow{u}\| = 1$.

Si el vector $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n$ es diferente de cero entoces el vector unitario que tiene la misma dirección y el mismo sentido que $\overrightarrow{a}$ está dado por

$$\overrightarrow{u}_{\overrightarrow{a}} = \frac{\overrightarrow{a}}{\|\overrightarrow{a}\|}$$

Especial atención merecen los vectores unitarios en $\mathbb{R}^3$ que siguen la dirección de los ejes coordenados x, y y z, respectivamente

$$\overrightarrow{i} = (1; 0; 0)\,; \quad \overrightarrow{j} = (0; 1; 0)\,; \quad \overrightarrow{k} = (0; 0; 1)$$

denominados *vectores coordenados unitarios.*

Propiedad

Cualquier vector $\overrightarrow{a} = (a_x; a_y; a_z) \in \mathbb{R}^3$ se puede expresar como combinación (lineal) de los vectores unitarios $\overrightarrow{i}$; $\overrightarrow{j}$ y $\overrightarrow{k}$, mediante

$$\overrightarrow{a} = (a_1; a_2; a_3) = a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_3\overrightarrow{k}.$$

Propiedad

Sean $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ dos vectores no paralelos y $\overrightarrow{u}_{\overrightarrow{a}}$ y $\overrightarrow{u}_{\overrightarrow{b}}$ los vectores unitarios en las direcciones de $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ respectivamente, entonces el vector $\overrightarrow{u}_{\overrightarrow{a}} + \overrightarrow{u}_{\overrightarrow{b}}$ sigue la dirección de la bisectriz del ángulo, que forman $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$.

6.3.9 Dirección en $\mathbb{R}^3$

La dirección de un vector $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$ se define como el vector unitario $\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$.

La dirección de un vector $\overrightarrow{v}$ no se puede definir como el ángulo θ que forma $\overrightarrow{v}$ con el eje X positivo ya que, por ejemplo si $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, entonces existen un número infinito de vectores que forman un ángulo θ con el lado positivo del eje X, y estos vectores juntos forman un cono.

6.3.10 Ángulo entre dos vectores

Sean $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^n$ y θ el ángulo entre ellos. El valor de $\theta \in [0; \pi]$, medido en radianes se halla de la siguiente manera:

$$\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\|} \Leftrightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\|}\right)$$

Esta expresión resulta de aplicar la ley de cosenos en el triángulo formado por los vectores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$.

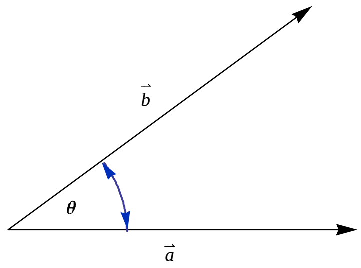


Figura 5.9 Ángulo entre vectores

6.3.11 Vectores ortogonales

Se dice que dos vectores no nulos $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ en $\mathbb{R}^n$ son ortogonales si el ángulo que forman es $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Se dice que dos vectores son paralelos si $\theta = 0$ ó $\theta = \pi$.

Si $\theta = 0$ entonces $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ tienen el mismo sentido, si $\theta = \pi$, $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ tienen sentidos opuestos.

Propiedades

1. Si los vectores no nulos $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ son ortogonales, es decir $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$, entonces $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = 0$.
2. Si $\overrightarrow{a} = (a_1; a_2) \in \mathbb{R}^2$ entonces un vector ortogonal a $\overrightarrow{a}$ es el vector $\overrightarrow{a}^{\perp} = (-a_2; a_1)$.

Otro vector ortogonal al vector $\overrightarrow{a}$ será $-\overrightarrow{a}^{\perp}$.

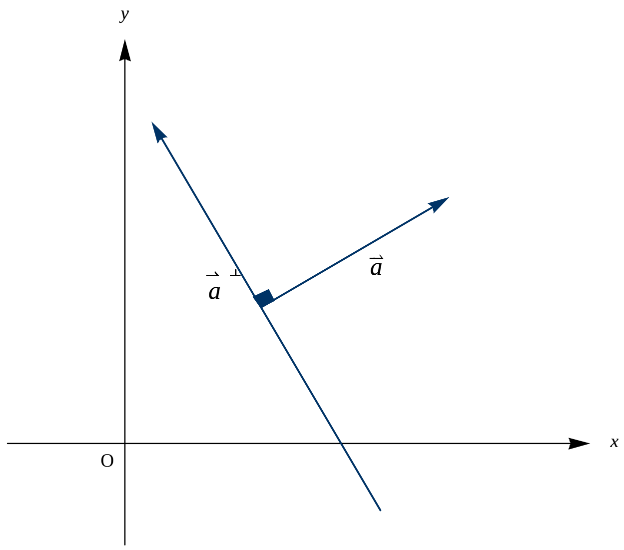


Figura 5.10 Representación geométrica de dos vectores ortogonales

El ángulo entre $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{a}^{\perp}$ es de $\dfrac{\pi}{2}$ radianes.

Ejemplo 6.13 *Hallar un vector unitario perpendicular simultáneamente a los vectores* $\overrightarrow{a} = (1;-3;2)$ *y* $\overrightarrow{b} = (3;-1;4)$.

Solución

Sea $\overrightarrow{c} = (c_1; c_2; c_3)$. De la condición de perpendicularidad se tiene:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{c}.\overrightarrow{a} &= 0 \\ \overrightarrow{c}.\overrightarrow{b} &= 0 \end{aligned}$$

de donde se forman las ecuaciones

$$\begin{aligned} c_1 - 3c_2 + 2c_3 &= 0 \\ 3c_1 - c_2 + 4c_3 &= 0 \end{aligned}$$

Expresando c_1 y c_3 en términos de c_2, $c_1 = 5c_2$ y $c_3 = -c_2$.

Luego, el vector $\overrightarrow{c} = (c_1; c_2; c_3) = (5c_2; c_2; -c_2)$.

Para $c_2 = 1$, se tiene un vector que cumple con las condiciones, entonces $\overrightarrow{c} = (5;1;-1)$.

Observación:

Para cualquier valor de $c_2 \neq 0$, el vector $\overrightarrow{c}$ mantiene la dirección y la perpendicularidad con $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{c}$. Y existen infinitos vectores $\overrightarrow{c}$ que satisfacen la condición pedida.

Ejemplo 6.14 *Los vectores* $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ *y* $\overrightarrow{c}$ *son de igual longitud y forman de dos en dos ángulos congruentes. Si se verifica que:*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} &= \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{b} &= \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}. \end{aligned}$$

hallar el vector $\overrightarrow{c}$.

Solución

Sea $\overrightarrow{c} = (c_1; c_2; c_3)$ entonces por la igualdad de normas

$$\|\overrightarrow{c}\| = \|\overrightarrow{a}\| = \left\|\overrightarrow{b}\right\| = \sqrt{2}$$

se tiene $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 2 \ldots (1)$.

Si θ es el ángulo formado por dos vectores entonces:

$$\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{a}.\overrightarrow{c}}{\|\overrightarrow{a}\|\,\|\overrightarrow{c}\|} = \frac{\overrightarrow{b}.\overrightarrow{c}}{\left\|\overrightarrow{b}\right\|\,\|\overrightarrow{c}\|}$$

entonces $c_1 + c_2 = c_2 + c_3 \Rightarrow c_1 = c_3 \ldots (2)$

También

$$\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\|\left\|\overrightarrow{b}\right\|} = \frac{1}{2}$$

entonces

$$c_1 + c_2 = 1$$

Resolviendo las ecuaciones (1), (2) y (3) se tiene una solución para $c_1 = 1$, por lo tanto, $c = (1; 0; 1)$.

Ejemplo 6.15 *Dados los vectores ortogonales* $\overrightarrow{a} = (1; -1; 1)$ *y* $\overrightarrow{b} = (x_0; 2x_0; z_0)$, *donde* $x_0 > 0$ *y* $\left\|\overrightarrow{b}\right\| = \sqrt{6}$. *Hallar los vectores no paralelos que sean ortogonales al vector* $\overrightarrow{a}$ *tales que cada uno de ellos forme un ángulo de* $\frac{\pi}{4}$ *con el vector* $\overrightarrow{b}$.

Solución
Como $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \Rightarrow \overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = 0 \Rightarrow x_0 - 2x_0 + z_0 = 0$, $z_0 = x_0$.
Reemplazando en $\overrightarrow{b}$,

$$\overrightarrow{b} = (x_0; 2x_0; x_0) = x_0 (1; 2; 1); x_0 > 0.$$

Nota: Sin pérdida de generalidad, vamos a considerar a $\overrightarrow{b} = (1; 2; 1)$, con $x_0 = 1$.
Sea $\overrightarrow{c} = (c_1; c_2; c_3)$ un vector que cumple con las condiciones del problema, es decir, $\overrightarrow{c}$ es ortogonal al vector $\overrightarrow{a}$ y el ángulo entre $\overrightarrow{c}$ y $\overrightarrow{b}$ es $\frac{\pi}{4}$.
De

$$\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{a} \Rightarrow c_1 - c_2 + c_3 = 0 \rightarrow c_2 = c_1 + c_3.$$

De

$$\overrightarrow{b}.\overrightarrow{c} = \sqrt{6}\left\|\overrightarrow{c}\right\|\frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow 3(c_1 + c_3) = \sqrt{3}\left\|\overrightarrow{c}\right\|.$$

Elevando al cuadrado y simplificando se obtiene

$$c_1^2 + 4c_1c_3 + c_3^2 = 0$$

Como se tienen dos ecuaciones con tres incognitas, hay infinitas soluciones.
Expresamos c_1 y c_2 en términos de c_3:

$$c_1 = c_3\left(-2 \pm \sqrt{3}\right) \text{ y } c_2 = c_3\left(-1 \pm \sqrt{3}\right)$$

Para diferentes valores de c_3, se tiene diferentes vectores $\overrightarrow{c}$. Por lo tanto, deben existir infinitos vectores $\overrightarrow{c}$, que cumplen con las dos condiciones, pero todos de la forma

$$\overrightarrow{c} = \left(-2 \pm \sqrt{3}; -1 \pm \sqrt{3}; 1\right) c_3.$$

Ejemplo 6.16 *En el cuadrilátero* $ABCD$ *se cumple que su diagonal* $\overline{AC}$ *es un eje de simetría. El segmento dirigido* $\overrightarrow{AC}$ *se representa con el vector* $\overrightarrow{u}$ *y el segmento dirigido* $\overrightarrow{AB}$ *con el vector* $\overrightarrow{v}$.

Si $\overrightarrow{u} = (1; -4)$, $\overrightarrow{v} = (-1; -1)$ y $A(2; 6)$,
a) Dar las coordenadas de los vértices del cuadrilátero $ABCD$ que verifique las condiciones señaladas.
b) ¿Es cierto que las diagonales de dicho cuadrilátero son perpendiculares? Justificar la respuesta usando vectores.
Solución
De las condiciones del problema esbozamos un cuadrilátero que cumple con las condiciones dadas.

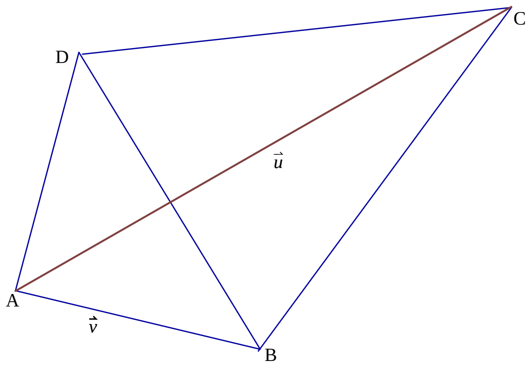


Figura 5.11 Ubicación de los datos del ejemplo

a) Coordenadas de los vértices C y B.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{u} \Rightarrow \ C = A + \overrightarrow{u} = (2;6) + (1;-4) = (3;2).$$

De

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v} \Rightarrow B = (2;6) + (-1;-1) = (1;5)\,.$$

Para hallar D usamos la simetría de $\overrightarrow{AB}$ y de $\overrightarrow{AD}$, respecto a la diagonal $\overrightarrow{AB}$, es decir, las longitudesde estos vectores son iguales:

$$\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{2}.$$

y los ángulos entre $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$ y entre $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ también, luego:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|} = \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{u}}{\sqrt{34}}$$

Sea $\overrightarrow{AD} = (x;y)$. Reemplazando en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \frac{3}{\sqrt{34}} &= \frac{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{u}}{\sqrt{34}} \\ &\Rightarrow (x;y)\cdot(1;-4) = x - 4y = 3 \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \left\|\overrightarrow{AD}\right\| &= \|(x;y)\| = \sqrt{2} \\ x^2 + y^2 &= 2. \end{aligned}$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtienen dos soluciones

$$\begin{aligned} x &= \frac{23}{17}, y = \frac{-7}{17} \\ x &= -1, y = -1 \end{aligned}$$

Elegimos la solución que no representa a $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AD}=\left(\frac{23}{17};\frac{-7}{17}\right)=D-A\Rightarrow D=\left(\frac{57}{17};\frac{95}{17}\right)$$

b) De

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=(1;-4)\,.\left(\frac{40}{17};\frac{10}{17}\right)=0$$

se concluye que las diagonales del cuadrilátero $ABCD$ son perpendiculares. Por lo tanto, el cuadrilátero $ABCD$ es un rombo.

Ejemplo 6.17 *Sea θ el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ de $\mathbb{R}^2$. Demostrar que área del paralelogramo formado por $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ está dado por $\left|\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b}^{\perp}\right|$ donde $\overrightarrow{b}^{\perp}$ es el vector $\overrightarrow{b}$ rotado 90° en sentido antihorario. Tener en cuenta que si $\overrightarrow{b}=(b_1;b_2)$ entonces $\overrightarrow{b}^{\perp}=(-b_2;b_1)$.*

Solución
Vamos a considerar los vectores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ y el ortogonal $\overrightarrow{b}^{\perp}$

Si θ el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ entonces $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ es el ángulo entre $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}^{\perp}$. Además,

$$\left\|\overrightarrow{b}^{\perp}\right\|=\left\|\overrightarrow{b}\right\|.$$

El área de un paralelogramo está dado por el producto de las longitudes de la base y la altura.
Si $\|\overrightarrow{a}\|$ es la base y $\left\|\overrightarrow{h}\right\|=\left\|\overrightarrow{b}\right\|\sin\theta$ es la altura entonces:

$$\begin{aligned} A &= \|\overrightarrow{a}\|\left\|\overrightarrow{h}\right\|=\left|\|\overrightarrow{a}\|\left\|\overrightarrow{b}\right\|\sin\theta\right| \\ &= \left|\|\overrightarrow{a}\|\left\|\overrightarrow{b}^{\perp}\right\|\cos\left(90^\circ-\theta^\circ\right)\right|=\left|\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b}^{\perp}\right|. \end{aligned}$$

6.3.12 Proyección ortogonal de un vector sobre otro

Sean $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$ con $\overrightarrow{b}\neq\overrightarrow{0}$. La proyección de $\overrightarrow{a}$ sobre $\overrightarrow{b}$, denotado por $\mathrm{Pr}_{\overrightarrow{b}}\,\overrightarrow{a}$, es el vector

$$\mathrm{Pr}_{\overrightarrow{b}}\,\overrightarrow{a}=\left(\frac{\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{b}\|}\right)\frac{\overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{b}\|}$$

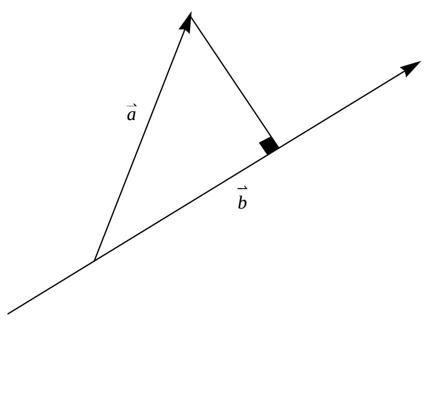


Figura 5.12 El vector $\overrightarrow{a}$ se proyecta ortogonalmente sobre el vector $\overrightarrow{b}$

6.3.13 Componente de un vector sobre otro

Al número $\dfrac{\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{b}\|}$ se le denominará componente de $\overrightarrow{a}$ sobre $\overrightarrow{b}$, y se denotará por $Comp_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$.

Propiedades

1. $\text{Pr}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$ es paralelo a $\overrightarrow{b}$.
2. $Comp_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = \dfrac{\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{b}\|}$ es un número real.
3. $\text{Pr}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$ es independiente del vecor $\overrightarrow{b}$, es decir, $\text{Pr}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = \text{Pr}_{\alpha\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$, para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$.
4. $\left\|\text{Pr}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}\right\| = \left|Comp_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}\right|$.
5. $\overrightarrow{a} - \text{Pr}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$ es ortogonal a $\text{Pr}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$ y por lo tanto a $\overrightarrow{b}$.

Ejemplo 6.18 *Los puntos* $A\,(5;1)$ *y* $B\,(8;3)$ *son vértices consecutivos del cuadrado* $ABCD$. *Empleando vectores, hallar:*

a) Las coordenadas del los vértices C y D. (Dar solo una de las dos posibles soluciones).

b) El área del paralelogramo determinado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $2\overrightarrow{AC}$, considerando el resultado obtenido en a).

Solución.

a) Esbozamos un gráfico del cuadrado $ABCD$.

Si $\overrightarrow{AB} = (3;2)$ entonces un ortogonal de $\overrightarrow{AB}$ es $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}^{\perp} = (-2;3)$.

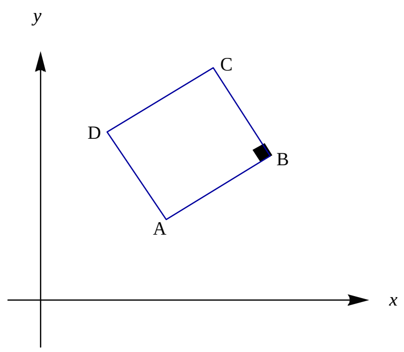


Figura 5.13 Ubicación de los datos del ejemplo

Luego, las coordenadas de C, de $\overrightarrow{AC} = (-2;3) = C - A$, se tiene

$$C = A + \overrightarrow{AC} = (-2;3) + (8;3) = (6;6)\,.$$

Similarmente, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow D = (3;4)$.

b) Como el área de un paralelogramo es igual a la longitud de la base por la longitud de su altura, entonces determinemos cada uno de estas longitudes.

Longitud de la base: $\left\| 2\overrightarrow{AC} \right\| = 2\sqrt{26}$.

En el triángulo ABH, donde H es el pie de la altura trazada de B, se tiene $\left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \|(3;2)\| = \sqrt{13}$.

Luego,

$$\left\| \Pr_{\overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AB} \right\| = \left| Comp_{\overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AB} \right| = \frac{13}{\sqrt{26}} = \left\| \overrightarrow{AH} \right\|$$

Por el teorema de Pitágoras, la longitud de su altura es:

$$\left\| \overrightarrow{BH} \right\| = \sqrt{\frac{13}{2}}.$$

Finalmente, el área del paralelogramo es

$$\left\| 2\overrightarrow{AC} \right\| \left\| \overrightarrow{BH} \right\| = 2\sqrt{26}\sqrt{\frac{13}{2}} = 26$$

Ejemplo 6.19 *En un triángulo equilátero ABC, el vector $\overrightarrow{AB}$ es paralelo a $\overrightarrow{w} = (0;-1;1)$ y el punto $Q = (1;-4;7)$ es tal que el vértice A pertenece al segmento $\overline{QB}$. Hallar las coordenadas de los vértices A y B del triángulo ABC si $C(-4;1;0)$.*

Solución

Proyectamos $\overrightarrow{QC} = (-5;5;-7)$ sobre el vector $\overrightarrow{w}$.

Sea $\overrightarrow{QM} = \Pr_{\overrightarrow{w}} \overrightarrow{QC}$, donde $M \in \overline{QB}$.

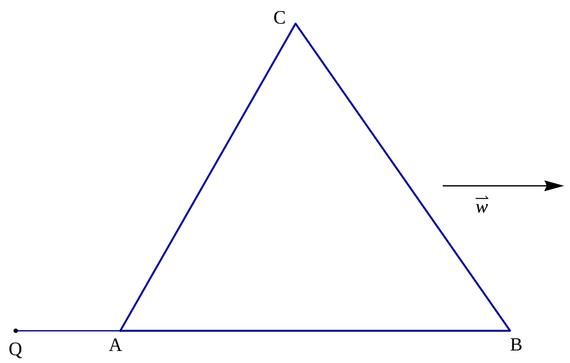


Figura 5.14 Representación de los datos del ejemplo

Como

$$\overrightarrow{QM} = \Pr_{\overrightarrow{w}} \overrightarrow{QC} = \frac{\overrightarrow{QC}.\overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|^2}\overrightarrow{w} = (0;6;-6)$$

y $\overrightarrow{QM} = M - Q$, entonces $M = Q + \overrightarrow{QM} = (1;2;1)$.

Luego, $\overrightarrow{CM} = M - C = (5;1;-1)$.

$$\left\|\overrightarrow{CM}\right\| = 3\sqrt{3}$$

Como el triángulo ABC es equilátero, $\left\|\overrightarrow{AM}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB}\right\| = 3$.

El vector unitario que tiene la misma dirección y sentido que los vectores $\overrightarrow{QM}$, $\overrightarrow{AM}$ y $\overrightarrow{MB}$ es

$$\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|} = \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Luego, de $\overrightarrow{AM} = \left\|\overrightarrow{AM}\right\| \overrightarrow{u}$ se tiene

$$A = M - \left\|\overrightarrow{MB}\right\| \overrightarrow{u} = \left(1; 2 - \frac{3}{\sqrt{2}}; 1 + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

y

$$B = M + \left\|\overrightarrow{MB}\right\| \overrightarrow{u} = \left(1; 2 + \frac{3}{\sqrt{2}}; 1 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

6.3.14 Producto vectorial de vectores en $\mathbb{R}^3$

Sean $\overrightarrow{a} = (a_1; a_2; a_3)$ y $\overrightarrow{b} = (b_1; b_2; b_3)$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$. Definimos el producto vectorial como

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$$

que también se puede expresar como:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\overrightarrow{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\overrightarrow{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\overrightarrow{k}$$

Gráficamente se puede ver que el vector $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ es perpendicular a los vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$.

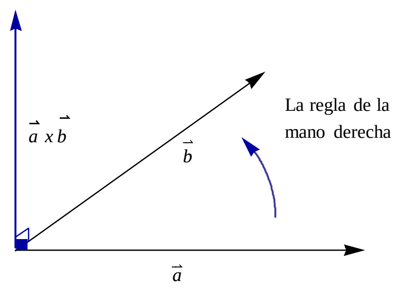


Figura 5.15 Interpretación geométrica del producto vectorial

Nota: Esta operación no está definida en $\mathbb{R}^2$.

Propiedades

1. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$.
2. $\overrightarrow{a} \times \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}$.
3. Para cualquier número α, $(\alpha\overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \alpha\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) = \overrightarrow{a} \times \left(\alpha\overrightarrow{b}\right)$.
4. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ es tanto perpendicular a $\overrightarrow{a}$ como a $\overrightarrow{b}$.
5. Si $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ son paralelos entonces $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = 0$.
6. $\left\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right\| = \|\overrightarrow{a}\| \left\|\overrightarrow{b}\right\| |\sin\theta|$, donde θ es el ángulo que forman $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$.
7. $\left\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right\|$ representa el área del paralelogramo formado por los vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$.

Demostración de la propiedad 6:
Sean $\overrightarrow{a} = (a_1; a_2; a_3)$ y $\overrightarrow{b} = (b_1; b_2; b_3)$ entonces

$$\begin{aligned}
\left\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right\|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
&= \|\overrightarrow{a}\|^2 \left\|\overrightarrow{b}\right\|^2 - \left(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}\right)^2
\end{aligned}$$

y como $\left(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}\right)^2 = \|\overrightarrow{a}\|^2 \left\|\overrightarrow{b}\right\|^2 \cos^2\theta$
Entonces:

$$\begin{aligned}
\left\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right\|^2 &= \|\overrightarrow{a}\|^2 \left\|\overrightarrow{b}\right\|^2 - \|\overrightarrow{a}\|^2 \left\|\overrightarrow{b}\right\|^2 \cos^2 \\
&= \|\overrightarrow{a}\|^2 \left\|\overrightarrow{b}\right\|^2 \sin^2\theta
\end{aligned}$$

Demostración de la propiedad 7:
De la geometría elemental, se ve que el área del paralelogramo es igual a

$$\|\overrightarrow{a}\| \left\|\overrightarrow{b}\right\| \sin\theta = \left\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right\|$$

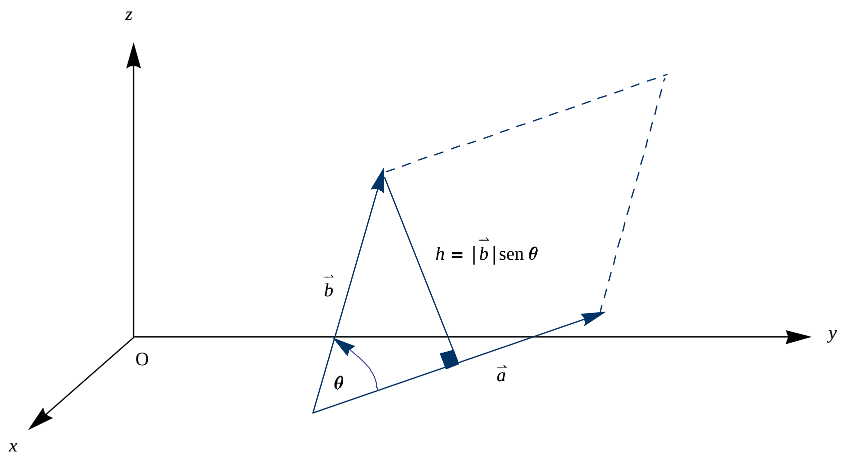


Figura 5.16 Interpretación geométrica de la fórmula para el área de un paralelogramo

Ejemplo 6.20 *Los puntos* $A\,(1;2;3)$, $B\,(1;3;0)$, $C\left(1+\sqrt{5};4;2\right)$ *y* $D\left(1+\sqrt{5};1;1\right)$ *son cuatro vértices de un cubo en el que* $\overline{AB}$ *y* $\overline{CD}$ *son diagonales de dos caras opuestas. Hallar las coordenadas de los otros vértices del cubo.*

Solución
Sean E, F, G y H los otros vértices del cubo.

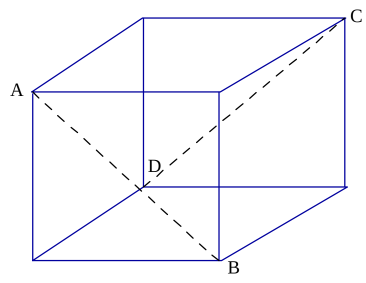


Figura 5.17 Ubicación de los vértices dados

Sea l la longitud del lado del cubo.
Como $\overrightarrow{AB} = B - A = (0;1;-3)$ y $\overrightarrow{CD} = (0;-3;-1)$ entonces

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{10} = l\sqrt{2} \Rightarrow l = \sqrt{5}.$$

El vector $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} = 10\,(-1;0;0) = -10\,\overrightarrow{i}$ es paralelo a $\overrightarrow{DE}$.

$$\overrightarrow{DE} = -l\,\overrightarrow{i} = -\sqrt{5}\,\overrightarrow{i} \Rightarrow E = (1;1;1)$$

Los otros vértices son

$$\begin{aligned} F &= C - l\,\overrightarrow{i} = (1;4;2) \\ G &= A + l\,\overrightarrow{i} = \left(1+\sqrt{5};2;3\right) \end{aligned}$$

y

$$H = B + l\,\overrightarrow{i} = \left(1+\sqrt{5};3;0\right)$$

6.3.15 Producto mixto de vectores en $\mathbb{R}^3$

Sean $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{c}$ tres vectores que no están en el mismo plano. El triple producto escalar, denotado por $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]$ se define por

$$[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}] = \overrightarrow{a}.\left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right)$$

Propiedades

1. $\left|\overrightarrow{a}.\left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right)\right|$, representa el volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{c}$.

2. $\overrightarrow{a}.\left(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}\right)=\overrightarrow{b}.(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a})=\overrightarrow{c}.\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)$.

3. $\overrightarrow{a}.\left(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}\right)\in\mathbb{R}$.

Demostración de la propiedad 1:

Sean $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{c}$, tres vectores que no están en el mismo plano. Estos vectores forman los lados de un paralelepípedo en el espacio.

La base de dicho paralelepípedo es un paralelogramo formado por los vectores $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{c}$, por lo tanto su área es $A=\left\|\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}\right\|$.

El vector $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}$ es ortogonal tanto a $\overrightarrow{b}$ como a $\overrightarrow{c}$ y, por tanto, es ortogonal al paralelogramo determinado por $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{c}$.

La altura del paralelepípedo, h, se mide a lo largo del vector ortogonal al paralelogamo, en este caso, $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}$.

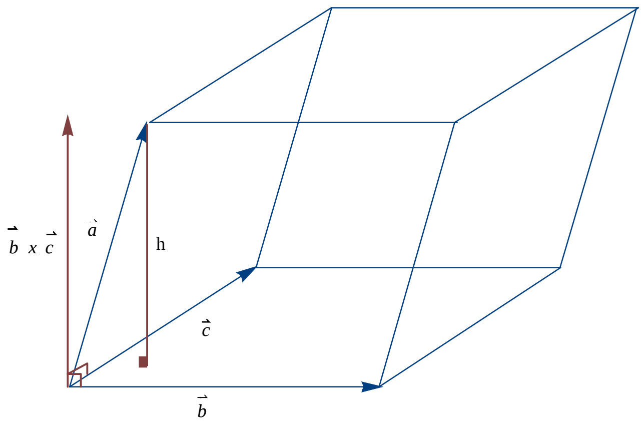


Figura5.18 Interpretación geométrica de la fórmula para hallar el volumen de un paralelepípedo

$$\begin{aligned} h &= Comp_{\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}}\overrightarrow{a} \\ &= \left|\frac{\overrightarrow{a}.\left(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}\right)}{\left\|\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}\right\|}\right| \end{aligned}$$

Entonces el volumen del paralelepípedo

$$V=Ah=\left\|\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}\right\|\left|\frac{\overrightarrow{a}.\left(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}\right)}{\left\|\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}\right\|}\right|=\left|\overrightarrow{a}.\left(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}\right)\right|$$

Ejemplo 6.21 *Calcular el área del paralelogramo determinado por los vectores* $\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}$ *y* $3\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ *, si* $\|\overrightarrow{a}\| = \left\|\overrightarrow{b}\right\| = 1$ *y el ángulo formado por* $\overrightarrow{a}$ *y* $\overrightarrow{b}$ *es* $30°$*.*

Solución
El número $\left\|\left(\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}\right)\times\left(3\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)\right\|$ representa el área del paralelogramo.
Aplicando propiedades de producto vectorial se tiene:

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}\right)\times\left(3\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)\right\| &= 8\left\|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right\| \\
&= 8\|\overrightarrow{a}\|\left\|\overrightarrow{b}\right\|\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
&= 4
\end{aligned}$$

Ejemplo 6.22 *Hallar el volumen de una pirámide triangular que tiene por vértices los puntos* $A(2;2;2)$*,* $B(4;3;3)$*,* $C(4;5;4)$ *y* $D(5;5;6)$*.*

Solución
Los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ coinciden con las aristas de la pirámide y convergen en el vértice A:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= (2;1;1) \\
\overrightarrow{AC} &= (2;3;2) \\
\overrightarrow{AD} &= (3;3;4)
\end{aligned}$$

el producto mixto de estos vectores

$$\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right) = 7$$

representa el volumen del paralelepípedo generado por $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$.
Luego, el volumen de la pirámide triangular es la sexta parte, $\frac{7}{6}$.

Ejemplo 6.23 *Mostrar que los vectores* $\overrightarrow{a} = 7\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$*,* $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{i} - 7\overrightarrow{j} + 8\overrightarrow{k}$ *y* $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$*, son coplanares.*

Solución
El producto mixto de estos vectores es

$$\overrightarrow{a}\cdot\left(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}\right) = 0$$

por lo tanto, por la propiedad 4 son coplanares.

Ejemplo 6.24 *En el triángulo rectángulo* ΔABC *recto en* B*, las coordenadas del vertice* A *son* $(6;3;-2)$*,* $\overrightarrow{AC} = (-8;3;5)$ *y* $\mathrm{Pr}_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{BM} = \left(-3;-\frac{3}{2};1\right)$*, siendo* M *un punto sobre el lado* $\overrightarrow{AC}$*. Hallar el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores* $\overrightarrow{BA}$*,* $\overrightarrow{BC}$ *y* $\overrightarrow{BR}$ *, si* $R(2;12;-2)$*.*

Solución
Como $A(6;3;-2)$ y del vector

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} &= (-8,3,5) = C - A \text{ se tiene} \\
C &= (6;3;-2) + (-8;3;5) = (-2;6;3)\,.
\end{aligned}$$

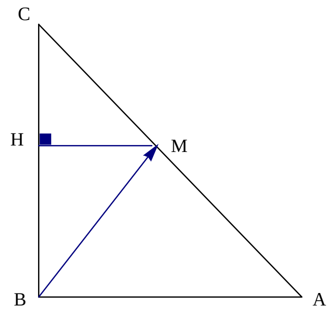


Figura 5.19 Ubicación de los datos del ejemplo

Ahora hallaremos las coordenadas del vértice B.
Como $\operatorname{Pr}_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{BM} = \left(-3; -\frac{3}{2}; 1\right)$ es paralelo a $\overrightarrow{BC}$ entonces existe $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$ tal que

$$\overrightarrow{BC} = r\left(-3; -\frac{3}{2}; 1\right)$$

De $\overrightarrow{BC} = C - B$ se tiene que:

$$B = C - r\left(-3; -\frac{3}{2}; 1\right) = \left(-2 + 3r; 6 + \frac{3}{2}r; 3 - r\right).$$

Por lo tanto,

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2 + 3r - 6; 6 + 1.5r - 3; 3 - r + 2).$$

Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ son ortogonales entonces

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} &= 0 \\ (-2 + 3r - 6; 6 + 1.5r - 3; 3 - r + 2) \cdot \left(-3r; -\frac{3}{2}r; r\right) &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo

$$r\,(r - 2) = 0 \Rightarrow r = 0 \vee r = 2$$

Luego, $B\,(-2; 3; 6) \;\vee\; B\,(4; 9; 1)$; descartamos $B(-2; 3; 6) = C$.
Finalmente, el volumen de paralelepípedo formado por los vectores $\overrightarrow{BR}$, $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ es

$$V = \left|\overrightarrow{BR} \cdot \left(\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\right)\right| = |(-2; 3; 1) \cdot (21; -14; 42)| = 42u^3.$$

Ejemplo 6.25 *Demostrar que el volumen del tetraedro (pirámide triángular) determinado por los vectores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{c}$ es $\frac{1}{6}.\left|\overrightarrow{a}.(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})\right|$.*

Solución
Sea el tetraedro $ABCD$ con base el triángulo ABC es la base. La altura del tetraedro parte del vértice D hacia el triángulo ABC.

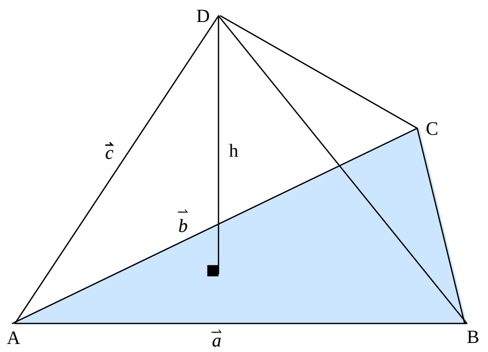


Figura 5.20 Ubicación de los datos del ejemplo

Sabemos que el volumen del tetraedro es

$$V = \frac{1}{6}\,(\text{área de la Base})\,(\text{altura})$$

Denotemos por $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{AD}$.

Si la base del tetraedro es el triángulo formado por $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$, entonces su área será igual a $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right\|$.

La altura será un vector paralelo al vector $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$. Específicamente $\left\|\mathrm{Pr}_{\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}}\overrightarrow{c}\right\|$.

$$\left\|\mathrm{Pr}_{\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}}\overrightarrow{c}\right\| = \left|Comp_{\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}}\overrightarrow{c}\right| = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right\|}\left|\overrightarrow{c}.\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)\right|$$

Reemplazando,

$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{a}.(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})\right|$$

6.3.16 Problemas propuestos

1) Sean $A(3;-1;6)$ y $C(-4;-10;11)$ dos vértices del triángulo isósceles ABC, cuyo lado no congruente $\overline{BC}$ mide $\sqrt{416}$ unidades. Si el punto $P(1;-3;20)$ pertenece a la mediatriz del segmento $\overline{BC}$, hallar empleando vectores las coordenadas del vértice B.

2) a) Dados los vectores $\overrightarrow{a} = (-3;4;1)$ y $\overrightarrow{b} = \left(3;\sqrt{2};5\right)$, determinar un vector $\overrightarrow{c}$ que sea ortogonal al vector $(0;1;0)$, tal que $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{c} = 6$ y $Comp_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{c} = 1$.

b) Sean $r = \|\mathrm{Pr}_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{c}\|$ y $s = \left\|\mathrm{Pr}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{c}\right\|$, halle $r + s$.

3)Sea $PQRS$ un cuadrado de área $1u^2$, donde $P\,(-1;3)$ y $\overrightarrow{PQ}$ tiene la misma dirección y sentido que el vector $\overrightarrow{v} = (2;5)$. Hallar las coordenadas de los vértices Q, R y S.

4) Si $\overrightarrow{a} = (0;1;1)$, $\overrightarrow{b} = (1;1;0)$ y $\overrightarrow{c}$ son vectores en $\mathbb{R}^3$ que tienen longitudes iguales y forman dos a dos ángulos iguales, determinar el vector $\overrightarrow{c}$.

5) Considerar el cuadrilátero $ABCD$ recto en B, el vértice $A\,(0;20)$ y los vectores

$$\overrightarrow{AC} = (10;-130) \text{ y } \overrightarrow{AD} = (55;-53)$$

Si el vector $\overrightarrow{BM}$ es paralelo al vector $\overrightarrow{AD}$, donde M es el punto medio de la diagonal $\overline{AC}$, hallar los vértices del cuadrilátero $ABCD$.

6)Dados los vectores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{c} \in \mathbb{R}^3$. Demostrar la siguiente identidad:

$$\overrightarrow{a}.\left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right) = \overrightarrow{c}.\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right).$$

7) Si se sabe que:

(i)$\overrightarrow{c}$ es perpendicular a $\overrightarrow{a}$ y a $\overrightarrow{b}$.

(ii)El ángulo formado por $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ es igual a $\frac{\pi}{6}$.

(iii)$\|\overrightarrow{a}\| = 4$, $\left\|\overrightarrow{b}\right\| = 5$ y $\|\overrightarrow{c}\| = 3$.

Hallar $\overrightarrow{a}.\left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right)$.

8) Se tiene el trapecio $ABCD$ con lados paralelos AD y BC donde se cumple las siguientes condiciones:

(i). $\overrightarrow{AB} = (2;3)$

(ii). $A\,(-4;-2)$

(iii). $\overrightarrow{BD}$ es paralelo al vector $(4;-1)$

(iv). $\mathrm{Pr}_{\overrightarrow{AD}}\overrightarrow{AB} = \frac{9}{10}\,(3;1)$.

a) Hallar las coordenadas de los vertices B y D.

b) Si además se sabe que $\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{10}$, hallar el vector $\overrightarrow{BC}$.

9)En el paralelogramo $ABCD$ de área $56u^2$, $\overrightarrow{AE} = \mathrm{Pr}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AD}$, donde $A\,(-3;0)$ y $D\,(-2;4)$. Si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{a} = (2;1)$ son paralelos y con el mismo sentido, determinar el vector $\overrightarrow{EB}$.

6.4 Rectas en $\mathbb{R}^3$

6.4.1 Ecuación vectorial de la recta

Sea $\overrightarrow{a}$ un vector no nulo en $\mathbb{R}^3$. Si P_0 es un punto conocido, entonces existe una única recta $\mathcal{L}$ que pasa por P_0 y tiene la dirección de $\overrightarrow{a}$.

Al vector $\overrightarrow{a}$ se le denomina *vector dirección de la recta* $\mathcal{L}$ y a P_0 un *punto de paso de* $\mathcal{L}$.

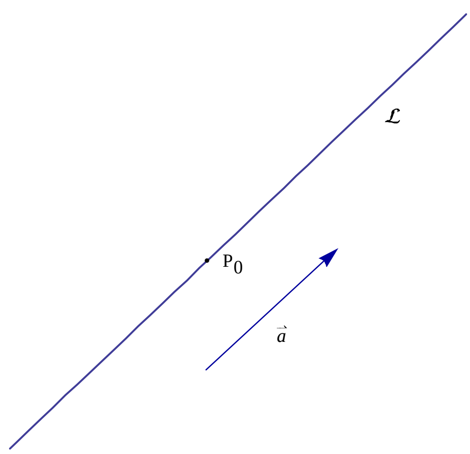


Figura 5.21 Elementos para definir una recta en el espacio

Si P es un punto genérico de la recta $\mathcal{L}$, se verifica que $\overrightarrow{P_0P} = t\overrightarrow{a}$, para algún valor de $t \in \mathbb{R}$, entonces las coordenadas de P se obtienen de

$$P = P_0 + \overrightarrow{P_0P}$$

De esta manera se establece una relación uno a uno entre los puntos de una recta y los números reales, es decir, para cada punto $P \in \mathcal{L}$ existe un $t \in \mathbb{R}$.

Así, en base a esta coorespondencia, definimos:

$$\mathcal{L} \;:\; P = P_0 + t\,\overrightarrow{a},\; t \in \mathbb{R}$$

Esta es la *ecuación vectorial* de la recta $\mathcal{L}$.

6.4.2 Ecuaciones paramétricas de la recta

Sean las coordenadas de $P = (x; y; z)$, $P_0 = (x_0; y_0; z_0)$ y el vector $\overrightarrow{a} = (a_1; a_2; a_3)$. Sustituyendo en la ecuación de $\mathcal{L}$ se obtiene:

$$(x; y; z) = (x_0; y_0; z_0) + t(a_1; a_2; a_3), t \in \mathbb{R}$$

de donde

$$\mathcal{L} : \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2,\; t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}$$

Estas ecuaicones se denominan *ecuaciones paramétricas* de $\mathcal{L}$, con t como parámetro.

6.4.3 Ecuación cartesiana de la recta

Si las componentes a_1, a_2 y a_3 son distintas de cero, despejando t se obtiene

$$\mathcal{L} : \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

Esta ecuación se denomina *ecuación cartesiana (o simétrica)* de la recta.

6.4.4 Posición relativa de dos rectas

Dadas las rectas:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &: \; P = P_0 + t\,\overrightarrow{a},\; t \in \mathbb{R} \\ \mathcal{L}_2 &: \; P = Q_0 + s\,\overrightarrow{b},\; s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

se dice que:

1. Las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son paralelas si sus vectores dirección son paralelos.
2. Las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son perpendiculares si sus vectores dirección son perpendiculares.

Ejemplo 6.26 *Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto* $M\,(3;2;-1)$ *y corta al eje* X *en ángulo recto.*

Solución

Como la recta es perpendicular al eje X y lo corta al eje X entonces pasa por el punto $N\,(3;0;0)$. La ecuación de la recta que pasa por los puntos M y N,

$$x=3;\quad \frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{1}$$

Ejemplo 6.27 *Se dan los puntos* $A\,(1;1;1)$, $B\,(2;3;3)$ *y* $C\,(3;3;2)$. *Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto* A *y es perpendicular a los vectores* $\overrightarrow{AB}$ *y* $\overrightarrow{AC}$.

Solución

La ecuación vectorial de la recta que cumple con estas condiciones es

$$L: P = A + t\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC};\ t\in\mathbb{R}$$

$$L: P = (1,1,1) + t(1,2,2)\times(2;2,1),\ t\in\mathbb{R}$$

$$L: P = (1,1,1) + t(-2;3;-2),\ t\in\mathbb{R}$$

Ejemplo 6.28 *Escribir la ecuación cartesiana de la recta que pasa por el punto* $M\,(0;2;1)$ *y forma ángulos congruentes con los vectores*

$$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k};\quad \overrightarrow{b}=3\overrightarrow{j}\quad \text{y}\quad \overrightarrow{c}=3\overrightarrow{k}$$

Solución

Sea $\overrightarrow{r}=(r_1;r_2;r_3)$ el vector dirección de la recta.
De la condición de ángulos congruentes se halla que $\overrightarrow{r}=(1;-1;-1)$.
Luego, la ecuación cartesiana de la recta es:

$$\frac{x}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{-1}$$

Ejemplo 6.29 *Considerar la recta*

$$L_1: P=(1;1;4)+t\,(2;3;2)\,,t\in\mathbb{R},$$

el punto $A\,(a_1;a_2;0)\in L_1$ *y la recta* L_2 *que pasa por* A *y es paralela al eje* Y.

a) Hallar las coordenadas de A y determine una ecuación vectorial de la recta L_2.
b) Hallar el punto $B\in L_1\cap L_3$ donde

$$L_3: \frac{x-8}{-1}=\frac{y+5}{4}=\frac{z+1}{3}.$$

c) Si C es un punto de L_2 tal que $\overrightarrow{BC}$ es perpendicular a L_2, hallar el área del $\triangle ABC$.

Solución

a) Como

$$A\in L_1: A=(1+2t;1+3t;4+2t)\,,\ \text{para algún } t\in\mathbb{R}$$

Además, $A\,(a_1;a_2;0)$.

Igualando la tercera coordenada de A

$$4+2t=0 \implies t=-2 \implies A=(-3;-5;0)\,.$$

Si L_2 es paralela al eje Y, entonces $\overrightarrow{j}=(0;1;0)$ es el vector dirección de L_2.

Luego, una ecuación vectorial de L_2 es

$$L_2:\overrightarrow{P}=(-3;-5;0)+t\,(0;1;0)\,;t\in\mathbb{R}.$$

b) La ecuación vectorial de

$$L_3:P=(8;-5;-1)+r\,(-1;4;3)\,;r\in\mathbb{R}$$

Sea $B\in L_1\cap L_3$ entonces

$$\begin{aligned} B &\in L_1:B\,(1+2t;1+3t;4+2t)\,, \text{ para algún t}\\ B &\in L_3:B\,(8-r;-5+4r;-1+3r)\,, \text{ para algún r}\end{aligned}$$

Igualando las coordenadas de B y resolviendo se obtiene

$$t=2;\,r=3 \implies B=(5;7;8)\,.$$

c) Si $C\in L_2$ entonces $C=(-3;-5+t;0)$, para algún t.

$\overrightarrow{BC}=C-B=(-8;-12+t;-8)$.

Como $\overrightarrow{BC}\perp L_2 \implies \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{j}=0$ entonces

$$(-8;-12+t;-8)\,.\,(0;1;0)=0 \implies t=12$$

Luego $C=(-3;7;0)$.

Construimos los vectores $\overrightarrow{AB}=(8;12;8)$ y $\overrightarrow{AC}=(0;12;0)$.

El área del paralelogramo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ está dado por $\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|$.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-16;0;16) \implies \left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|=96\sqrt{2}.$$

Entonces el área del triángulo ABC es $48\sqrt{2}u^2$.

Ejemplo 6.30 *Sea ABC un triángulo isósceles obtuso en C. Se sabe que el lado $\overline{AC}$ se encuentra sobre la recta*

$$L_1:P=(1;-1;-1)+s\,(0;3;4)\,,s\in\mathbb{R}$$

y el lado $\overline{BC}$ sobre la recta

$$L_2:P=(4;6;3)+t\,(3;4;0)\,,t\in\mathbb{R}.$$

Si además, el punto $M=(-14;-9;15)$ se encuentra sobre el lado $\overline{AB}$, determinar las coordenadas de los vértices del triángulo ABC.

Solución

Calculamos las coordenadas del punto de intersección $C\in L_1\cap L_2$:

$$C=(1;2;3)\,.$$

El vector $\overrightarrow{CA}$ es paralelo al vector de dirección de L_1 y el vector $\overrightarrow{CB}$ es paralelo al vector de dirección de L_2, entonces

$$\overrightarrow{CA} = s\,(0;3;4)$$

y

$$\overrightarrow{CB} = t\,(3;4;0)$$

Como $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$, entonces

$$\|s\,(0;3;4)\| = \|t\,(3;4;0)\| \Rightarrow 5\,|s| = 5\,|t| \Rightarrow s = \pm t$$

Si $s = t$, el angulo C tendría coseno del mismo signo que aquel que forman los vectores de dirección de las rectas L_1 y L_2, es decir, $(0;3;4)\,.\,(3;4;0) = 12 > 0$.

Como C debe ser obtuso, entonces $s = -t$.

Luego

$$\overrightarrow{CA} = -t\,(0;3;4)\,,\ \overrightarrow{CB} = t\,(3;4;0)$$

De donde, $A = (1; 2-3t; 3-4t)$ y $B = (1+3t; 2+4t; 3)$.

Para hallar t,

$$\overrightarrow{MA} = (15; 11-3t; -12-4t)$$

y

$$\overrightarrow{MB} = (15+3t; 11+4t; -12)\,.$$

Como $\overrightarrow{MA}$ y $\overrightarrow{MB}$ son vectores paralelos

$$\frac{15}{15+t} = \frac{11-3t}{11+4t}$$

Resolviendo $t = 0$ y $t = -8$.

Pero con $t = 0$ no hay triángulo.

Para $t = -8$, $A = (1; 19; 35)$ y $B = (-23; -30; 3)$.

6.4.5 Distancia de un punto a una recta

Sea $\mathcal{L} : P = P_0 + t\ \overrightarrow{a}, t \in \mathbb{R}$ una recta en $\mathbb{R}^3$ y Q_0 un punto cualquiera fuera de ella.

La *distancia* de Q_0 a la recta $\mathcal{L}$, se puede calcular empleando la siguiente fórmula:

$$d_{\mathcal{L}}(Q_0) = \frac{\left\|\overrightarrow{P_0Q_0} \times \overrightarrow{a}\right\|}{\|\overrightarrow{a}\|}$$

En efecto,

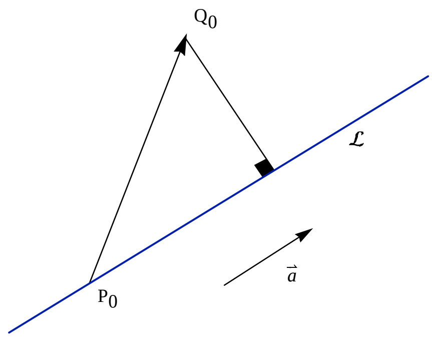


Figura 5.22 Elementos para hallar la distancia de un punto a una recta

En el triángulo $P_0R_0Q_0$ de la figura, (R_0 es el pie de la perpendicular trazada), se tiene que:

$$d(Q_0, P_0) = \left\|\overrightarrow{P_0Q_0}\right\| \quad \text{y} \quad d(P_0, R_0) = \left|\text{Comp}_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{P_0Q_0}\right|.$$

Por el Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}
d^2_{\mathcal{L}}(Q_0) &= d^2(Q_0P_0) - d^2(P_0R_0) = \left\|\overrightarrow{P_0Q_0}\right\|^2 - \left|\text{Comp}_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{P_0Q_0}\right|^2 \\
&= \left\|\overrightarrow{P_0Q_0}\right\|^2 - \left[\frac{\overrightarrow{P_0Q_0}\cdot\overrightarrow{a}}{\|\overrightarrow{a}\|}\right]^2 = \left\|\overrightarrow{P_0Q_0}\right\|^2 - \frac{\left\|\overrightarrow{P_0Q_0}\right\|^2\|\overrightarrow{a}\|^2\cos^2(\phi)}{\|\overrightarrow{a}\|^2} \\
&= \left\|\overrightarrow{P_0Q_0}\right\|^2\left(\frac{\|\overrightarrow{a}\|^2 - \|\overrightarrow{a}\|^2\cos^2(\phi)}{\|\overrightarrow{a}\|^2}\right) = \left\|\overrightarrow{P_0Q_0}\right\|^2\|\overrightarrow{a}\|^2\frac{\sin^2(\phi)}{\|\overrightarrow{a}\|^2},
\end{aligned}$$

siendo ϕ el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{P_0Q_0}$ y $\overrightarrow{a}$. Tomando raíz cuadrada en ambos miembros

$$d_{\mathcal{L}}(Q_0) = \frac{\left\|\overrightarrow{P_0Q_0}\right\|\|\overrightarrow{a}\|\sin(\phi)}{\|\overrightarrow{a}\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{P_0Q_0}\times\overrightarrow{a}\right\|}{\|\overrightarrow{a}\|}.$$

Ejemplo 6.31 *Considerar las rectas que no se cortan (rectas alabeadas):*

$$\begin{aligned}
L_1 &: \; P = P_0 + t\overrightarrow{a}, \; t\in\mathbb{R} \\
L_2 &: \; P = Q_0 + r\overrightarrow{b}, \; r\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

a) Demostrar que la distancia d entre L_1 y L_2 se puede calcular con la fórmula

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{P_0Q_0}.\overrightarrow{c}\right|}{\|\overrightarrow{c}\|}$$

donde $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$.

b) Si

$$\begin{aligned}
L_1 &: \; P = (3;-2;1) + t\,(1;1;2), \; t\in\mathbb{R} \\
L_2 &: \; \frac{x+4}{3} = \frac{y+5}{4} = \frac{z}{5}
\end{aligned}$$

hallar d.

c) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-4;-5;0)$ y es perpendicular a las rectas L_1 y L_2, dadas en la parte b).

Solución

a) Se verifica que $\operatorname{Pr}_{\overrightarrow{c}} \overrightarrow{P_0Q_0} = \dfrac{\overrightarrow{P_0Q_0}.\overrightarrow{c}}{\|\overrightarrow{c}\|^2}\overrightarrow{c}$.

La longitud de este vector,

$$\left\|\Pr_{\overrightarrow{c}} \overrightarrow{P_0Q_0}\right\| = \left|Comp_{\overrightarrow{c}}\overrightarrow{P_0Q_0}\right|$$

es la distancia d,

$$\left|Comp_{\overrightarrow{c}}\overrightarrow{P_0Q_0}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{P_0Q_0}.\overrightarrow{c}\right|}{\|\overrightarrow{c}\|} = d.$$

b) Sean los puntos de paso, $P_0\,(3;2;1)$ y $Q_0\,(-4;-5;0)$ y los vectores dirección $\overrightarrow{a} = (1;1;2)$ y $\overrightarrow{b} = (3;4;5)$ de las rectas L_1 y L_2, respectivamente.

El vector $\overrightarrow{P_0Q_0} = (-7;-3;-1)$ y $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (-3;1;1)$ entonces

$$d = \frac{17}{\sqrt{11}}.$$

c) La ecuación de $L_3 : P = (-4;-5;0) + s\,(-3;1;1),\ s \in \mathbb{R}$.

6.4.6 Problemas propuestos

1) Dos de los vértices de un triángulo isósceles ABC, son los puntos $A\,(2;1;-4)$ y $B\,(7;8;5)$ y la base (lado no congruente) está contenida en la recta de ecuación

$$L : P = (4;4;4) + t\,(3;4;1)\,, t \in R.$$

Hallar:

a) Las coordenadas del punto medio de la base del triángulo ABC.

b) Las coordenadas del vértice C.

c) El área del triángulo ABC.

d) El volumen del paralelepípedo generado por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$

2)Considerar el punto $C\,(6;3;-2)$ y la recta L, cuya ecuación viene dada por

$$L : P = (-2;6;3) + t\,(-6;-3;2)\,, t \in \mathbb{R}$$

Si el triángulo isósceles ACB, con base AB contenida en L, tiene un área de $98u^2$, hallar:

a) Las coordenadas de A y B

b) El volumen del paralelepípedo de $3u$ de altura y que tiene como base el paralelogramo de lados $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$

Capítulo 7

Respuestas a los problemas propuestos

Capítulo 1

Sección 1.1.7

1) La afirmación es falsa pues al ser la restricción $x \geqslant \frac{1}{2}$, ya se están excluyendo valores de x de modo que su conjunto solución no podrá ser todos los números reales.

2) La afirmación es falsa; basta considerar el caso donde b es negativo. Por ejemplo, si b=-2 se tendrá que el conjunto solución de $\sqrt{x} \geqslant -2$ es $[0; +\infty[$ y el conjunto solución de $x \geqslant (-2)^2$ es $[4; +\infty[$.

3)$\left]-2; -\sqrt{2}\right[\cup \left]\sqrt{2}; +\infty\right[$

4) [0;3]

5) $\left]-\infty; \frac{1}{a}\right]$

6) [-1;1]

7) $\left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[$

8) El conjunto vacío

9) $\left]-\infty; -4a^2 - 1\right] \cup \left[4a^2 + 1; +\infty\right[$

10) $]-\infty; -4] \cup \left[1 + \sqrt{7}; +\infty\right[$

11) $]-15; -5] \cup [5; 15[$

Sección 1.2.3

1)

a. El sistema no tiene solución

b. $x = 4 - z; y = 3(3 - z);\ \ z \in R$

2) Asumiendo que $q \neq 0; x = a - b; y = b - \frac{c}{q}; z = \frac{c}{q}$, el sistema sí tendrá solución y será única.

Asumiendo que $q = 0$ y $c \neq 0$, el sistema no tendrá solución.

Asumiendo que $q = 0$ y $c = 0$, el sistema tendrá infinitas soluciones.

3) 5; 4 y 2.

4)

a. (4-z; 9-3z;z)

b. (1;0;3)

5)

a. Es imposible ya que se obtiene como solución $\left(-\frac{3}{80}; \frac{73}{80}; \frac{1}{8}\right)$

b. Sí es posible pues se obtiene la siguiente solución $\left(\frac{21}{400}; \frac{53}{80}; \frac{53}{200}\right)$

6)

a. La solución no es única; son todas aquellas de la forma $(5w; 85 - 19w, 13w - 20; w)$

b. (20;9;32;4)

7)

a. Las variables que se deben determinar son las siguientes:
x=velocidad cuesta arriba en km/h;
y=velocidad en terreno llano en km/h;
z=velocidad cuesta abajo en km/h
b. (8;15;20)
c. 2horas
8) Se transportan $60m^3$del aserradero A hacia la fábrica M, $0m^3$de B hacia M y $5m^3$ de C hacia M.

Capítulo 2

Sección 2.13

1)
a.3+9i
b.7-5i
c. -$\frac{29}{102} + \frac{135}{34}i$
2)
a. -3/2
b. i/2
3) $\frac{1}{10} - \frac{17}{10}i$
4)$z = 5 - \frac{10}{3}i$; $w = -2 + \frac{4}{3}i$
5)
a. -$\frac{3}{25}$
b. -$\frac{2}{17}$
c. $\frac{\sqrt{370}}{5}$
6)
a. z=2+i; w=2-i
b. z=3+5i; w=2+i
c. z=-i; w=1+i
d. z=1+i; w=2-3i
7)
a. $z = \frac{24}{25}\sqrt{10}(\cos\frac{345\pi}{180} + isen\frac{345\pi}{180})$
b. $z = \frac{24}{25}\sqrt{10}e^{\frac{345\pi}{180}i}$
8) $\sqrt{2} + i\sqrt{2}; -\sqrt{2} + i\sqrt{2}; -\sqrt{2} - i\sqrt{2}\,; \sqrt{2} - i\sqrt{2}$
9) -256i
10) $-\frac{1}{24} - \frac{1}{24}i$
11) $z = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4}i; w = -\frac{3}{2}i$
12) $z = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}i; w = \frac{1}{\sqrt{2}}(2 - 5i)$
13) $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
14)
a. {1-2i; 1+2i}
b. {2+i; 1-i}
c. $\left\{\frac{2-\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i; \frac{2+\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right\}$
15) $\sqrt[4]{2}e^{\frac{\pi}{8}i}$; $\sqrt[4]{2}e^{\frac{9\pi}{8}i}$; $\sqrt[4]{2}e^{\frac{7\pi}{8}i}$; $\sqrt[4]{2}e^{\frac{15\pi}{8}i}$
16)
a. $\left\{4e^{\frac{\pi}{2}i}; 4e^{\frac{3\pi}{2}i}\right\}$
b. $\left\{3e^{\pi i}; 3e^{\frac{\pi}{3}i}; 3e^{\frac{5\pi}{3}i}\right\}$
17) $\sqrt{3} + i$

Capítulo 3

Sección 3.2.1

1) C(8;1) y D(-4;-3), altura= $4\sqrt{2}$

2) $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$

3)

a. Para R(2; 4), S(0; -2) y para R(-2;4), S(-4; -2)

b. El punto medio de PQ

4) $xy = \frac{1}{2}$ ó $xy = -\frac{1}{2}$

Sección 3.3.9

1)

a. P(6;0),Q(10;6) y R(2;8)

b. d(O; S)= $\frac{1}{4}$d(P; C)

2) C(3;4), D(-1;1), B(0;8) y la recta $x + 7y - 31 = 0$

3) El problema tiene dos soluciones

L : $17x - 6y - 40 = 0$ y $x + 18y - 16 = 0$

4)La ecuación de la recta AB es $2x - 3y + 20 = 0$

La ecuación de la recta BC es $2x + 7y = 0$

5)

a. A(5;5) y C(7; 11) ó (3; -1)

b. D(-4; 0)

c. $\frac{12\sqrt{10}}{5}$

6)La recta que contiene al lado BC es $3x + 5y - 46 = 0$

La recta que contiene al lado AD es $5x + 3y - 2 = 0$

7)

a. Mediatriz de AC: $4y + 6x = 17$

Mediatriz de AB: $12y - 10x = 7$

b. Ángulo α medido de AB a AC tal que

α=arctan(28/3)

8) $\frac{156}{11}$

9)

a.C(-3; 5)

b. $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = \frac{(x-3y+8)^2}{10}$

10) L:$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$; n: $y = x$; m: $y = -x$; r: $y = 3x$

11) L: $y = x + 1$; m: $y = -x + 1$;n:$y = x - 2$; r:$y = 2x + 2$

Sección 3.4.2

1)

a. C(-2;1)

b. Los puntos son $P_2(0; 1 - \sqrt{5})$ y $P_4(0; 1 + \sqrt{5})$

2)

a. k=5

b. Los puntos son $P_1(0; -5 - 2\sqrt{5})$ y $P_2(0; -5 + 2\sqrt{5})$

c. $x \in [-2; 10]\,; y \in [-11; 1]$

3) $\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{25}{8}$

4) $C_1 : (x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 45; C_2 : (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 65$

5) $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 25$

6)

a.$(x - 11)^2 + y^2 = 25$

b. L: $3x - 4y - 8 = 0$

c. $A\left(\frac{24}{25}; -\frac{32}{25}\right)$

7) $C_1 : (x - 15)^2 + (y - 15)^2 = 15^2; C_2 : (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 3^2$

8)

Solución 1: $\frac{8-2(3y-4)^2-(3y-2)(4-3y)}{\sqrt{4-(3y-4)^2}} = 3x$

Solución 2: $\left(\frac{3y-4}{\pm\sqrt{4-(3y-4)^2}}\right)\left(\frac{3y-2}{\pm 2\sqrt{4-(3y-4)^2-3x}}\right) = -1$

Sección 3.5.3
1) $(y-1)^2 = 16x$ ó $(y-9)^2 = -16(x-4)$
2) $\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2} = \frac{|x+y-9|}{\sqrt{2}}$
3)$(y-3)^2 = 8(x-5)$
4)
a.$y = x+1$
b. F(5; 6)
c. $y = -x+3$
d. $\frac{|x+y-3|}{\sqrt{2}} = \sqrt{(x-5)^2+(y-6)^2}$

Sección 3.6.3
1) $\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y-7)^2}{16/7} = 1$
2)
a. $\frac{(x-26)^2}{26^2} + \frac{(y-24)^2}{24^2} = 1$
b. $(x+4)^2 + (y-24)^2 = 1600$

Sección 3.7.4
1) Se trata de la hipérbola de ecuación $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{9/4} = 1$
2) $\frac{(x-6)^2}{(1+\sqrt{17})^2} + \frac{(y-3)^2}{2(1+\sqrt{17})} = 1$
3)
a.El lugar geométrico corresponde a una hipérbola de ecuación $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{72} = 1$
b.Vértices (4; 1) y (-2; 1), Focos (10; 1) y (-8; 1)

Sección 3.8.3
1) Vértice $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\right)$
2) $\frac{(u+\frac{\sqrt{5}}{6})^2}{3} - \frac{u^2}{2} = 1$

3) $x = \frac{\sqrt{13}}{13}(3u-2v); y = \frac{\sqrt{13}}{3}(2u+3v)$

Capítulo 4
Sección 4.5
1) $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;$Q\left(-1; -\sqrt{3}\right)$;$S\left(\sqrt{3}; -1\right)$
3)
a.$a = r\cos\theta$
b.$b = rsen\theta$
c. $Ar\cos\theta + Brsen\theta + C = 0$
d. el polo (r=0) y
5) el polo, $\left(\frac{3}{2}; -\frac{\pi}{6}\right)$y $\left(\frac{3}{2}; -\frac{5\pi}{6}\right)$
6)
a. $r^2 = \pm 4\cos\theta sen\theta$
b. el polo, $\left(\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right)$ $\left(\sqrt{2}; \frac{5\pi}{4}\right)$

Capítulo 5
Sección 5.3.16
1)B(8;6;15)

2)
a. $\overrightarrow{c} = \left(-\frac{4}{3}; 0; 2\right)$
b. $r = \|\mathrm{Pr}_{\overrightarrow{a}} \overrightarrow{c}\| = \frac{6}{\sqrt{26}}; s = \left\|\mathrm{Pr}_{\overrightarrow{b}} \overrightarrow{c}\right\| = 1; r + s = \frac{6}{\sqrt{26}} + 1$
3) $Q\left(\frac{2-\sqrt{29}}{\sqrt{29}}; \frac{5+3\sqrt{29}}{\sqrt{29}}\right); S\left(\frac{-5-\sqrt{29}}{\sqrt{29}}; \frac{2+3\sqrt{29}}{\sqrt{29}}\right); R\left(\frac{-3-\sqrt{29}}{\sqrt{29}}; \frac{7+3\sqrt{29}}{\sqrt{29}}\right)$
4) $\overrightarrow{c} = (1; 0; 1)$ ó $\overrightarrow{c} = (-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{1}{3})$
5) C(10;-110); D(55;-15); B(-50,10)
6) Se pueden usar componentes.
7) 30
8)
a. B(-2,1); D(2,0)
b. $\overrightarrow{BC} = (3; 1)$
9) $\overrightarrow{EB} = \left(\frac{68}{5}; \frac{34}{5}\right)$

Sección 5.4.5
1)
a. (1,0,3)
b. C(-5;-8;1)
c. $2\sqrt{1326}$
d. 21 216
2)
a. A(-8;3;5) y B(-16;15;3)
b. 252